Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 38e année, nº 7-8, 1969, pp. 293-307

ALGÈBRES TOPOLOGIQUES STOCHASTIQUES

par JEAN TH. HAÏNIS

§ 0. *Introduction* : La présente étude est une généralisation des deux premiers chapitres de [5]. Nous exposons ici certaines de nos conclusions.

Le caractère de la présente étude dans notre effort de définir la mesurabilité d'une application X définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{O}, p)$ à valeurs dans E (E : algèbre topologique complète localement m-convexe) est que nous utilisons le spectre $\mathcal{M}(E)$ de l'algèbre E. (cf. § 1, déf. 1.1).

L'avantage de cette méthode est que nous pouvons définir le produit de deux éléments aléatoires (*e'.a.*) ayant la relation $h \circ (X . Y) = (h \circ X) . (h \circ Y)$ où $h \in \mathcal{M}(E)$.

D'une manière analogue, comme Mourier [10] et Ahmad [0], nous définissons l'espérance mathématique d'un *e'.a.* X et l'indépendance (faible) de deux *e'.a.*

Par suite, on considère une algèbre E qui est la limite projective d'une famille d'algèbres de Banach, c'est-à-dire $E = \varprojlim_{\alpha} E_\alpha$, $\alpha \in I$ et E_α sont B*-algèbres (de Banach). En suite on démontre que chaque *e'.a.* est la limite projective d'une famille d'applications mesurables (*e'.a*) c'est-à-dire $X = \varprojlim_{\alpha} X_\alpha$ où les X_α sont des *e'.a.* définis sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{O}, p)$ à valeurs dans E_α, $\alpha \in I$. Ensuite on démontre quelques théorèmes ou proposisitions relativement aux limites projectives des *e'.a.*

Finalement, on considère le produit tensoriel de deux algèbres topologiques et on définit la mesurabilité de $X \otimes Y$ où X, Y sont des *é.a.* à valeurs dans les algèbres considérées.

GÉNÉRALITÉS ET DÉFINITIONS

Une *algèbre topologique* E est une algèbre munie d'une topologie telle que l'espace vectoriel E soit un espace vectoriel topologique tel que la multiplication dans E (considérée comme application de $E \times E$ dans E) soit séparément continue.

Nous rappelons d'abord quelques définitions :

Une partie U d'un espace vectoriel E s'appelle *convexe*, si les relations $X, Y \in U$ et $\lambda \in [0, 1]$ entraînent $\lambda . X + (1 - \lambda) . Y \in U$.

La partie U de E s'appelle *équilibrée*, si $\lambda . U \subseteq U$, pour $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| \leqq 1$.

La partie U s'appelle *symétrique*, si $U = -U$.

Pour l'espace vectoriel topologique E, une partie $U \subseteq E$ est *absorbante*, si pour chaque $X \in E$ il existe un $a > 0$ tel que, $X \in \lambda . U$ pour chaque $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda| \geqslant a$.

Étant donnée d'une algèbre E, une partie U de E s'apelle *idempotente*, si $U . U \subseteq U$.

On dit que U est *m-convexe* (multiplicativement-convexe) si elle est idempotente et convexe.

Une algèbre topologique s'appelle *localement multiplicativement convexe* (brièvement localement m-convexe) s'il existe une base de voisinages de 0 dont les ensembles sont m-convexes et symétriques.

La topologie de E peut être définie par un système de semi-normes (P_U), c'est-à-dire, à chaque voisinage U de 0 de E, m-convexe, équilibré (et absorbant) correspond une semi-norme définie par la relation suivante :

$$P_U(X) = \inf_{X \in \lambda . U} |\lambda|, \text{ pour chaque } X \in E. \tag{0.1}$$

La semi-norme définie par la relation (1) remplit aussi la relation :

$$P_U(X . Y) \leqq P_U(X) . P_U(Y), \text{ pour tous } X, Y \in E \quad . \tag{0.2}$$

On dit aussi que $P_U(.)$ est une semi-norme multiplicative.

Soit E une algèbre topologique et E′ son dual (topologique) ; soit encore $\mathscr{M}(E)$ l'ensemble des homomorphismes continus, à valeurs complexes, de l'algèbre E.

Alors, $\mathscr{M}(E) = \{h \in E' : h(X . Y) = h(X) . h(Y), \text{ pour } X, Y \in E\}$.

On considère $\mathscr{M}(E)$ comme muni de la topologie relative induite par la topologie faible $\sigma(E', E)$ de E. L'espace $\mathscr{M}(E)$ dépourvu de l'homomorphisme trivial est appelé le *spectre* de l'algèbre E.

On appelle *algèbre de Fréchet* (f-algèbre) une algèbre localement m-convexe métrisable et complète.

Si E est une algèbre topologique, on note $C_0(\mathscr{M}(E))$ l'ensemble de toutes les fonctions continues sur $\mathscr{M}(E)$ à valeurs complexes.

Une algèbre E commutative, semi-simple, complète, loc. m-convexe s'appelle « *full* » si nous avons

$E = C_0(\mathscr{M}(E))$ (algébriquement) (cf. [1], p. 32, déf. 8.3).

Soit E une f-algèbre commutative full loc. m-convexe ; une famille de semi-normes sous-multiplicatives (continues) définissant la topologie de E est donnée par la relation :

$$P_U(X) = \sup \{| h(X) | : h \in U \subseteq \mathscr{M}(E)\}, \tag{0.3}$$

avec $X \in E$ et U parcourt les sous-ensembles équicontinus $\{U_i\}$, $i \in I$ du spectre $\mathscr{M}(E)$ (cf. [9], p. 33, Th. 8.4).

La relation (0.3) s'écrit aussi sous la forme :

$$P_i(X) = \sup \{| h(X) | : h \in U_i \subseteq \mathscr{M}(E)\}, \tag{0.4}$$

avec $X \in E$ et $i \in I$.

§ 1. LES ÉLÉMENTS ALÉATOIRES

Soit E une algèbre loc. m-convexe et $\mathscr{M}(E)$ son spectre. Soit encore $\mathcal{O}_{\mathscr{M}(E)}$ la σ-algèbre sur E engendrée par la classe des sous-ensembles de la forme :

$$\tau_{\alpha,b,h} = \{x \in E : \mathrm{Re}\, h(x) < \alpha, \mathrm{Im}\, h(x) < \beta, \text{ pour } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ et } h \in \mathscr{M}(E)\}.$$

Soit $(\Omega, \mathcal{O}, p)$ un espace de probabilité, $(E, \mathcal{O}_{\mathcal{M}(E)})$ l'algèbre topologique E, munie de la σ-algèbre $\mathcal{O}_{\mathcal{M}(E)}$ et $(\mathbb{C}, \mathcal{B})$ les nombres complexes avec le corps de Borel.

Proposition 1.1. *On considère l'application*

$$X : (\Omega, \mathcal{O}) \to (E, \mathcal{O}_{\mathcal{M}(E)}) \tag{1.1}$$

Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1) *La fonction* $h \circ X$ *est mesurable, c'est-à-dire* $(h \circ X)^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{O}$ *pour chaque* $h \in \mathcal{M}(E)$.

2) *La fonction* X *est* $(\mathcal{O}_{\mathcal{M}(E)} - \mathcal{O})$ *mesurable, c'est-à-dire* :

$$X^{-1}(\mathcal{O}_{\mathcal{M}(E)}) \subset \mathcal{O}.$$

Démonstration : 1) $\Rightarrow$ 2).
Sur $R \times R$ soit un pavé $I_{\alpha,\beta} = (-\infty, \alpha) \times (-\infty, \beta) \in \mathcal{B}$.
Alors $X^{-1}(h^{-1}(I_{\alpha,\beta})) \in \mathcal{O}$. Mais $h^{-1}(I_{\alpha,\beta}) = \tau \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}(E)}$.
Or, $X^{-1}(\tau) \in \mathcal{O}$, c'est-à-dire $X^{-1}(\mathcal{O}_{\mathcal{M}(E)}) \subset \mathcal{O}$.

2) $\Rightarrow$ 1).
Soit $\tau \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}(E)}$; alors $X^{-1}(\tau) \in \mathcal{O}$. Soit encore un pavé $I_{\alpha,\beta} \in \mathcal{B}$ tel que $h^{-1}(I_{\alpha,\beta}) = \tau$. Nous avons : $X^{-1}(h^{-1}(I_{\alpha,\beta})) \in \mathcal{O}$ ou $(h \circ X)^{-1}(I_{\alpha,\beta}) \in \mathcal{O}$.

Définition 1.1. Si l'application (1.1) satisfait une des conditions équivalentes 1), 2) de la proposition (1.1) s'appelle *élément aléatoire* (*é.a.*) à valeurs dans l'algèbre topologique E.

Si nous avons une *-algèbre, on définit *l'involution* de l'*é.a.* X comme suit :

$$X^*(\omega) = (X(\omega))^* \text{ pour chaque } \omega \in \Omega.$$

Proposition (1.2). *Étant donnée une *-algèbre symétrique* E, *l'ensemble des é.a. à valeurs dans* E *est une *-algèbre.*

Démonstration : Évidemment l'ensemble des *é.a.* à valeurs dans E est une algèbre complexe. De plus, si X est un *é.a.* à valeurs dans E, alors en vertu de la relation $h(X^*(\omega)) = \overline{h(X(\omega))}$ (cf. [9], p. 23, Lemme 6.4) il résulte que X^* est un *é.a.*

Proposition (1.3). *Si la suite* $\{X_n\}$ $n \in N$ *des é.a. converge p.s. pour la topologie de la convergence simple dans* E, *vers la fonction* X, *alors* X *est un é.a.*

Démonstration : Par hypothèse nous avons :

$$h \circ X_n \xrightarrow{\text{P.S.}} h \circ X, \; n \uparrow \infty, \text{ pour chaque } h \in \mathcal{M}(E) \subset E'.$$

En vertu de la proposition 1.1 et de la définition 1.1 la fonction X est un *é.a.* à valeurs dans E.

Proposition 1.4. *Si* X *est un é.a. à valeurs dans l'algèbre topologique* E, *loc. m-convexe et* $\{\lambda_n\}$ $n \in N$ *est une suite de coefficients d'une série représentant une fonction entière, alors la série* $\sum_{n=1}^{k} \lambda_n X^n$ $(k \uparrow \infty)$ *converge* p.s. *pour la topologie de la convergence simple vers un é.a.* Y.

Démonstration : Soit l'*é.a.* X ; la somme $\sum_{n=1}^{k} \lambda_n X^n$ est aussi un *é.a.* En vertu du lemme ([8], p. 30, 7.7.c.) la suite des sommes $\sum_{n=1}^{k} \lambda_n . X^n$ $(k \uparrow \infty)$ tend pour la topologie de la convergence simple dans E vers une fonction Y et en vertu de la proposition 1.3 la fonction Y est un *é.a.*

Proposition 1.5. *Soit* E *une f-algèbre full séparable, loc. m-convexe et* $\mathscr{M}(E)$ *son spectre. Soit encore l'é.a.* $X : \Omega \to E$. *Alors, il existe une famille* $(P_i)\ i \in I$ *de semi-normes sous-multiplicatives définissant la topologie de* E, *qui est donnée par la relation* (0.4), *telle que l'application* $P_i \circ X : \Omega \to \mathbb{R}_+,\ i \in I$ *est mesurable, c'est-à-dire* $P_i(X)$ *est une variable aléatoire réelle pour chaque* $i \in I$.

Démonstration : Soit $\{U_i\}\ i \in I$ une famille de sous-ensembles équicontinus de $\mathscr{M}(E)$. L'algèbre E est une f-algèbre séparable, par conséquent chaque sous-ensemble équicontinu du spectre $\mathscr{M}(E)$ est métrisable de type dénombrable. Alors la relation (0.4) peut s'écrire :

$$P_i(X) = \sup_{h \in U_i} |\, h(X) \,| = \sup_{h \in A_i} |\, h(X) \,|,$$

où A_i est un sous-ensemble dénombrable partout dense de U_i.

Donc, la semi-norme $P_i(X)$ est une fonction mesurable pour chaque $i \in I$. (cf. [8], Prop. 2.2).

Soit E une algèbre topologique m-convexe et $\mathscr{M}(E)$ son spectre.

a) Soit $\mathscr{B}_\tau$ la σ-algèbre sur E engendrée par les ouverts de E, c'est-à-dire $\mathscr{B}_\tau$ est définie par les conditions suivantes :

i) $E \in \mathscr{B}_\tau$, $\varnothing \in \mathscr{B}_\tau$; ii) Si $A \in \mathscr{B}_\tau \Rightarrow \complement_E A \in \mathscr{B}_\tau$ et iii) Si $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{B}_\tau \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathscr{B}_\tau$.

Évidemment les conditions i), ii), iii) entraînent les suivantes :

iv) Si $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{B}_\tau \Rightarrow \bigcap_n A_n \in \mathscr{B}_\tau$; v) La σ-algèbre $\mathscr{B}_\tau$ contient les fermés de la topologie définie sur E.

b) Sur E on considère les ensembles de la forme :

$$A = \{x : (h_1(x), h_2(x), \ldots, h_n(x)) \in B\},$$

où B est un ensemble de Borel arbitraire sur $\mathbb{C}^n$ et $h_1, h_2, \ldots, h_n \in \mathscr{M}(E)$. Les ensembles de la forme A s'appellent *cylindriques* et forment une algèbre d'ensembles, soit $\mathscr{L}_{\mathscr{M}(E)}$.

La σ-algèbre qui est engendrée par $\mathscr{L}_{\mathscr{M}(E)}$ est l'algèbre $\mathscr{O}_{\mathscr{M}(E)}$.

En général entre les algèbres qui sont définies ci-dessus existe la relation suivante :

$$\mathscr{L}_{\mathscr{M}(E)} \subset \mathscr{O}_{\mathscr{M}(E)} \subset \mathscr{B}_\tau \quad \text{(cf. [1], p. 29).} \tag{1.2}$$

Proposition 1.6. *Soit* E *une f-algèbre full séparable. La σ-algèbre* $\mathscr{O}_{\mathscr{M}(E)}$ *contient une base de la topologie définie sur* E.

Démonstration : Soit une famille d'ensembles ouverts de l'algèbre E :

$$V_{i,\alpha} = \{x : P_i(x) < \alpha\}$$

ou

$$V_{i,\alpha} = \{x : \sup_{h \in U_i \subseteq \mathscr{M}(E)} | h(x) | < \alpha\} \text{ où } \{U_i\}, i \in I$$

c'est une famille de sous-ensembles équi-continus du spectre $\mathscr{M}(E)$. Comme l'algèbre est séparable il existe un sous-ensemble A_i, $i \in I$ dénombrable partout dense dans U_i tel que nous ayons :

$$\sup_{h \in U_i} | h(x) | = \sup_{h \in A_i} | h(x) |, i \in I.$$

Alors, $V_{i,\alpha} = \{x : \sup_{h \in A_i} | h(x) | < \alpha\} = \bigcap_{h \in A_i} \{x : | h(x) | < \alpha\} \in \mathcal{O}_{\mathscr{M}(E)}$.

Corollaire 1.1. *Pour l'algèbre* E *de la proposition* 1.6 *nous avons* : $\mathcal{O}_{\mathscr{M}(E)} = \mathscr{B}_\tau$.

Démonstration : L'algèbre $\mathcal{O}_{\mathscr{M}(E)}$ contient une base de la topologie définie sur E (cf. Prop. 1.6).

Comme chaque ouvert de E est une réunion dénombrable d'éléments de base, on conclut que $\mathcal{O}_{\mathscr{M}(E)}$ contient tous les ouverts de E, alors $\mathscr{B}_\tau \subset \mathcal{O}_{\mathscr{M}(E)}$.

Aussi nous avons $\mathcal{O}_{\mathscr{M}(E)} \subset \mathscr{B}_\tau$ (cf. relation 1.2).

Donc, $\mathcal{O}_{\mathscr{M}(E)} = \mathscr{B}_\tau$.

Sur l'algèbre E on introduit une mesure de Borel P par la relation suivante :

$$P_X(\tau) = p(X^{-1}(\tau) \text{ pour chaque } \tau \in \mathcal{O}_{\mathscr{M}(E)}. \tag{1.3}$$

On dit que la mesure P_X sur $\mathcal{O}_{\mathscr{M}(E)}$ détermine la *loi* de l'*é.a.* X à valeurs dans E.

Il est bien connu que, à chaque *é.a.* X correspond l'*é.a.* X^* (involution de X).

Soit l'ensemble $\tau^* = \{x^* : x \in \tau\}$, où $\tau \in \mathcal{O}_{\mathscr{M}(E)}$.

Comme nous avons $h(x^*) = \overline{h(x)}$, il résulte que $\tau^* \in \mathcal{O}_{\mathscr{M}(E)}$.

Alors, la loi de X^* est donnée par la relation :

$$\overline{P}_{X^*}(\tau) = p(X^{*-1}(\tau), \tau \in \mathcal{O}_{\mathscr{M}(E)}.$$

Proposition 1.7. *Pour les mesures* P_X *et* P_{X^*} *nous avons*

$$\overline{P}_{X^*}(\tau^*) = P_X(\tau) \Leftrightarrow \overline{P}_{X^*}(\tau) = P_X(\tau^*).$$

Démonstration : On peut poser $X^* = g \circ X$, où g est une application canonique de E dans E.

Évidemment, $g(\tau) = \tau^* \Leftrightarrow g^{-1}(\tau^*) = \tau$.

Alors, $\overline{P}_{X^*}(\tau^*) = p(X^{*-1}(\tau^*) = p\,[X^{-1}(g^{-1}(\tau^*))] = p(X^{-1}(\tau)) = P_X(\tau)$.

Si on remplace le τ^* par τ on a : $\overline{P}_{X^*}(\tau) = P_X(\tau^*)$.

Définition 1.2. *On dit qu'une mesure* P *sur* E *est compacte* (ou de Radon, ou tendue) *s'il existe, pour chaque* $\varepsilon > 0$, *un compact* $K_\varepsilon \subset E$ *tel que nous ayons* : $P(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$.

Proposition 1.8. *Soit* E *une f-algèbre full séparable. Alors la mesure* P_X *est* σ*-additive et compacte.*

Démonstration : i) En effet, soit $A_n \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}(E)}$ une suite d'ensembles deux à deux disjoints. Nous avons :

$$P_X(\bigcup_n A_n) = p(X^{-1}(\bigcup_n A_n)) = p(\bigcup_n X^{-1}(A_n)) = \sum_n p(X^{-1}(A_n)) = \sum_n P_X(A_n).$$

ii) En vertu du corollaire 1.1 nous avons $\mathcal{B}_\tau = \mathcal{O}_{\mathcal{M}(E)}$.

La mesure introduite sur $\mathcal{O}_{\mathcal{M}(E)}$ est aussi une mesure sur $\mathcal{B}_\tau$. L'algèbre E est une f-algèbre séparable, alors si on applique le théorème 3.2, p. 29 de [12] la mesure sur l'algèbre $\mathcal{O}_{\mathcal{M}(E)}$ est compacte.

§ 2. LIMITE PROJECTIVE D'ÉLÉMENTS ALÉATOIRES

Par définition une B*-algèbre est une algèbre de Banach avec involution telle que nous ayons $\| XX^* \| = \| X \|^2$.

Soit E une algèbre complète, localement m-convexe. Il est bien connu que E peut être considérée comme la limite projective d'une famille (E_α), $\alpha \in I$ de B*-algèbres, c'est-à-dire $E = \varprojlim_\alpha E_\alpha$ (cf. [9], p. 17, Remark).

Sur E_α on considère la classe $\mathcal{R}_\alpha$ des sous-ensembles de la forme :

$$\tau_\alpha = \{x_\alpha : \mathrm{Re}\, h_\alpha(x_\alpha) < a, \mathrm{Im}\, h_\alpha(x_\alpha) < b, \text{ pour } a, b \in \mathbb{R} \text{ et } h_\alpha \in \mathcal{M}(E_\alpha)\}$$

Soit $\mathcal{O}_{\mathcal{M}(E_\alpha)}$ la σ-algèbre sur E qui est engendrée par cette classe $\mathcal{R}_\alpha$.

Remarque : En particulier, pour les algèbres de Banach, chaque caractère h_α de l'algèbre E_α peut être remplacé par l'idéal maximal M_α de E_α (cf. [11], § 11, 1-2).

Par analogie à la définition (1.1), l'application $X_\alpha : \Omega \to E_\alpha$ est mesurable (*é.a.*) si pour chaque $h_\alpha \in \mathcal{M}(E_\alpha)$ la fonction $h_\alpha \circ X_\alpha$ est mesurable, ou ce qui est équivalent la fonction $X_\alpha(M_\alpha)$ est une variable aléatoire (*v.a.*).

Proposition 2.1. *La projection canonique* $f_\alpha : E \to E_\alpha$ *est une application* $(\mathcal{O}_{\mathcal{M}(E)} - \mathcal{O}_{\mathcal{M}(E_\alpha)})$*-mesurable.*

Démonstration : On considère l'ensemble de sous-ensembles :

$$\{A_\alpha \subseteqq E_\alpha : f_\alpha^{-1}(A_\alpha) \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}(E)}\}.$$

On dit que cet ensemble est une σ-algèbre soit $\mathcal{B}_\alpha$.

En effet : Si $A_\alpha, B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ nous aurons

$$f_\alpha^{-1}(A_\alpha \setminus B_\alpha) = f_\alpha^{-1}(A_\alpha) \setminus f_\alpha^{-1}(B_\alpha) \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}(E)}$$

Aussi $f_\alpha^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\alpha_n}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_\alpha^{-1}(A_{\alpha_n}) \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}(E)}$

Alors, $f_\alpha^{-1}(\mathcal{B}_\alpha) \subseteqq \mathcal{O}_{\mathcal{M}(E)}$.

Soit un élément $A_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$ nous avons :

$$\begin{aligned} f_\alpha^{-1}(A_\alpha) &= \{x \in E : \mathrm{Re}\, h_\alpha(x_\alpha) < a, \mathrm{Im}\, h_\alpha(x_\alpha) < b\,;\ a, b \in \mathbb{R} \text{ et } h_\alpha \in \mathcal{M}(E_\alpha)\} \\ &= \{x \in E : \mathrm{Re}\, \underbrace{h_\alpha \circ f_\alpha}_{\substack{\text{caractère} \\ \text{de E}}}(x) < a, \mathrm{Im}\, \underbrace{h_\alpha \circ f_\alpha}_{\substack{\text{caractère} \\ \text{de E}}}(x) < b\} \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}(E)}. \end{aligned}$$

Nous avons encore que : $\mathscr{R}_\alpha \subseteq \mathscr{B}_\alpha$ et par conséquent la σ-algèbre engendrée par $\mathscr{R}_\alpha$ c'est-à-dire l'algèbre

$$\mathcal{O}_{\mathscr{M}(\mathrm{E}_\alpha)} \subseteq \mathscr{B}_\alpha. \text{ Alors, } f_\alpha^{-1}(\mathcal{O}_{\mathscr{M}(\mathrm{E}_\alpha)}) \subseteq f_\alpha^{-1}(\mathscr{B}_\alpha) \subseteq \mathcal{O}_{\mathscr{M}(\mathrm{E})}. \text{ c.q.f.d.}$$

Soit (X_α), $\alpha \in \mathrm{I}$ une famille d'*é.a.* à valeurs dans les algèbres de Banach E_α, c'est-à-dire :

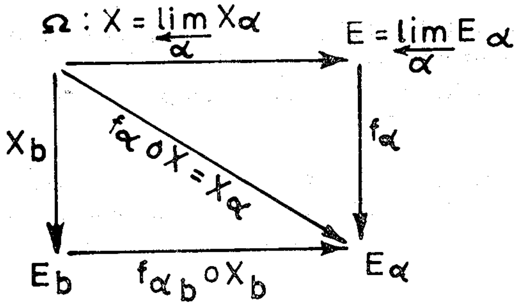
$$\mathrm{X}_\alpha : (\Omega, \mathcal{O}) \rightarrow (\mathrm{E}_\alpha, \mathcal{O}_{\mathscr{M}(\mathrm{E}_\alpha)}), \alpha \in \mathrm{I}.$$

On suppose que la famille ci-dessus forme un système projectif d'applications, c'est-à-dire

$$f_{\alpha b} \circ \mathrm{X}_b = \mathrm{X}_\alpha, \text{ si } \alpha < b \text{ et } \alpha, b \in \mathrm{I}.$$

Il est bien connu qu'il existe une seule application X de Ω dans $\mathrm{E} = \varprojlim_\alpha \mathrm{E}_\alpha$ qui s'appelle *limite projective* des fonctions mesurables X_α — on la note $\mathrm{X} = \varprojlim_\alpha \mathrm{X}_\alpha$ — telle que, pour chaque application canonique f_α nous ayons :

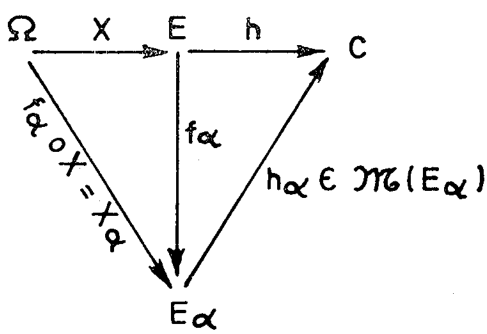
$$f_\alpha \circ \mathrm{X} = \mathrm{X}_\alpha \text{ (cf. [3], ch. 2, p. 126).}$$



Proposition 2.2. Les propositions suivantes sont équivalentes.
1) *La fonction* $h \circ \mathrm{X}$ *est une v.a. pour chaque* $h \in \mathscr{M}(\mathrm{E})$.
2) *La fonction* $h_\alpha \circ \mathrm{X}_\alpha$ *est une v.a. pour chaque* $h_\alpha \in \mathscr{M}(\mathrm{E}_\alpha)$.

Démonstration : 1) $\Rightarrow$ 2). En effet, nous avons que

$$h_\alpha \circ \mathrm{X}_\alpha = h_\alpha \circ (f_\alpha \circ \mathrm{X}) = (h_\alpha \circ f_\alpha) \circ \mathrm{X}.$$



La fonctionnelle h_α est un caractère d'algèbre E_α et la fonction f_α est l'application canonique de E dans E_α. Alors, $h_\alpha \circ f_\alpha$ est un homomorphisme continu de E_α à valeurs dans $\mathbb{C}$ et par suite $(h_\alpha \circ f_\alpha) \circ X$ est toujours une *v.a.*

2) $\Rightarrow$ 1). Il est bien connu (cf. [4], p. 28, Prop. 7.5) que,

$$\mathscr{M}(E) = \bigcup_{\alpha \in I} (\mathscr{M}(E) \cap U_\alpha^0), \tag{2.1}$$

où U_α^0 est le polaire d'une voisinage de zéro dans E. De la relation (2.1) résulte que, pour chaque $h \in \mathscr{M}(E)$ il existe au moins un $\alpha \in I$ tel que $h \in \mathscr{M}(E) \cap U_\alpha^0$. Alors à chaque $h \in \mathscr{M}(E) \cap U_\alpha^0$ (et par conséquent $h \in U_\alpha^0$) correspond aussi un $h_\alpha \in \mathscr{M}(E_\alpha)$ tel que nous ayons :

$$h(x) = h_\alpha(x_\alpha) \text{ pour chaque } x \in E.$$

Donc, nous avons :

$$h(X(\omega)) = h_\alpha(X_\alpha(\omega)) = (h_\alpha \circ X_\alpha)(\omega). \tag{2.2}$$

En vertu des précédentes, pour chaque $h \in \mathscr{M}(E)$ correspond au moins un $h_\alpha \in \mathscr{M}(E_\alpha)$ tel que nous ayons

$$h \circ X = h_\alpha \circ X_\alpha \text{ pour chaque } \omega \in \Omega. \tag{2.3}$$

La deuxième partie de l'égalité (2.3) est par hypothèse une *v.a.*, par conséquent et la première partie est une *v.a.*

Une expression équivalente de la deuxième partie de la proposition 2.2 est la suivante :

Proposition 2.3 *Soit la famille* $(X_\alpha)\ \alpha \in I$ *des é.a. à valeurs dans la famille des* B*-*algèbres de Banach* $(E_\alpha)\ \alpha \in I$ *respectivement. On suppose que cette famille forme un système projectif, soit* $X = \varprojlim_\alpha X_\alpha$. *Alors* X *est un é.a. à valeurs dans* $E = \varprojlim_\alpha E_\alpha$.

Proposition 2.4. *Soit* E *une algèbre topologique loc. m-convexe avec élément unité. On suppose que la suite des é.a.* $X_n \xrightarrow{P.S.} X$ $(n \uparrow \infty)$. *Alors pour chaque* $a \in I$ *la suite* $(f_\alpha \circ X_n)_{n \in N} = ((X_\alpha)_n)_{n \in N}$ *converge dans l'algèbre de Banach* E_α *vers l'é.a.* $f_\alpha \circ X = X_\alpha$.

RÉCIPROQUEMENT : *Soit* i) *Pour chaque* $a \in I$ *la suite* $((X_\alpha)_n)_{n \in N}$ *des é.a. converge dans* E_α *vers un é.a.* X_α. ii) *Les é.a.* $(X_\alpha)_n\ \alpha \in I$ *forment un système projectif d'applications de* Ω *dans les algèbres de Banach* E_α, *soit* $\varprojlim_\alpha (X_\alpha)_n = X_n$ *et* $\varprojlim_\alpha X_\alpha = X$. *Alors pour la topologie de la convergence simple dans* E *nous avons*

$$\lim_n \varprojlim_\alpha (X_\alpha)_n \overset{P.S.}{=} X.$$

Démonstration : Pour chaque $h_\alpha \in \mathscr{M}(E_\alpha)$ on a :

$$\begin{aligned} h_\alpha \circ (X_\alpha)_n - h_\alpha \circ X_\alpha &= h_\alpha \circ f_\alpha \circ X_n - h_\alpha \circ f_\alpha \circ X \\ &= \underbrace{(h_\alpha \circ f_\alpha)}_{\substack{\text{caractère} \\ \text{de E}}} \circ X_n - \underbrace{(h_\alpha \circ f_\alpha)} \circ X \to 0,\ n \uparrow \infty \end{aligned}$$

(cf. aussi Remarque 4.1).

Réciproquement : Pour chaque $h \in \mathscr{M}(E)$ il existe un $h_\alpha \in \mathscr{M}(E_\alpha)$ tel que nous ayons :

$$h \circ X_n - h \circ X = h_\alpha \circ (X_\alpha)_n - h_\alpha \circ X_\alpha$$

Par conséquent on a :

$$X_n \xrightarrow{P.S.} X \Leftrightarrow \lim_n \lim_{\overleftarrow{\alpha}} (X_\alpha)_n \overset{P.S.}{=} X,\ n \uparrow \infty.$$

Soit E une algèbre topologique loc. m-convexe, donc $E = \lim\limits_{\overleftarrow{\alpha}} E_\alpha$, E_α sont B*-algèbres de Banach. Pour chaque $a \in I$ sur $\mathcal{O}_{\mathscr{M}(E_\alpha)}$ on peut par analogie à § 1 (formule 1.3) introduire une mesure de Borel P_α par la relation

$$P_{X_\alpha}(\tau_\alpha) = P_\alpha(\tau_\alpha) = p(X_\alpha^{-1}(\tau_\alpha)),\ \text{où}\ \tau_\alpha \in \mathcal{O}_{\mathscr{M}(E_\alpha)}.$$

Proposition 2.5. *Pour chaque* $a \in I$ *nous avons* $P_\alpha = P \circ f_\alpha^{-1}$.

Démonstration : Soit un $\tau_\alpha \in \mathcal{O}_{\mathscr{M}(E_\alpha)}$, nous avons

$$\begin{aligned} P_\alpha(\tau_\alpha) = p(X_\alpha^{-1}(\tau_\alpha)) = p(X^{-1} \circ f_\alpha^{-1}(\tau_\alpha)) &= p(X^{-1}(\tau)) \\ &= P(\tau) \\ &= P(f_\alpha^{-1}(\tau_\alpha)). \end{aligned}$$

Donc, $P_\alpha = P \circ f_\alpha^{-1}$.

Proposition 2.6. *Si la suite* (P_n) $n \in N$ *des mesures des probabilités sur* E *converge faiblement vers la mesure* P — c'est-à-dire pour chaque fonction g continue et bornée définie sur E à valeurs complexes nous avons $\int_E g(x)dP_n(x) \to \int_E g(x)dP(x)$, $n \uparrow \infty$ — *alors pour chaque* $a \in I$ *sur* E_α *nous avons* $(P_\alpha)_n \xrightarrow{\text{faibl.}} P_\alpha$, $n \uparrow \infty$.

Démonstration : Pour chaque $\tau_\alpha \in \mathcal{O}_{\mathscr{M}(E_\alpha)}$ il existe sur $\mathcal{O}_{\mathscr{M}(E)}$ une probabilité P telle que $P_\alpha(\tau_\alpha) = P(f_\alpha^{-1}(\tau_\alpha))$.

Alors, pour chaque fonction g_α continue et bornée on a

$$\int_{E_\alpha} g_\alpha(x_\alpha)dP_{\alpha_n}(\tau_\alpha) = \int_E g_\alpha \circ f_\alpha(x)dP_n(f_\alpha^{-1}(\tau_\alpha)) \to 0,\ n \uparrow \infty.$$

§ 3. ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE

Soit l'*é.a.* X à valeurs dans l'algèbre topologique E. On dit que cet *é.a.* est *scalairement intégrable* si, pour chaque $h \in \mathscr{M}(E)$, il existe l'espérance mathématique $E(h \circ X)$ de la *v.a.* numérique $h \circ X$.

Définition 3.1. *Si l'é.a.* X *est scalairement intégrable et s'il existe dans* E *un élément, soit* EX, *tel que* $h(EX) = E(h \circ X)$ *pour chaque* $h \in \mathscr{M}(E)$, *l'élément* EX *s'appelle espérance mathématique de l'é.a.* X.

On démontre facilement la proposition suivante :

Proposition 3.1. *Si les espérances mathématiques* EX, EY *existent, alors* $E(aX + bY)$ *existe, pour chaque* $a, b \in \mathbb{C}$ *et on a* : $E(aX + bY) = a \cdot EX + b \cdot EY$.

Proposition 3.2. *Si* X^* *est l'involution de l'intégrable é.a.* X, *alors nous avons* $EX^* = (EX)^*$.

Il suffit de regarder : $h(x^*) = \overline{h(x)}$.

Proposition 3.3 *Soit* $(X_\alpha)\ \alpha \in I$ *une famille d'é.a. à valeurs dans les algèbres séparables de Banach* E_α. *On suppose que* : 1° *Cettte famille forme un système projectif, soit* $X = \underset{\overleftarrow{\alpha}}{\lim} X_\alpha$, 2° *La famille des espérances mathématiques* $(EX_\alpha)\ \alpha \in I$ *existe. Alors nous avons* :

$$EX = \underset{\overleftarrow{\alpha}}{\lim} EX_\alpha = \underset{\overleftarrow{\alpha}}{\lim} E(f_\alpha \circ X).$$

Cette proposition est une application immédiate du corollaire (cf. [1], cf. II, p. 52).

Proposition 3.4. *Pour chaque* $h \in \mathcal{M}(E)$ *il existe un (au moins)* $h_\alpha \in \mathcal{M}(E_\alpha)\ \alpha \in I$, *tel que nous ayons*

$$h(EX) = h_\alpha(EX_\alpha) = h_\alpha \circ f_\alpha(EX).$$

Démonstration : Il est bien connu que pour chaque $h \in \mathcal{M}(E) \cap U_\alpha^0$ correspond un (au moins) $h_\alpha \in \mathcal{M}(E_\alpha)$ tel que nous ayons $h(x) = h_\alpha(x_\alpha)$. Alors, si on remplace X par EX on reçoit : $h(EX) = h_\alpha((EX)_\alpha) = h_\alpha \circ f_\alpha(EX)$.

Proposition 3.5. *Soit* E *une f-algèbre full séparable. On suppose que* $EP_i(X) < +\infty$, *pour chaque* $i \in I$. *Alors pour les semi-normes nous avons* $P_i(EX) \leqq EP_i(X)$, $i \in I$.

Démonstration : Par définition de l'espérance mathématique nous avons $h(EX) = E(h \circ X)$ pour chaque $h \in \mathcal{M}(E)$, ou

$$|h(EX)| \leqq E\,|h \circ X|. \tag{4.1}$$

Soit U_i $i \in I$, une famille de sous-ensembles équicontinus du spectre $\mathcal{M}(E)$. Comme nous avons une f-algèbre full séparable, à chaque sous-ensemble U_i équicontinu du spectre, il existe un sous-ensemble $A_i \subset U_i$ $i \in I$ dénombrable partout dense à U_i tel que nous ayons $P_i(X) = \sup\limits_{h \in U_i \subseteqq \mathcal{M}(E)} |h \circ X| = \sup\limits_{h \in A_i} |h \circ X|$.

Alors de la relation (4.1) on a :

$$\sup_{h \in A_i} |h(EX)| \leqq \sup_{h \in A_i} E\,|h \circ X| \leqq E \sup_{h \in A_i} |h \circ X|, \text{ ou } P_i(EX) \leqq EP_i(X).$$

§ 4. INDÉPENDANCE FAIBLE

Définition 4.1. *On dit que deux é.a.* X, Y *à valeurs dans l'algèbre topologique* E *sont faiblement indépendants, si, et seulement si, les v.a. numériques* $h \circ X$, $h \circ Y$ *sont indépendantes.*

Proposition 4.1. *Si les é.a.* X, Y *à valeurs dans l'algèbre topologique* E *sont faiblement indépendants et les espérances mathématiques* EX, EY, $E(X \cdot Y)$ *existent, alors nous avons*

$$E(X \cdot Y) = EX \cdot EY.$$

Démonstration : Par définition de l'espérance mathématique nous avons : $h(\mathrm{E}(\mathrm{X}\,.\,\mathrm{Y})) = \mathrm{E}(h \circ (\mathrm{X}\,.\,\mathrm{Y})) = \mathrm{E}(h \circ \mathrm{X}\,.\,h \circ \mathrm{Y}) = \mathrm{E}(h \circ \mathrm{X})\,.\,\mathrm{E}(h \circ \mathrm{Y}) =$
$= h(\mathrm{EX})\,.\,h(\mathrm{EY}) = h(\mathrm{EX}\,.\,\mathrm{EY})$.

Donc, $\mathrm{E}(\mathrm{X}\,.\,\mathrm{Y}) = \mathrm{EX}\,.\,\mathrm{EY}$.

Remarque 4.1. Soit l'algèbre topologique E avec élément unité $e \in \mathrm{E}$. Soit $f_\alpha(e) = e_\alpha$. *On dit que* e_α *est l'élément unité de* E_α.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[dr, "h_\alpha \circ f_\alpha \in \mathcal{M}(E)"'] & E_\alpha \arrow[d, "h_\alpha"] \\
& C
\end{tikzcd}$$

En effet : $e_\alpha\,.\,\mathrm{X}_\alpha = f_\alpha(e\,.\,\mathrm{X}) = f_\alpha(\mathrm{X}) = \mathrm{X}_\alpha$.
Soit encore l'homomorphisme continu $h_\alpha \circ f_\alpha$. Nous avons,

$$h_\alpha \circ f_\alpha(e) = h_\alpha(f_\alpha(e)) = h_\alpha(e_\alpha) = 1.$$

Alors les $h_\alpha \circ f_\alpha$, $\alpha \in \mathrm{I}$ constituent des caractères de l'algèbre E.

Proposition 4.2. *Si les é.a.* X, Y *à valeurs dans l'algèbre topologique* E, *complète, loc. m-convexe avec élément unité* ($\mathrm{E} = \varprojlim_{\alpha} \mathrm{E}_\alpha$, où E_α sont B*-algèbres de Banach et $\alpha \in \mathrm{I}$) *sont faiblement indépendants, alors les é.a.* X_α, Y_α « projections » *des* X, Y *à valeurs dans* E_α *sont faiblement indépendants*.

Démonstration : Nous avons que :

$$\mathrm{X}_\alpha = f_\alpha \circ \mathrm{X}$$

$$\mathrm{Y}_\alpha = f_\alpha \circ \mathrm{Y}, \text{ pour chaque } \alpha \in \mathrm{I}. \tag{4.1}$$

De la relation (4.1) nous avons :

$$h_\alpha \circ \mathrm{X}_\alpha = (h_\alpha \circ f_\alpha) \circ \mathrm{X}$$

$$h_\alpha \circ \mathrm{Y}_\alpha = (h_\alpha \circ f_\alpha) \circ \mathrm{Y}, \text{ pour chaque } h_\alpha \in \mathcal{M}(\mathrm{E}_\alpha). \tag{4.2}$$

En vertu de la remarque 4.1 l'homomorphisme $h_\alpha \circ f_\alpha$ est un caractère de l'algèbre E_α, alors les *v.a.* $h_\alpha \circ \mathrm{X}_\alpha$, $h_\alpha \circ \mathrm{Y}_\alpha$ sont faiblement indépendantes.

Proposition 4.3. *Soient* (X_α) *et* (Y_α) $\alpha \in \mathrm{I}$ *deux familles des é.a. à valeurs dans les algèbres de Banach* E_α, $\alpha \in \mathrm{I}$. *On suppose que* :

i) *Leurs éléments sont mutuellement indépendants.*

ii) *Chaque famille forme un système projectif d'applications.*

Alors, les é.a. $X = \varprojlim_{\alpha} X_\alpha$ *et* $Y = \varprojlim_{\alpha} Y_\alpha$ *à valeurs dans l'algèbre* $E = \varprojlim_{\alpha} E_\alpha$ *sont faiblement indépendants.*

Démonstration : Il est bien connu que, pour chaque $h \in \mathcal{M}(E)$ il existe un (au moins) $\alpha \in I$ tel que nous ayons :

$$h \circ X = h_\alpha \circ X_\alpha$$

$$h \circ Y = h_\alpha \circ Y_\alpha$$

Les *v.a.* $h_\alpha \circ X_\alpha$, $h_\alpha \circ Y_\alpha$ sont mutuellement indépendantes, alors les *é.a.* $X = \varprojlim_{\alpha} X_\alpha$ et $Y = \varprojlim_{\alpha} Y_\alpha$ sont faiblement indépendants.

Proposition 4.4. *Soit* E *une f-algèbre full séparable et les é.a.* X, Y *à valeurs dans* E *qui sont faiblement indépendants. Alors nous avons :*

$$EP_i(X \,.\, Y) \leqq EP_i(X) \,.\, EP_i(Y),\ i \in I.$$

Démonstration : Nous avons : (cf. démonstr. prop. 3.5).

$$EP_i(X \,.\, Y) = E \sup_{h \in A_i \subseteq \mathcal{M}(E)} |\, h(X \,.\, Y) \,| = \sup_{h \in A_i} E \,|\, (h \circ X) \,.\, (h \circ Y) \,|$$

$$= \sup_{h \in A_i} (E \,|\, h \circ X \,| \,.\, E \,|\, h \circ Y \,|) \leqq (\sup_{h \in A_i} E \,|\, h \circ X \,|) \,.\, (\sup_{h \in A_i} E \,|\, h \circ Y \,|)$$

$$= (E \sup_{h \in A_i} |\, h \circ X \,|) \,.\, (E \sup_{h \in A_i} |\, h \circ Y \,|) = EP_i(X) \,.\, EP_i(Y),\ i \in I.$$

Proposition 4.5. (Loi des grands nombres). *Soit* E *une f-algèbre full séparable et une suite* $(X_j), j \in N$ *d'é.a. à valeurs dans* E, *mutuellement indépendants, ayant la même espérance mathématique, c'est-à-dire* $EX_j = m$ *et* $EP_i^2(X_j) < +\infty$ *pour chaque* $i \in I$ *et* $j \in N$.

Soit encore $S_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j$ *et* $S_n^* = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j^*$ (valeur moyenne).

Alors : i) $S_n \xrightarrow{P} m$, $n \uparrow \infty$. (Convergence en Probabilité)

ii) $S_n^* \xrightarrow{P} m^*$, $n \uparrow \infty$

iii) $S_n \,.\, S_n^* \xrightarrow{P} m \,.\, m^*$ *si,* $EP_i^2(X_j \,.\, X_k^*) < \infty$ *pour chaque* $j, k \in N$, $i \in I$ *et* $n \uparrow \infty$.

Démonstration : i) Pour chaque $h \in \mathcal{M}(E)$ nous avons :

$$E(|\, h(S_n - m) \,|^2) = E\{h(S_n - m) \,.\, h(S_n^* - m^*)\}$$

$$= E\left\{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} h(X_k - m) \,.\, \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} h(X_j^* - m^*)\right\}$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{k,j}^{n^2} E\{h(X_k - m) \,.\, h(X_j^* - m^*)\}. \tag{4.1}$$

Si $k \neq j$ on a : $E\{h(X_k - m) \,.\, h(X_j^* - m^*) = Eh(X_k - m) \,.\, Eh(X_j^* - m^*) = 0.$

Par conséquence l'égalité (4.1) s'écrit

$$\mathrm{E}(|\, h(\mathrm{S}_n - m)\, |^2) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \mathrm{E}\{h(\mathrm{X}_j - m) \cdot h(\mathrm{X}_j^* - m^*)\}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \mathrm{E}\, |\, h(\mathrm{X}_j - m)\, |^2 \tag{4.2}$$

Alors de la relation (4.2) nous avons

$$\mathrm{E} \sup_{h_i \in \mathrm{A}_i \subseteq \mathscr{M}(\mathrm{E})} |\, h_i(\mathrm{S}_n - m)\, |^2 = \frac{1}{n} \cdot \mathrm{E} \sup_{h_i \in \mathrm{A}_i} |\, h_i(\mathrm{X}_j - m)\, |^2 \quad \text{ou}$$

$$\mathrm{EP}_i^2(\mathrm{S}_n - m) = \frac{1}{n} \cdot \mathrm{EP}_i^2(\mathrm{X}_j - m). \tag{4.3}$$

L'inégalité de Tchebychev donne

$$\mathrm{P}\{\omega : \mathrm{P}_i(\mathrm{S}_n - m) > \varepsilon\} \leqq \frac{\mathrm{EP}_i^2(\mathrm{S}_n - m)}{\varepsilon^2} = \frac{\mathrm{EP}_i^2(\mathrm{X}_j - m)}{n \cdot \varepsilon^2} \to 0 \quad n \uparrow \infty.$$

Donc, $\mathrm{S}_n \xrightarrow{\mathrm{P}} m$.

ii) En vertu de la relation $\mathrm{P}_i(\mathrm{X}) = \mathrm{P}_i(\mathrm{X}^*)$, $i \in \mathrm{I}$ nous avons le deuxième résultat.

iii) Nous savons que : $\mathrm{S}_n \cdot \mathrm{S}_n^* = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k,j}^{n^2} \mathrm{X}_k \cdot \mathrm{X}_j^*$.

Il est facile de démontrer que :

$$\mathrm{E}\, |\, h(\mathrm{S}_n \cdot \mathrm{S}_n^* - m \cdot m^*)\, |^2 = \frac{1}{n} \cdot \mathrm{E}\, |\, h(\mathrm{X}_j \cdot \mathrm{X}_j^* - m \cdot m^*)\, |^2$$

et

$$\mathrm{EP}_i^2(\mathrm{S}_n \cdot \mathrm{S}_n^* - m \cdot m^*) = \frac{1}{n} \cdot \mathrm{EP}_i^2(\mathrm{X}_j \cdot \mathrm{X}_j^* - m \cdot m^*)$$

L'inégalité de Tchebychev donne

$$\mathrm{P}\{\omega : \mathrm{P}_i(\mathrm{S}_n \cdot \mathrm{S}_n^* - m \cdot m^*) > \varepsilon\} \leqq \frac{\mathrm{EP}_i^2(\mathrm{X}_j \cdot \mathrm{X}_j^* - m \cdot m^*)}{n \cdot \varepsilon^2}$$

Donc, $\mathrm{S}_n \cdot \mathrm{S}_n^* \xrightarrow{\mathrm{P}} m \cdot m^*$, si $n \uparrow \infty$.

§ 5. PRODUIT TENSORIEL DE DEUX ÉLÉMENTS ALÉATOIRES

Soient les *é.a.* X, Y à valeurs dans les algèbres topologiques E, F commutatives loc.m-convexes respectivement. On considère l'application

$$\mathrm{Z} : \Omega \to \mathrm{E} \otimes \mathrm{F}$$

qui est définie par la relation

$$\mathrm{Z}(\omega) = \mathrm{X}(\omega) \otimes \mathrm{Y}(\omega). \tag{5.1}$$

L'application (5.1) s'appelle *produit tensoriel* des deux *é.a.* X, Y et on la note $Z = X \otimes Y$.

Proposition 5.1. *L'application* (5.1) *est faiblement mesurable par rapport à l'algèbre topologique* $E \otimes F$.

Démonstration : Il est bien connu qu'il existe une bijection de $\mathcal{M}(E \otimes F)$ dans le produit cartésien $\mathcal{M}(E) \times \mathcal{M}(F)$ (cf. [7], p. 177, prop. 4.1) donc, chaque $h \in \mathcal{M}(E \otimes F)$ peut s'écrire sous la forme $h = f \otimes g$, où $f \in \mathcal{M}(E)$ et $g \in \mathcal{M}(F)$. Pour que la fonction $X \otimes Y$ soit mesurable, il faut et il suffit que, pour chaque $h \in \mathcal{M}(E \otimes F)$ la fonction $h \circ (X \otimes Y)$ soit une *v.a.* En effet nous avons :

$$h \circ (X \otimes Y) = (f \otimes g) \circ (X \otimes Y) = (f \circ X) \otimes (g \circ Y).$$

Alors, $h(X \otimes Y)(\omega) = f(X(\omega)) \,.\, g(Y(\omega))$ qui est mesurable (*v.a.*).

Proposition 5.2. *Si les é.a.* X, Y *à valeurs dans les algèbres topologiques* E, F *loc. m-convexes respectivement sont faiblement indépendants et si les espérances mathématiques* EX, EY, $E(X \otimes Y)$ *existent. Alors* $E(X \otimes Y) = (EX) \otimes (EY)$.

Démonstration : En vertu de la définition de l'espérance mathématique, pour chaque $h \in \mathcal{M}(E \hat{\otimes} F)$ nous avons

$$h(E(X \otimes Y)) = Eh(X \otimes Y). \tag{5.2}$$

Chaque $h \in \mathcal{M}(E \hat{\otimes} F)$ peut s'écrire sous la forme $h = f \otimes g$, où $f \in \mathcal{M}(E)$, $g \in \mathcal{M}(F)$ (cf. [1], p. 178, th. 4.2).

Par conséquence la relation (5.2) s'écrit

$$\begin{aligned} Eh(X \otimes Y) &= E(f \otimes g) \,.\, (X \otimes Y) = E(f \circ X) \,.\, (g \circ Y) \\ &= (Ef \circ X) \,.\, (Eg \circ Y) = f(EX) \,.\, g(EY) \\ &= (f \otimes g) \,.\, ((EX) \otimes (EY)) = h(EX \otimes EY) \end{aligned}$$

Alors, $E(X \otimes Y) = (EX) \otimes (EY)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ahmad, S., Les éléments aléatoires dans un espace vectoriel topologique, Thèse, Paris, 1963.

[2] Badrikian, A., Éléments aléatoires vectoriels et leurs fonctionnelles caractéristiques, Thèse, Paris, 1967.

[3] Bochner, S., Harmonic Analysis and the Theory of Probability. Univ. of California Press, Berkeley, 1960.

[4] Bourbaki, N., Algèbre, Ch. II, Herman, Paris, 1962.

[5] Grenander, U., Probabilities on algebraic Structures, Stockholm, 1963.

[6] Haïnis, J., Éléments aléatoires à valeurs dans une algèbre de Banach et Opérateurs aléatoires dans un espace de Hilbert, *Bull. Soc. Math. Grèce*, N. S. (1966), vol. 7, Fasc. 1-2.

[7] Hennequin, P. et Tortrat, A., Théorie des Probabilités et quelques Applications, Masson, Paris, 1965.

[8] Mallios, A., On the spectrum of a tensor product of locally convex algebras. *Math. Ann.* 154 (1964), 171-180.

[9] Mallios, A., A note on the multiplicative linear functionals and vector-valued random variables (à paraître).

[10] Michael, E., Localy multiplicatively convex topological algebras. *Mem. Amer. Math. Soc.*, N° 11 (1952).

[11] Mourier, E., Éléments aléatoires à valeurs dans un espace de Banach. *Ann. Inst. H. Poincaré*, 13 (1953), pp. 161-244.

[12] Naimark, M., Normed Rings, Noordhooff, Netherland, 1964.

[13] Parthasarathy, K., Probability Mesures on Metric Spaces, Academic Press, New York, 1967

Rue, 27 *Astypalaias*
Patissia
Athènes T. T. 805
Grèce