Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 38e année, nº 7-8, 1969, pp. 308-398

DEGRÉ TOPOLOGIQUE ET SOLUTIONS PÉRIODIQUES DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS NON LINÉAIRES

par JEAN MAWHIN
Institut d'Astrophysique
Université de Liège

Nous tenons à exprimer notre vive gratitude à Monsieur le Professeur P. Ledoux qui, après avoir orienté nos recherches vers le domaine de la mécanique non linéaire, n'a pas cessé de nous prodiguer de nombreux et fructueux conseils.

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 4

Analyse des équations déterminantes

Chapitre 5

Solutions périodiques d'équations différentielles non autonomes du type de Levinson

Chapitre 6

Solutions périodiques d'équations différentielles non linéaires et non autonomes du troisième ordre

INTRODUCTION

Dans de nombreux domaines de la mécanique, de l'astronomie, de la physique et de la technique, l'étude des phénomènes périodiques est d'une importance considérable. Lorsque les équations qui les régissent sont linéaires, l'existence de résultats sur la structure générale des solutions permet, du moins en principe, de résoudre le problème de la détermination des solutions périodiques. Il n'en est malheureusement pas de même pour les équations différentielles non linéaires.

C'est pour répondre aux besoins de la mécanique céleste qu'une première théorie des solutions périodiques des systèmes différentiels non linéaires fut établie par H. POINCARÉ [75, 76]. Les profondes recherches de ce savant, publiées pour la plupart entre 1880 et 1900 constituent encore une pierre d'angle pour de nombreux édifices théoriques actuels. Dès 1920, les travaux de B. VAN DER POL démontrèrent la nécessité de tenir compte de termes non linéaires dans les équations de certains circuits électriques, mais il fallut attendre 1929 pour que A. A. ANDRONOV fit le rapprochement entre les résultats de van der Pol et les théories de Poincaré. A partir de cette époque, et principalement en U.R.S.S., l'étude des phénomènes non linéaires s'érigea en discipline, sous le triple aspect théorique, numérique et expérimental, et prit le nom de mécanique non linéaire, de théorie des oscillations non linéaires ou encore de théorie qualitative des équations différentielles. On trouvera plus loin, en guise d'introduction aux différents chapitres, des données plus détaillées sur le développement des aspects particulièrement considérés dans ce travail.

On peut distinguer, dans l'étude des solutions périodiques des systèmes différentiels non linéaires, deux grands domaines qui se différencient à la fois par leur objet et par leurs méthodes. Le premier est consacré aux systèmes différentiels « voisins » d'un système dont on connaît les solutions périodiques ; ce dernier étant en général linéaire, on parlera souvent de systèmes quasi-linéaires ou faiblement non linéaires. Dans ce cas, nous disposons de plusieurs théories pour la détermination des solutions périodiques. Elles présentent entre elles de nombreux points communs et procèdent souvent des idées remarquables introduites par H. POINCARÉ [76] : en particulier, l'existence d'une solution périodique est toujours liée à celle d'une solution d'un système défini et à valeurs dans un espace de dimension finie, les équations de bifurcation.

Si on s'affranchit de l'hypothèse de proximité d'un système connu, on aborde le domaine des systèmes différentiels dits, par opposition, fortement non linéaires. L'idée fondamentale sous-jacente à la plupart des méthodes qu'on y emploie consiste à identifier les solutions périodiques avec les points fixes d'une certaine application de l'espace de phase du système différentiel en lui-même. Le recours à certains théorèmes de topologie permet alors de résoudre le problème, mais les difficultés soulevées par la vérification des hypothèses limitent la plupart des résultats au cas des équations différentielles d'ordre peu élevé (en général deux). Certains auteurs ont utilisé une généralisation des théorèmes de points fixes, la méthode de J. LERAY et J. SCHAUDER [61] introduite en 1934 pour l'étude des équations dans les espaces fonctionnels et exposée, par exemple, dans le remarquable ouvrage de J. CRONIN [29]. Ce procédé présentant avec celui que nous proposons dans ce mémoire certaines analogies, nous passerons rapidement en revue les différents travaux de mécanique non linéaire qui l'utilisent. Signalons que deux des hypothèses préliminaires à l'application de la méthode de Leray-Schauder sont la possibilité de mettre le problème étudié sous la forme

$$x = \mathrm{F}x \tag{0.1}$$

où x appartient à un certain espace fonctionnel E et où F est un opérateur complètement continu défini et à valeurs dans E, et l'obtention d'une borne a priori pour toutes les solutions éventuelles de cette équation fonctionnelle. En 1952, F. Stoppelli [93] a démontré de cette manière l'existence d'une solution périodique pour une équation non autonome du second ordre de la mécanique des fils. Ce travail a servi de base à celui de L. Derwidué [31] qui, en 1963, a systématisé et généralisé le procédé de Stoppelli. Entretemps, en 1956, R. W. Bass [5, 6] s'appuyait sur des considérations analogues pour obtenir une intéressante justification de la méthode de linéarisation équivalente dans les systèmes autonomes. La difficulté de l'application des résultats des deux derniers auteurs cités provient du fait qu'ils ne fournissent aucun moyen pour obtenir une borne a priori des solutions, cette condition restant parmi les hypothèses de leurs théorèmes d'existence. Développant, dans ses recherches sur les équations différentielles non autonomes du troisième ordre, une idée de G. E. H. Reuter [84], J. O. C. Ezeilo [32] a étudié l'existence de solutions périodiques lorsque toutes les solutions sont asymptotiquement bornées, et ce procédé a été utilisé par R. Reissig [80-83], G. Sedsiwy [80] et G. Gussefeldt [44]. Dans le même ordre d'idées, nous signalerons également les travaux de M. A. Krasnoselskii et de son école [57-59]. Enfin, R. Faure [33, 34] à partir de 1964 et G. Villari [94-96] à partir de 1965 ont obtenu, toujours en vue de l'application de la méthode de Leray-Schauder, des bornes a priori pour les solutions périodiques éventuelles de diverses équations différentielles. Ils ont utilisé d'une manière ingénieuse différentes inégalités de la théorie des séries de Fourier, dont certaines se retrouvent d'ailleurs dans des travaux plus anciens de D. Graffi [42, 43]. Les intéressants résultats qui en découlent portent sur des équations ou des systèmes différentiels du 2^{e}, 3^{e} et 4^{e} ordre, importants pour la physique et la technique.

Dans un ordre d'idées différent, on doit à L. Cesari [16] une remarquable théorie qui s'applique aux systèmes fortement non linéaires tout en possédant une structure formelle analogue à celle qui apparaît dans le cas faiblement non linéaire : une solution périodique existe si et seulement si un certain système fini d'équations, dites équations déterminantes, possède une solution. Pour l'étude de ces dernières, Cesari propose un procédé très général, lié à la fois à la notion de degré topologique et à la méthode de Galerkin. Les hypothèses mathématiques très faibles adoptées en [16], qui rendent l'exposé assez long, et la généralité même du procédé de résolution des équations déterminantes sont sans doute responsables du nombre assez restreint de travaux consacrés, jusqu'à présent, aux applications de la méthode de Cesari. En l'adoptant comme base de ce travail, nous avons cherché en premier lieu à la présenter d'une manière aussi simple que possible, grâce à des hypothèses mathématiques moins élaborées que celles de Cesari, mais réalisées toutefois dans la plupart des applications. Nous montrons ensuite que l'existence d'une borne a priori pour les solutions périodiques éventuelles d'un système différentiel fortement non linéaire permet, grâce à la théorie du degré topologique dans un espace de dimension finie, de ramener l'étude des équations déterminantss de Cesari à celle d'équations de bifurcation du système quasi-linéaire correspondant, ce qui est en général très facile. Comme nous réduisons, d'autre part, la théorie des systèmes faiblement non linéaires à une application directe de la méthode de Cesari, nous obtenons les différents critères par un procédé uniforme, alors que les méthodes utilisées jusqu'à présent lorsque la non-linéarité est forte se caractérisent à la fois par leur diversité et l'absence de relations avec les algorithmes du type de perturbation.

Quant aux résultats eux-mêmes, ils portent sur la plupart des équations différentielles non autonomes de la mécanique non linéaire. Lorsque la comparaison avec des travaux antérieurs, et en particulier avec ceux basés sur la méthode de Leray-Schauder, est possible, elle semble favorable à la méthode utilisée dans ce travail, ainsi qu'on pourra le constater dans les chapitres 5 et 6. Les raisons de cet avantage résident dans le fait que le calcul effectif du degré topologique dans un espace à un nombre fini de dimensions est possible dans des cas plus nombreux que celui du degré topologique dans un espace fonctionnel qui intervient dans la méthode de Leray-Schauder. En outre, il n'est plus nécessaire de mettre le problème étudié sous forme d'une équation du type (0—1).

Terminons cette introduction par une analyse rapide du contenu de ce mémoire. Après un rappel, au chapitre 1, de quelques propriétés importantes des fonctions périodiques, nous introduisons, au chapitre 2, la notion de degré topologique à partir de la définition purement analytique de E. Heinz [51] et nous montrons que ce point de vue permet, aussi bien que l'approche topologique, le calcul effectif du degré. Le chapitre 3 est consacré à la méthode de Cesari ; nous reprenons la présentation adoptée en [66] en y ajoutant certains théorèmes utiles pour la suite du travail. Abordant alors, au chapitre 4, l'étude des équations déterminantes, nous établissons le théorème fondamental d'existence des solutions périodiques et nous introduisons deux vastes classes de systèmes pour lesquelles les hypothèses de ce théorème sont aisément vérifiables ; il s'agit des systèmes faiblement non linéaires et de ceux à forte non-linéarité mais dont on connaît a priori une borne pour les solutions périodiques éventuelles. Nous montrons également que l'algorithme proposé par Cesari pour l'analyse des équations déterminantes rentre dans le cadre du théorème fondamental.

Nous obtenons alors une forme aussi explicite que possible pour les équations déterminantes des systèmes de Coddington-Levinson et nous en déduisons, dans le cas faiblement non linéaire, une généralisation d'un résultat de J. Cronin [24]. La fin de ce chapitre est consacrée à l'étude de quelques cas particuliers importants du théorème fondamental. Les deux derniers chapitres étudient les solutions périodiques d'équations différentielles du deuxième et du troisième ordre fortement non linéaires. Le but de ce mémoire étant plus orienté vers l'exposé des méthodes fondamentales que vers les applications, nous nous sommes volontairement limités à des cas simples. Cette simplicité n'empêche pas toutefois l'obtention de généralisations substantielles de certains résultats intéressants obtenus, entre autres, par R. Faure [33], R. Gomory [45] et G. Villari [94, 96]. Ainsi, les paragraphes 5-2, 5-3 et 5-4 du chapitre 5 sont consacrés à des systèmes qui n'appartiennent pas nécessairement à la classe D au sens de Levinson [62, 30], et qui échappent ainsi aux critères d'existence établis pour de telles équations. L'étude détaillée des applications de la méthode proposée dans ce travail, dont on pourra trouver un exposé succinct en [69] et [70], sera faite dans des publications ultérieures, où on pourra trouver à la fois des théorèmes d'existence plus généraux pour les équations différentielles du second ordre et des critères relatifs à des équations et des systèmes d'ordre quelconque, dont certains ont été ébauchés en [71].

CHAPITRE 1

FONCTIONS CONTINUES ET PÉRIODIQUES A VALEURS DANS E^n

1-1. *Introduction*

Ce chapitre est consacré à une brève étude des fonctions définies et continues dans E^1, à valeurs dans E^n et périodiques de période $T > 0$. Après avoir rappelé, sans démonstration, les principales propriétés de ces fonctions, on examine plus en détail certaines inégalités particulièrement importantes pour la suite de ce travail.

1-2. *Séries trigonométriques de Fourier*

Soit E l'ensemble des fonctions vectorielles réelles de la variable réelle t :

$$x(t) = \text{col}\,[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)], \ n \text{ entier positif,}$$

où les $x_i(t)$ sont définies et continues dans E^1 et périodiques de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega} > 0$.

Si

$$\| x \| = \max_{i=1,2,\ldots,n} | x_i |$$

représente la norme du vecteur $x = \text{col}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de l'espace linéaire E^n de dimension n, on sait [35] que l'ensemble E muni de la norme

$$\nu(x) = \sup_{t\in[0,\,T]} \| x(t) \|, \, x \in E,$$

constitue un espace linéaire, normé et complet, c'est-à-dire un espace de Banach, et nous le désignerons par S.

A toute fonction $x(t)$ de S, on peut associer la série trigonométrique de Fourier.

$$a_0 + \sum_{s=1}^{\infty} (a_s \cos s\omega t + b_s \sin s\omega t)$$

où a_0, a_s, b_s, $s = 1, 2, \ldots$, sont des éléments de E^n définis par

$$a_0 = T^{-1} \int_0^T x(t)dt, \; a_s = 2T^{-1} \int_0^T x(t) \cos s\omega t dt, \; b_s = 2T^{-1} \int_0^T x(t) \sin s\omega t dt,$$
$$s = 1, 2, \ldots$$

étant bien entendu que, si $f(t) = \text{col}\,[f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)]$,

$$\int_0^T f(t)dt = \text{col} \left[\int_0^T f_1(t)dt, \int_0^T f_2(t)dt, \ldots, \int_0^T f_n(t)dt \right].$$

On écrit

$$x(t) \sim a_0 + \sum_{s=1}^{\infty} (a_s \cos s\omega t + b_s \sin s\omega t)$$

et a_0 est dite la *valeur moyenne* de la fonction $x(t)$. On peut démontrer [35] que deux fonctions de S admettant la même série trigonométrique de Fourier sont identiques, et on a l'importante formule de Parseval

$$\frac{1}{T}\int_0^T \| x(t) \|^2 \, dt = \| a_0 \|^2 + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{\infty} (\| a_s \|^2 + \| b_s \|^2).$$

Si $x(t)$ satisfait à une condition de Lipschitz dans $[0, T]$ (donc dans E^1 par suite de la périodicité), c'est-à-dire s'il existe une constante positive M telle que, pour tout t_i appartenant à $[0, T]$, $i = 1, 2$,

$$\| x(t_1) - x(t_2) \| \leqslant M \mid t_1 - t_2 \mid,$$

alors, la série de Fourier de $x(t)$ converge uniformément, dans $[0, T]$, vers $x(t)$ et on peut donc écrire, quel que soit t,

$$x(t) = a_0 + \sum_{s=1}^{\infty} (a_s \cos s\omega t + b_s \sin s\omega t)$$

(il s'agit bien entendu d'une condition suffisante et non pas nécessaire de convergence uniforme). Cette condition de Lipschitz sera en particulier réalisée si $x(t)$ possède dans E^1 une dérivée bornée.

Si $x \in S$ et est de valeur moyenne nulle, ce qui entraîne

$$x(t) \sim \sum_{s=1}^{\infty} (a_s \cos s\omega t + b_s \sin s\omega t),$$

sa primitive $\int x(t)dt$ est périodique de période T et peut s'obtenir par intégration terme à terme de la série de Fourier de $x(t)$ [35] :

$$\int x(t)dt = A_0 + \sum_{s=1}^{\infty} (s\omega)^{-1} (- b_s \cos s\omega t + a_s \sin s\omega t),$$

A_0 étant un vecteur constant arbitraire. On en déduit immédiatement que, si $x \in S \cap C^1(E^1)$ et

$$x(t) = a_0 + \sum_{s=1}^{\infty} (a_s \cos s\omega t + b_s \sin s\omega t),$$

alors,

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) \sim \sum_{s=1}^{\infty} s\omega(b_s \cos s\omega t - a_s \sin s\omega t). \tag{1.2.1}$$

1-3. *Opérateurs* P_m *et* H *dans* S

Si m est un entier positif ou nul et si $x \in S$,

$$x(t) \sim a_0 + \sum_{s=1}^{\infty} (a_s \cos s\omega t + b_s \sin s\omega t), \tag{1.3.1}$$

nous définirons, avec L. CESARI [16], l'opérateur P_m de la manière suivante :

$$P_m x(t) = a_0 + \sum_{s=1}^{m} (a_s \cos s\omega t + b_s \sin s\omega t).$$

m étant fixé, si $S_0 = \{x \in S : x = P_m x\}$, il est clair que $P_m : S \to S_0$ et que P_m est linéaire, continu et idempotent.

D'autre part, si $x \in S$ et possède la série de Fourier (1.3.1), et si I désigne l'opérateur identité, $(I - P_m)x \in S$ et

$$(I - P_m)x(t) \sim \sum_{s=m+1}^{\infty} (a_s \cos s\omega t + b_s \sin s\omega t).$$

Nous pouvons dès lors écrire

$$\int (I - P_m)x(t)dt = A_0 + \sum_{s=m+1}^{\infty} (s\omega)^{-1} (- b_s \cos s\omega t + a_s \sin s\omega t) \qquad (1.3.2)$$

A_0 étant un vecteur constant arbitraire, et, parmi toutes ces primitives, il en existera une et une seule telle que

$$P_m \int (I - P_m)x(t)dt = 0,$$

à savoir, celle qui correspond à $A_0 = 0$. En d'autres termes, si, m étant fixé,

$$S_1 = \{x \in S : P_m x = 0\}$$

il existera, pour tout $x \in S$, une et une seule primitive de $x - P_m x$ qui appartient à S_1. Avec L. CESARI [16], nous désignerons cette primitive particulière par

$$H(I - P_m)x \qquad (1.3.3)$$

définissant ainsi un opérateur $H : S_1 \to S_1$. Cet opérateur est linéaire et intervient dans deux inégalités importantes, dues à L. CESARI [16], que nous allons démontrer.

Théorème 1-1 : *Si $x \in S$ et si m est un entier positif ou nul,*

$$\nu\,[H(I - P_m)x] \leqslant 2^{1/2}\omega^{-1}\sigma(m)\,[T^{-1} \int_0^T \| x(t) \|^2\, dt]^{1/2} \qquad (1.3.4)$$

$$\nu\,[H(I - P_m)x] \leqslant 2^{1/2}\omega^{-1}\sigma(m)\nu(x) \qquad (1.3.5)$$

où

$$\sigma^2(m) = \sum_{s=m+1}^{\infty} s^{-2},\ (m + 1)^{-1} < \sigma(m) < m^{-1/2}. \qquad (1.3.6)$$

Soit $x \in S$ et (1.3.1) sa série de Fourier. Il résulte de (1.3.2), de la définition de H et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz [35] que, pour $i = 1, 2, ..., n$,

$$| H(I - P_m)x_i(t) | = | \sum_{s=m+1}^{\infty} (s\omega)^{-1} (- b_{s,i} \cos s\omega t + a_{s,i} \sin s\omega t) |$$

$$\leqslant \left[\sum_{s=m+1}^{\infty} (s\omega)^{-2} \right]^{1/2} \left[\sum_{s=m+1}^{\infty} (-b_{s,i} \cos s\omega t + a_{s,i} \sin s\omega t)^2 \right]^{1/2}$$

$$\leqslant \left[\sum_{s=m+1}^{\infty} (s\omega)^{-2} \right]^{1/2} \left[\sum_{s=m+1}^{\infty} (a_{s,i}^2 + b_{s,i}^2) \right]^{1/2}.$$

D'où, par la formule de Parseval,

$$\sup_{t \in [0,\, \mathrm{T}]} | \mathrm{H}(\mathrm{I} - \mathrm{P}_m) x_i(t) | \leqslant 2^{1/2} \omega^{-1} \sigma(m) \left[\mathrm{T}^{-1} \int_0^{\mathrm{T}} x_i^2(t) dt \right]^{1/2},$$

ce qui entraîne (1.3.4). L'inégalité (1.3.5) résulte du fait que

$$\left[\frac{1}{\mathrm{T}} \int_0^{\mathrm{T}} x_i^2(t) dt \right]^{1/2} \leqslant \sup_{t \in [0,\, \mathrm{T}]} | x_i(t) |, \tag{1.3.7}$$

et la relation $\sigma(m) < m^{-1/2}$ est une conséquence de l'inégalité

$$\sum_{s=m+1}^{\infty} s^{-2} \leqslant \int_m^{\infty} u^{-2}\, du = m^{-1}.$$

Corollaire 1-1 : *Si* $x \in \mathrm{S} \cap \mathrm{C}^1(\mathrm{E}^1)$ *et si* $\mathrm{T}^{-1} \int_0^{\mathrm{T}} x(t) dt = 0$, *alors,*

$$\nu(x) \leqslant 3^{-1/2} \pi \omega^{-1} \left[\mathrm{T}^{-1} \int_0^{\mathrm{T}} \| \dot{x}(t) \|^2\, dt \right]^{1/2} \tag{1.3.8}$$

et

$$\nu(x) \leqslant 3^{-1/2} \pi\, \omega^{-1} \nu(\dot{x}). \tag{1.3.9}$$

Il suffit de remarquer que, si $x \in \mathrm{S} \cap \mathrm{C}^1(\mathrm{E}^1)$, $\dot{x} \in \mathrm{S}$, $x = \mathrm{H}(\mathrm{I} - \mathrm{P}_0)\dot{x}$ et que

$$\sigma^2(0) = \sum_{s=1}^{\infty} s^{-2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

1-4. *Quelques inégalités concernant les intégrales d'éléments de* S

Soit $x \in \mathrm{S} \cap \mathrm{C}^1(\mathrm{E}^1)$ une fonction telle que

$$\mathrm{T}^{-1} \int_0^{\mathrm{T}} x(t) dt = 0.$$

et

$$\sum_{s=1}^{\infty} (a_s \cos s\omega t + b_s \sin s\omega t)$$

sa série de Fourier. La relation (1.2.1) et l'inégalité de Parseval entraînent

$$\frac{1}{\mathrm{T}} \int_0^{\mathrm{T}} \| x(t) \|^2\, dt = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\infty} (\| a_s \|^2 + \| b_s \|^2)$$

$$\frac{1}{\mathrm{T}} \int_0^{\mathrm{T}} \| \dot{x}(t) \|^2\, dt = \frac{\omega^2}{2} \sum_{s=1}^{\infty} s^2 (\| a_s \|^2 + \| b_s \|^2)$$

d'où

$$\frac{\omega^2}{T}\int_0^T \| x(t) \|^2\, dt \leqslant \frac{1}{T}\int_0^T \| \dot{x}(t) \|^2\, dt \tag{1.4.1}$$

(inégalité d'Almansi).

Si $x \in S$ et si p et q sont des nombres vérifiant l'inégalité $1 \leqslant p < q$, on a

$$\frac{1}{T}\int_0^T \| x(t) \|^p\, dt \leqslant \left[\frac{1}{T}\int_0^T \| x(t) \|^q\, dt\right]^{p/q} \tag{1.4.2}$$

En effet, l'inégalité de Hölder entraîne

$$\frac{1}{T}\int_0^T \| x(t) \|^p\, dt \leqslant \left(\frac{1}{T}\int_0^T dt\right)^{1-q/p} \left[\frac{1}{T}\int_0^T \| x(t) \|^q\, dt\right]^{p/q}$$
$$= \left[\frac{1}{T}\int_0^T \| x(t) \|^q\, dt\right]^{p/q}.$$

CHAPITRE 2

THÉORIE ANALYTIQUE DU DEGRÉ TOPOLOGIQUE DANS L'ESPACE EUCLIDIEN A n DIMENSIONS

2-1. *Introduction*

Il existe plusieurs définitions du degré topologique d'une application dans l'espace euclidien à n dimensions. Certaines sont de nature topologique et utilisent les approximations simpliciales (L. E. J. BROUWER [8], P. ALEXANDROFF et H. HOPF [2], J. CRONIN [29]), d'autres sont analytiques (M. NAGUMO [73], E. HEINZ [51]). Nous adopterons dans ce qui suit le point de vue de E. HEINZ qui conduit rapidement aux principales propriétés du degré en utilisant essentiellement des notions d'analyse mathématique. Nous montrerons ensuite que la définition utilisée permet de calculer aisément le degré de certaines applications étudiées, à partir du point de vue topologique, par J. CRONIN [21, 22, 29] et l'école de M. A. KRASNOSEL'SKII [57]. Pour une discussion plus détaillée des rapports entre les différentes méthodes, nous renverrons aux travaux de J. CRONIN [29] et de E. HEINZ [51]. Comme nous utilisons les notations de [51], il sera aisé de se référer à ce travail, ou à [71], pour la justification des définitions et la démonstration des propriétés fondamentales du degré topologique. Nous ne retiendrons dès lors dans ce chapitre, par souci de brièveté, que les énoncés des théorèmes utilisés dans la suite du mémoire.

2-2. *Définitions*

E^n étant l'espace euclidien à n dimensions muni de la norme

$$|x| = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]^{1/2},$$

la frontière et l'adhérence d'un ensemble $\Omega \subset E^n$ seront désignés respectivement par $\dot{\Omega}$ et $\overline{\Omega}$. L'application

$$y : x \rightarrow y(x)$$

de l'ouvert $\Omega \subset E^n$ dans E^n définie par les n fonctions réelles

$$y_i = y_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

sera dite appartenir à $C^k(\Omega)$, k entier positif ou nul, si les n fonctions $y_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, sont k fois continûment dérivables par rapport à $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans Ω.

Cela étant, la définition de E. HEINZ [51] du degré topologique au point $z \in E^n$ d'une application appartenant à $C^1(\Omega)$ est la suivante :

Définition 2-1 : *Ω étant un ouvert borné de E^n, considérons l'application $y : x \rightarrow y(x)$ où $y(x) \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ telle que $y(x) \neq z$ pour $x \in \dot{\Omega}$, z étant un point fixé dans E^n. Soit $\Phi(r) \in C^0$ ($[0, \infty[$) une fonction réelle telle que :*

(i) $\Phi(r) \equiv 0$ *dans un voisinage de* $r = 0$ *et pour* $r \in [\varepsilon, \infty[$ *où*

$$0 < \varepsilon < \inf_{x \in \dot{\Omega}} | y(x) - z |$$

(ii) $$\int_{E^n} \Phi(| x |)\, dx = 1$$

où

$$dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Le degré topologique de l'application $y(x)$ *en* z *par rapport à* Ω *est défini par*

$$d[y(x), \Omega, z] = \int_\Omega \Phi(| y(x) - z |)\, J[y(x)]\, dx$$

où $J[y(x)]$ *est le jacobien de* $y(x)$.

L'extension de la définition du degré au cas des applications continues et la démonstration de ses principales propriétés nécessitent le lemme suivant, démontré en [51].

Lemme 2-1 : *Ω étant un ouvert borné de E^n et $y_i : x \to y_i(x)$, $i = 1, 2$, deux applications appartenant à $C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ telles que, pour z fixé dans E^n et $\varepsilon > 0$:*

$$| y_i(x) - z | > 7\varepsilon, \ x \in \dot{\Omega}, \ i = 1, 2,$$

$$| y_1(x) - y_2(x) | < \varepsilon, \ x \in \overline{\Omega},$$

on a

$$d[y_1(x), \Omega, z] = d[y_2(x), \Omega, z]$$

Nous pouvons dès lors introduire, avec E. HEINZ, la

Définition 2-2 : *Ω étant un ouvert borné de E^n et z un point fixé dans E^n, considérons l'application $y : x \to y(x)$ telle que $y(x) \in C^0(\overline{\Omega})$ et $y(x) \neq z$ pour $x \in \dot{\Omega}$. Soit $\{y^k(x)\}$, $k = 1, 2, \dots$, une suite d'applications $y^k : x \to y^k(x)$ telles que $y^k(x) \in C^1(E^n)$ et $y^k(x) \neq z$ pour $x \in \dot{\Omega}$ qui convergent uniformément vers $y(x)$ dans $\overline{\Omega}$. Le degré topologique de $y(x)$ en z par rapport à Ω est univoquement défini par*

$$d[y(x), \Omega, z] = \lim_{k \to \infty} d[y^k(x), \Omega, z]$$

2-3. *Propriétés fondamentales du degré topologique*

Rappelons maintenant les propriétés fondamentales du degré topologique [51].

Théorème 2-1 : *Ω_1 et Ω_2 étant deux ouverts bornés disjoints de E^n et $y : x \to y(x)$ une application telle que $y(x) \in C^0(\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2)$ et $y(x) \neq z$ pour $x \in \dot{\Omega}_1 \cup \dot{\Omega}_2$, z fixé dans E^n, on a*

$$d[y(x), \Omega_1 \cup \Omega_2, z] = d[y(x), \Omega_1, z] + d[y(x), \Omega_2, z].$$

Théorème 2-2 : *Ω étant un ouvert borné de E^n et $y : x \to y(x)$ une application telle que $y(x) \in C^0(\overline{\Omega})$ et $y(x) \neq z$ pour $x \in \dot{\Omega}$, z fixé dans E^n, si*

$$d[y(x), \Omega, z] \neq 0,$$

il existe au moins un point $\xi \in \Omega$ *tel que*

$$y(\xi) = z.$$

Théorème 2-3. (Théorème d'invariance par rapport à une homotopie) : Ω *étant un ouvert borné de* E^n, I *l'intervalle fermé et borné de* E^1 *défini par* $I = \{\tau : a \leqslant \tau \leqslant b\}$, $y : x \to y(x, \tau)$ *une famille d'applications telles que* $y(x, \tau) \in C^0(\overline{\Omega} \times I)$ *et* $y(x, \tau) \neq z$ *pour* $(x, \tau) \in \dot{\Omega} \times I$, z *fixé dans* E^n, *le degré topologique de* $y(x, \tau)$ *en* z *par rapport à* Ω *est constant pour* $\tau \in I$.

Le théorème 2-3 possède des corollaires importants :

Corollaire 2-1 : *Avec les notations du théorème* 2-3, *si, pour un* $\tau_0 \in I$, $y(x, \tau_0) \neq z$ *pour* $x \in \dot{\Omega}$, z *fixé dans* E^n, *il existe* $\eta > 0$ *tel que, pour tout* $\tau \in I$ *satisfaisant à* $|\tau - \tau_0| \leqslant \eta$, $d[y(x, \tau), \Omega, z]$ *est défini et*

$$d[y(x, \tau), \Omega, z] = d[y(x, \tau_0), \Omega, z].$$

Corollaire 2-2. (Théorème de H. POINCARÉ-P. BOHL) : Ω *étant un ouvert borné de* E^n *et* $y^i : x \to y^i(x)$, $i = 1, 2$, *deux applications telles que* $y^i(x) \in C^0(\overline{\Omega})$ *et* z *un point fixé dans* E^n, *si, pour tout* $x \in \dot{\Omega}$, *le segment de droite*

$$\overline{y^1(x) y^2(x)} = \{y \in E^n : y = y^1(x) + \tau\,[y^2(x) - y^1(x)],\ \tau \in [0, 1]\}$$

ne rencontre pas z, *alors*

$$d[y^1(x), \Omega, z] = d[y^2(x), \Omega, z]$$

Corollaire 2-3. (Théorème de E. ROUCHÉ) : Ω *étant un ouvert borné de* E^n *et* $y^i : x \to y^i(x)$, $i = 1, 2$, *deux applications telles que* $y^i(x) \in C^0(\overline{\Omega})$ *et*, z *étant fixé dans* E^n,

$$|y^1(x) - y^2(x)| < |y^1(x) - z|$$

pour tout $x \in \dot{\Omega}$, *on a*

$$d[y^1(x), \Omega, z] = d[y^2(x), \Omega, z]$$

Le théorème suivant est nécessaire pour introduire, dans le cadre de la théorie de Heinz [51], la notion d'indice d'une application.

Théorème 2-4 : Ω *étant un ouvert borné de* E^n *et* $y : x \to y(x)$ *une application telle que* $y(x) \in C^0(\overline{\Omega})$ *et* $y(x) \neq z$, z *fixé dans* E^n, *pour* $x \in \dot{\Omega}$, *soit* F *l'ensemble (fermé) des* $x \in \overline{\Omega}$ *tels que* $y(x) = z$ *et soit* $\Omega_0 \subset \Omega$ *un ouvert contenant* F. *Alors,*

$$d[y(x), \Omega, z] = d[y(x), \Omega_0, z].$$

Nous pouvons maintenant définir l'indice d'une application :

Définition 2-3 : $B(x^0, \rho)$ *étant la boule ouverte de* E^n *de centre* $x^0 \in E^n$ *et de rayon* $\rho > 0$, *soit* $y : x \to y(x)$ *une application telle que* $y(x) \in C^0[\overline{B}(x^0, \rho)]$ *et* $y(x) \neq y(x^0)$ *pour* $x \in \overline{B}(x^0, \rho)$ *et* $x \neq x^0$. *L'indice* $i[y(x)\,;\,x^0]$ *de l'application* $y(x)$ *en* x^0 *est univoquement défini par*

$$i[y(x)\,;\,x^0] = d[y(x), B(x^0, \rho), y(x^0)].$$

L'indice d'une application possède les propriétés suivantes :

Théorème 2-5 : *Ω étant un ouvert borné de E^n, soit $y : x \to y(x)$ une application telle que $y(x) \in C^0(\overline{\Omega})$ et que, z étant fixé dans E^n, l'équation*

$$y(x) = z, \quad x \in \overline{\Omega}$$

possède uniquement p solutions distinctes $x^1, x^2, \ldots, x^p$ appartenant à Ω.

Alors,

$$d\,[y(x), \Omega, z] = \sum_{j=1}^{p} i\,[y(x)\,;\,x^j] \tag{2.3.1}$$

Théorème 2-6 : *Soit x^0 un point fixé de E^n et V un voisinage de x^0. Si l'application $y : x \to y(x)$ est telle que $y(x) \in C^1(V)$ et $J\,[y(x^0)] \neq 0$, alors*

$$i\,[y(x)\,;\,x^0] = \frac{J\,[y(x^0)]}{|\,J\,[y(x^0)]\,|} \tag{2.3.2}$$

Ces théorèmes permettent d'obtenir une autre propriété importante du degré topologique :

Corollaire 2-4 : *Ω étant un ouvert borné de E^n, soit $y : x \to y(x)$ une application telle que $y(x) \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^1\left(\bigcup_{j=1}^{N} V_j\right)$ où les $V_j \subset \Omega$, $j = 1, 2, \ldots, N$, sont des voisinages des racines $x^1, x^2, \ldots, x^N$ supposées distinctes et en nombre fini, de l'équation*

$$y(x) = z, \quad z \text{ fixé dans } E^n, \quad x \in \Omega.$$

Si $y(x) \neq z$ pour $x \in \dot{\Omega}$ et si

$$J\,[y(x^j)] \neq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N,$$

alors,

$$d\,[y(x), \Omega, z] = N^+ - N^-,$$

où N^+ (resp. N^-) désigne le nombre de racines telles que $J\,[y(x)] > 0$ (resp. $J\,[y(x)] < 0$).

Enfin, le résultat suivant se fonde sur un théorème de A. Sard [29] :

Théorème 2-7 ([29], [51]) : *Ω étant un ouvert borné de E^n, soit $y : x \to y(x)$ une application telle que $y(x) \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ et $y(x) \neq z^0$ pour $x \in \dot{\Omega}$, z^0 fixé dans E^n. Pour chaque $0 < \varepsilon < \inf_{x \in \dot{\Omega}} |\,y(x) - z^0\,|$, il existe un $z \in E^n$ satisfaisant à $|\,z - z^0\,| \leqslant \varepsilon$ et tel que :*

(i) $d\,[y(x), \Omega, z] = d\,[y(x), \Omega, z^0]$

(ii) *l'équation $y(x) = z$, $x \in \overline{\Omega}$, possède au plus un nombre fini p de solutions $x^1, x^2, \ldots, x^p$ qui appartiennent à Ω (on pose $p = 0$ s'il n'y a pas de solutions) ;*

(iii) $J\,[y(x^j)] \neq 0$ *pour* $j = 1, 2, \ldots, p$;

(iv) $p \geqslant |\,d\,[y(x), \Omega, z]\,|$ *et* $p = d\,[y(x), \Omega, z]$ (*mod.* 2).

On en déduit facilement le

Corollaire 2-5 : *Ω étant un ouvert borné de* E^n *et* $y : x \to y(x)$ *une application telle que* $y(x) \in C^0(\overline{\Omega})$ *et* $y(x) \neq z^0$ *pour* $x \in \dot{\Omega}$, z^0 *fixé dans* E^n, $d\,[y(x), \Omega, z^0]$ *est un entier.*

2-4. *Autres propriétés du degré topologique*

Démontrons maintenant, à partir de la définition de Heinz, un théorème obtenu par J. CRONIN [29] en utilisant les approximations simpliciales et qui facilite souvent le calcul effectif du degré topologique :

Théorème 2-8. (Théorème du produit) : *Ω étant un ouvert borné de* E^n *soit* $y : x \to y(x)$ *une application telle que* $y(x) \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ *et,* U *étant un ouvert borné de* E^n *contenant* $y(\overline{\Omega})$, *soit* $u : x \to u(x)$ *une application telle que* $u(x) \in C^0(\overline{U}) \cap C^1(U)$. *$z$ étant fixé dans* E^n, *supposons que l'équation*

$$u(x) = z, \ x \in y(\overline{\Omega})$$

possède un nombre fini de solutions $y^1, y^2, \ldots, y^p$ *et que*

$$y(x) \neq y^k \ \text{si} \ x \in \dot{\Omega}, \ k = 1, 2, \ldots, p.$$

Alors,

$$d\,[u\,[y(x)], \Omega, z] = \sum_{k=1}^{p} \{d\,[y(x), \Omega, y^k]\}\,\{i\,[u(y), y^k]\} \qquad (2.4.1)$$

Par suite des hypothèses du théorème, les quantités qui apparaissent dans la formule (2.4.1) sont bien définies. D'autre part, il est clair que l'ensemble des solutions de l'équation

$$u\,[y(x)] = z$$

situées dans $\overline{\Omega}$ coïncide avec l'ensemble des solutions des équations

$$y(x) = y^k, \ k = 1, 2, \ldots, p$$

situées dans le même ensemble, et, de plus,

$$J\,[u\,[y(x)]] = J\,[u(y)]\,J\,[y(x)]$$

Les y^k étant distinctes et en nombre fini, les compacts

$$F_k = \{x \in \overline{\Omega} : y(x) = y^k\}$$

sont tels que $F_i \cap F_k = \varnothing$ pour $i \neq k$, ce qui entraîne

$$d(F_i, F_k) > 0$$

pour $i, k = 1, 2, \ldots, p, i \neq k$, où $d(F_i, F_k)$ est la distance entre les ensembles F_i et F_k. On peut donc trouver des ouverts bornés Ω_k contenus dans Ω, $k = 1, 2, \ldots, p$, et satisfaisant aux relations

$$\overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_k = \varnothing, \ i \neq k, \ \Omega_k \supset F_k, \ k = 1, 2, \ldots, p,$$

d'où, en utilisant le théorème 2-1 et le théorème 2-4,

$$d\,[u\,[y(x)], \Omega, z] = \sum_{k=1}^{p} d\,[u\,[y(x)], \Omega_k, z]$$

le second membre de cette expression étant bien défini puisque $u[y(x)] \neq z$ pour $x \in \dot{\Omega}_k$, $k = 1, 2, \ldots, p$ par suite des relations $\Omega_i \cap \mathrm{F}_k = \varnothing$, $i \neq k$, $i, k = 1, 2, \ldots, p$.

Supposons tout d'abord que $\mathrm{J}[u(y^k)] \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots, p$. En vertu du théorème 2-7, pour tout $0 < \varepsilon_k < \inf_{x \in \dot{\Omega}_k} | y(x) - y^k |$, $k = 1, 2, \ldots, p$, il existe un y'^k, $k = 1, 2, \ldots, p$, tel que $| y^k - y'^k | \leqslant \varepsilon_k$ et

1) $d[y(x), \Omega, y^k] = d[y(x), \Omega_k, y^k] = d[y(x), \Omega_k, y'^k]$

2) l'équation $y(x) = y'^k$ possède un nombre fini de solutions dans Ω_k, soit $x^{k,1}, \ldots, x^{k,a_k}$;

3) $\mathrm{J}[y(x^{k,j})] \neq 0$, $j = 1, \ldots, a_k$, $k = 1, 2, \ldots, p$.

En outre, par le corollaire 2-4,

$$d[y(x), \Omega_k, y'^k] = \sum_{j=1}^{a_k} \frac{\mathrm{J}[y(x^{k,j})]}{|\mathrm{J}[y(x^{k,j})]|}$$

Mais, si ε_k est suffisamment petit, $k = 1, 2, \ldots, p$, les seules solutions de l'équation $u[y(x)] = z'^k$, où $z'^k = u(y'^k)$ situées dans Ω_k sont $x^{k,1}, x^{k,2}, \ldots, x^{k,a_k}$. En effet, puisque $\mathrm{J}[u(y^k)] \neq 0$, on peut prendre ε_k suffisamment petit pour que l'application $u : y \to u(y)$ soit un homéomorphisme lorsque $y \in \overline{\mathrm{B}}(y^k, \varepsilon_k)$. Dès lors, si $y'^k \in \overline{\mathrm{B}}(y^k, \varepsilon_k)$, l'équation

$$u[y(x)] = u(y'^k) \text{ c'est-à-dire } u[y(x)] = z'^k$$

a pour seules solutions dans Ω_k celles de $y(x) = y'^k$, soit

$$x^{k,1}, x^{k,2}, \ldots, x^{k,a_k}, \text{ et } \mathrm{J}[u[y(x^{k,j})]] = \mathrm{J}[u(y'^k)]\, \mathrm{J}[y(x^{k,j})] \neq 0,$$

$$j = 1, 2, \ldots, a_k \,;\; k = 1, 2, \ldots, p.$$

Comme, en vertu de la continuité de u et y et du théorème 2-3 on peut, en le restreignant encore éventuellement, choisir ε_k suffisamment petit pour que

$$d[u[y(x)], \Omega_k, z] = d[u[y(x)], \Omega_k, z'^k], \; k = 1, 2, \ldots, p,$$

on obtient finalement

$$d[u[y(x)], \Omega, z] = \sum_{k=1}^{p} d[u[y(x)], \Omega_k, z] = \sum_{k=1}^{p} d[u[y(x)], \Omega_k, z'^k]$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{a_k} \frac{\mathrm{J}[u(y'^k)]\, \mathrm{J}[y(x^{k,j})]}{|\mathrm{J}[u(y'^k)]|\, |\mathrm{J}[y(x^{k,j})]|} = \sum_{k=1}^{p} i[u(y), y'^k]\, d[y(x), \Omega_k, y'^k]$$

$$= \sum_{k=1}^{m} i[u(y), y'^k]\, d[y(x), \Omega_k, y^k] = \sum_{k=1}^{m} d[y(x), \Omega, y^k]\, i[u(y), y^k].$$

Plaçons-nous maintenant dans les hypothèses générales de l'énoncé. En vertu du théorème 2-3, il existe un voisinage $\mathrm{V}_{\varepsilon_k}(y^k)$ de y^k tel que $d[y(x), \Omega, y'^k]$ soit constant si $y'^k \in \mathrm{V}_{\varepsilon_k}(y^k)$, $k = 1, 2, \ldots, p$. Les zéros y^k étant isolés, on peut choisir les $\mathrm{V}_{\varepsilon_k}(y^k)$ de telle sorte que y^k soit la solution unique de

$$u(y) = z$$

située dans $V_{\varepsilon_k}(y^k)$. Soit en outre $V_\delta(z)$ un voisinage de z dans lequel $d\,[u\,[y(x)], \Omega, z']$ est constant. Par suite du théorème 2-4 et du théorème 2-7, on peut trouver un $z' \in V_\delta(z)$ tel que $u(y) = z'$ possède un nombre fini de solutions $y^{k,1}, y^{k,2}, \dots, y^{k,a_k}$, $k = 1, 2, \dots, p$, n'annulant pas $J\,[u(y)]$ et situées dans $\bigcup_k V_{\varepsilon_k}(y^k)$, avec pour $b = 1, 2, \dots, a_k$.

$$i\,[u(y), y^{k,b}] = +1 \text{ ou } -1$$

et

$$\sum_{b=1}^{a_k} i\,[u(y), y^{k,b}] = i\,[u(y), y^k].$$

Dès lors, en vertu des résultats du paragraphe précédent,

$$d\,[u\,[y(x)], \Omega, z] = d\,[u\,[y(x)], \Omega, z'] = \sum_{k=1}^{p} \sum_{b=1}^{a_k} d\,[y(x), \Omega, y^{k,b}]\, i\,[u(y)\,;\, y^{k,b}]$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \sum_{b=1}^{a_k} d\,[y(x), \Omega, y^k]\, i\,[u(y), y^{k,b}] = \sum_{k=1}^{p} d\,[y(x), \Omega, y^k]\, i\,[u(y), y^k].$$

Enfin, le théorème suivant et son corollaire nous seront utiles dans les applications :

Théorème 2-9 : Ω étant un ouvert borné de E^{n+p}, soit $y : x \to y(x)$ une application appartenant à $C^0(\overline{\Omega})$ définie par

$$y_i = y_i(x) = y_i(x_1, x_2, \dots, x_{n+p}), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$y_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k + \sum_{l=n+1}^{n+p} b_{jl} x_l, \quad j = n+1, n+2, \dots, n+p,$$

où les a_{jk}, $j = n+1, \dots, n+p$, $k = 1, \dots, n$ sont des constantes réelles et où la matrice $B = (b_{n+j,n+k})$, $j, k = 1, 2, \dots, p$ est une matrice réelle de dimension $p \times p$ et de déterminant non nul. Nous supposerons en outre que $y(x) \neq 0$ pour $x \in \dot{\Omega}$. Soit E^n le sous-espace de dimension n formé par les points de E^{n+p} dont les p dernières coordonnées sont nulles et soit $y^{(n)} : (x_1, x_2, \dots, x_n) \to (y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \dots, y_n^{(n)})$ l'application de $\Omega^{(n)} = \Omega \cap E^n$ (supposé non vide) dans E^n définie par

$$y_i^{(n)} = y_i\,[x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}(x^{(n)}), x_{n+2}(x^{(n)}), \dots, x_{n+p}(x^{(n)})] = y_i^{(n)}(x^{(n)})$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

où $x^{(n)} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $x_j(x^{(n)})$, $j = n+1, \dots, n+p$, est *la solution (unique) du système linéaire non homogène*

$$\sum_{l=n+1}^{n+p} b_{jl} x_l = -\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k, \quad j = n+1, \dots, n+p.$$

On a

$$d\,[y(x), \Omega, 0] = \frac{\text{dét } B}{|\text{dét } B|}\, d\,[y^{(n)}(x^{(n)}), \Omega^{(n)}, 0].$$

Remarquons tout d'abord que, puisque $\dot{\Omega}^{(n)} = \dot{\Omega} \cap E^n$, $y^{(n)}(x^{(n)}) \neq 0$ pour $x^{(n)} \in \dot{\Omega}^{(n)}$ et dès lors $d\,[y^{(n)}(x^{(n)}), \dot{\Omega}^{(n)}, 0]$ est bien défini. D'autre part, vu la définition 2-2, il suffit de démontrer le théorème pour des $y_i(x) \in C^1(E^{n+p})$, $i = 1, 2, \ldots, n$. En vertu du théorème 2-7, pour tout

$$0 < \varepsilon < \min \{ \inf_{x^{(n)} \in \dot{\Omega}^{(n)}} |\, y^{(n)}(x^{(n)}) \,| \,,\ \inf_{x \in \dot{\Omega}} |\, y(x) \,| \},$$

il existe un $z \in E^n$ tel que $|\, z \,| \leqslant \varepsilon$ et :

1) l'équation $Y^{(n)}(x^{(n)}) \equiv y^{(n)}(x^{(n)}) - z = 0$ possède au plus un nombre fini de solutions $x^{(n),1}, x^{(n),2}, \ldots, x^{(n),N}$ appartenant à $\Omega^{(n)}$;

2) $J[y^{(n)}(x^{(n,k)})] \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots, N$;

3) $d\,[y^{(n)}(x^{(n)}), \Omega^{(n)}, 0] = d\,[Y^{(n)}(x^{(n)}), \Omega^{(n)}, 0]$.

On déduit alors immédiatement du corollaire 2-4 l'égalité

$$d\,[y^{(n)}(x^{(n)}), \Omega^{(n)}, 0] = N^+ - N^-$$

où N^+ (resp. N^-) est le nombre de solutions $x^{(n),k}$ telles que $J\,[y^{(n)}(x^{(n),k})] > 0$ (resp. < 0).

Considérons maintenant l'application $Y : x \to Y(x)$ de Ω dans E^{n+p} définie par

$$Y_i(x) = y_i(x) - z, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$Y_j(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k + \sum_{l=n+1}^{n+p} b_{jl} x_l, \quad j = n+1, n+2, \ldots, n+p.$$

Il est clair que le système d'équations $Y(x) = 0$ possède dans Ω comme seules solutions

$$x^k = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k, x_{n+1}(x^{(n),k}), \ldots, x_{n+p}(x^{(n),k})),$$
$$k = 1, 2, \ldots, N.$$

D'autre part, on a

$$J\,[y^{(n)}(x^{(n)})] = \text{dét} \left(\frac{\partial y_i}{\partial y_j} + \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\partial y_i}{\partial x^k} \frac{\partial x_k(x^{(n)})}{\partial x_j} \right)$$
$$i, j = 1, 2, \ldots, n$$

et

$$J\,[Y(x)] = \text{dét} \left(\begin{array}{cccc:ccc} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_{n+p}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_{n+p}} \\ \hdashline a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n} & b_{n+1,n+1} & \cdots & b_{n+1,n+p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+p,1} & a_{n+p,2} & \cdots & a_{n+p,n} & b_{n+p,n+1} & \cdots & b_{n+p,n+p} \end{array} \right)$$

Si nous désignons par A la matrice rectangulaire d'élément a_{ij}, $i = n+1, \ldots, n+p$, $j = 1, 2, \ldots, n$, nous obtenons, par la formule de Frobénius-Schur [39] :

$$J[Y(x)] = \text{dét}\left[\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_{n+p}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_{n+p}} \end{pmatrix} B^{-1}A\right] \text{dét}\, B$$

Or, par définition de $x_j(x^{(n)})$, $l = n+1, \ldots, n+p$, on a

$$\sum_{l=n+1}^{n+p} b_{jl}\frac{\partial x_l(x^{(n)})}{\partial x_i} = -a_{ji},\ j = n+1, \ldots, n+p,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{\partial x_j(x^{(n)})}{\partial x_i}\right) = -B^{-1}A.$$

Par conséquent,

$$J[Y(x)] = \text{dét}\left[\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_{n+p}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_{n+p}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_{n+p}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial x_{n+p}}{\partial x_n} \end{pmatrix}\right] \text{dét}\, B$$

$$= \text{dét}\, B.\ J[y^{(n)}(x^{(n)})]$$

On en déduit alors

$$d[Y(x), \Omega, 0] = \frac{\text{dét}\, B}{|\text{dét}\, B|}[N^+ - N^-] = \frac{\text{dét}\, B}{|\text{dét}\, B|} d[y^{(n)}(x^{(n)}), \Omega^{(n)}, 0]$$

Mais, puisque

$$|y(x) - Y(x)| = |z| \leqslant \varepsilon < \inf_{x \in \dot\Omega} |y(x)|,$$

il vient, par le théorème de Rouché,

$$d[y(x), \Omega, 0] = d[Y(x), \Omega, 0] = d[y^{(n)}(x^{(n)}), \Omega^{(n)}, 0]\frac{\text{dét}\, B}{|\text{dét}\, B|}$$

ce qui démontre le théorème.

Corollaire 2-6. (Théorème de réduction de J. Leray et J. Schauder [61]) : *Ω étant un ouvert borné de E^{n+p}, soit $y : x \to y(x)$ une application appartenant à $C^0(\overline{\Omega})$ définie par*

$$y_i = y_i(x) = y_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n+p}),\ i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$y_j = x_j,\ j = n+1, n+2, \ldots, n+p,$$

et telle que $y(x) \neq 0$ pour $x \in \dot{\Omega}$. Soit E^n le sous-espace des $x \in E^{n+p}$ dont les p dernières coordonnées sont identiquement nulles et soit $y^{(n)} : x^{(n)} \to y^{(n)}(x^{(n)})$ l'application de $\Omega^{(n)} = \Omega \cap E^n$ (supposé non vide) dans E^n définie par

$$y_i^{(n)} = y_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) = y_i^{(n)}(x^{(n)}),\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

On a

$$d\,[y(x), \Omega, 0] = d\,[y^{(n)}(x^{(n)}), \Omega^{(n)}, 0].$$

2-5. *Calcul du degré topologique de certaines applications d'un intervalle de* E^1

Considérons tout d'abord l'application $y : x \to ax^n$ définie dans E^1 où a est une constante réelle et n un entier positif. R_1 et R_2 étant deux nombres positifs quelconques, si $I =]-R_1, R_2[$, la définition 2-1 entraîne

$$d\,[ax^n, I, 0] = \int_{-R_1}^{R_2} \Phi(|\,ax^n\,|)\,\frac{d}{dx}\,(ax^n)\,dx$$

où la fonction $\Phi(r)$ satisfait aux conditions de cette définition. Dès lors,

1) si n est pair

$$d\,[ax^n, I, 0] = \left(\int_{-R_1}^{0} + \int_{0}^{R_2}\right) \Phi(|\,ax^n\,|)\,\frac{d}{dx}\,(ax^n)\,dx$$

$$= \int_{aR_1^n}^{0} \Phi(|\,y\,|)dy + \int_{0}^{aR_2^n} \Phi(|\,y\,|)dy = \operatorname{sgn} a\,\left[\int_{0}^{|a|\,R_2^n} \Phi(|\,y\,|)dy - \int_{0}^{|a|\,R_1^n} \Phi(|\,y\,|)dy\right] = 0$$

puisque

$$\Phi(r) \equiv 0 \text{ pour } r \geqslant \varepsilon,\ 0 < \varepsilon < \inf_{\substack{x=-R_1\\x=R_2}} |\,ax^n\,| = \inf_{\substack{x=R_1\\x=R_2}} |\,a\,|\,x^n$$

2) si n est impair

$$d\,[ax^n, I, 0] = \int_{-aR_1^n}^{aR_2^n} \Phi(|\,y\,|)dy = \operatorname{sgn} a \int_{-|a|\,R_1^n}^{|a|\,R_2^n} \Phi(|\,y\,|)dy = \operatorname{sgn} a \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(|\,y\,|)dy$$

$$= \operatorname{sgn} a = +1 \text{ ou } -1 \text{ selon que } a \text{ est positif ou négatif.}$$

Soit maintenant l'application $y : x \to a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ où les a_j, $j = 0, 1, \ldots, n$, sont des constantes réelles, $a_n \neq 0$, définie et à valeurs dans E^1, et soit $I =]-R, R[$, $R > 0$, un intervalle ouvert de E^1. Si R est suffisamment grand,

$$|\,a_n R^n - (a_n R^n + \ldots + a_1 R + a_0)\,| = |\,a_{n+1} R^{n-1} + \ldots + a_1 R + a_0\,| < |\,a_n R^n\,|$$

et dès lors, par le théorème de Rouché, $d\,[y(x), I, 0] = d\,[a_n x^n, I, 0]$ ce qui démontre le

Théorème 2-10-1 : Soit $y : x \to a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ où les a_j, $j = 0, 1, \ldots, n$, sont des constantes réelles, $a_n \neq 0$, une application de E^1 en lui-même. Si $I =]-R, R[$ et si R est un nombre positif suffisamment grand alors $d\,[y(x), I, 0] = 0$ si n est pair et

$$d\,[y(x), I, 0] = \frac{a_n}{|\,a_n\,|}$$

si n est impair.

Soit enfin $y : x \to y(x)$ une application continue de $[R_1, R_2]$ dans E^1 telle que

$$y(R_1) > 0, \ y(R_2) < 0. \tag{2.5.1}$$

(Le raisonnement serait le même si $y(R_1) < 0$ et $y(R_2) > 0$). Supposons tout d'abord que $y(x) \in C^0 [R_1, R_2] \cap C^1]R_1, R_2[$. Par suite des relations (2.5.1), il est clair que $d \{y(x),]R_1, R_2[, 0\}$ est défini, et, par le théorème 2-7, pour tout ε tel que

$$0 < \varepsilon < \inf_{\substack{x=R_1 \\ x=R_2}} | y(x) | \tag{2.5.2}$$

il existe un $z \in E^1$ pour lequel

$$| z | \leqslant \varepsilon \tag{2.5.3}$$

et

(i) $d \{y(x),]R_1, R_2[, 0\} = d \{y(x) - z,]R_1, R_2[, 0\}$;

(ii) l'équation

$$y(x) - z = 0, \ x \in [R_1, R_2],$$

possède au plus un nombre fini p de solutions *simples* appartenant à $]R_1, R_2[$. D'autre part, par suite des relations (2.5.1), (2.5.2) et (2.5.3), on a

$$y(R_1) > \varepsilon \geqslant z, \ -y(R_2) > \varepsilon \geqslant -z,$$

et, par conséquent, la fonction $f(y) = y(x) - z$ appartient à $C^0 [R_1, R_2] \cap C^1]R_1, R_2[$ est telle que $f(R_1) > 0$, $f(R_2) < 0$, et ses zéros situés dans $]R_1, R_2[$ sont en nombre fini et simples. Un raisonnement élémentaire montre alors que ce nombre p doit être impair, ce qui entraîne, par le corollaire 2-4 :

$$d \{y(x),]R_1, R_2[, 0\} = d \{y(x) - z,]R_1, R_2[, 0\} \neq 0.$$

Si $y(x) \in C^0 [R_1, R_2]$, il suffit de l'approcher, au sens de la définition 2-2, par une suite d'applications de classe C^1, ce qui démontre le

Théorème 2-10-2 : *Si* $y : x \to y(x)$ *est une application continue de* $[R_1, R_2]$ *dans* E^1 *telle que* $y(R_1) > 0$ (*resp.* < 0) *et* $y(R_2) < 0$ (*resp.* > 0), *alors*

$$d \{y(x),]R_1, R_2[, 0\} \neq 0.$$

2-6. *Degré topologique à l'origine d'applications homogènes d'un disque de* E^2

Soit $y : (x_1, x_2) \to [y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2)]$ une application telle que

$$y(x) \in C^0 (\overline{D}_R) \cap C^1(D_R)$$

où $D_R = \{x \in E^2 : | x | < R\}$, $R > 0$ et $y(x) \neq 0$ pour $x \in \dot{D}_R$. Supposons en outre les fonctions $y_1(x_1, x_2)$ et $y_2(x_1, x_2)$ homogènes de degrés respectifs m et n, m, n entiers positifs. L'application correspondante sera alors également dite *homogène*.

Démontrons tout d'abord le

Lemme 2-2 : *Si* $m \neq n$, *on peut toujours trouver une application homogène* $Y : (x_1, x_2) \to [Y_1(x_1, x_2), Y_2(x_1, x_2)]$ *telle que* $Y(x) \in C^0(\overline{D}_R) \cap C^1(D_R)$, $Y(x) \neq 0$ *pour* $x \in \dot{D}_R$, $Y_1(x, x_2)$ *et* $Y_2(x_1, x_2)$ *sont des fonctions homogènes de même degré* max (m, n) *et*

$$d [y(x), D_R, 0] = d [Y(x), D_R, 0]$$

Supposons, pour fixer les idées, que $m < n$. Considérons la famille d'applications $y_\tau : x \to y(x, \tau)$ définie par

$$y_1(x_1, x_2, \tau) \equiv y_1(x_1, x_2)\,[\tau(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{n-m}{2}} + (1 - \tau)]$$

$$y_2(x_1, x_2, \tau) \equiv y_2(x_1, x_2)$$

où $x \in \mathrm{D_R}$ et $\tau \in [0, 1]$. Pour $\tau = 0$, cette application se ramène à $y(x)$ et pour $\tau = 1$, on obtient une application $x \to \mathrm{Y}(x)$ où $\mathrm{Y}_1(x)$ et $\mathrm{Y}_2(x)$ sont homogènes de degré n et appartiennent à $\mathrm{C}^0(\overline{\mathrm{D}}_\mathrm{R}) \cap \mathrm{C}^1(\mathrm{D_R})$. D'autre part, pour $x \in \dot{\mathrm{D}}_\mathrm{R}$, $y_1(x_1, x_2, \tau) \equiv y_1(x_1, x_2)\,[\tau \mathrm{R}^{n-m} + (1 - \tau)] \neq 0$ puisque $\mathrm{R} > 0$ et $\tau \in [0, 1]$ et $y_2(x_1, x_2, \tau) \equiv y_2(x_1, x_2) \neq 0$ par hypothèse. Dès lors, par le théorème 2-3, $d\,[y(x, \tau), \mathrm{D_R}, 0]$ est constant pour $\tau \in [0, 1]$ ce qui démontre le lemme.

Nous pouvons donc, sans perte de généralité, nous borner à étudier des applications homogènes telles que $y_1(x)$ et $y_2(x)$ aient le même degré. Et, pour de tels systèmes, le théorème suivant est fondamental pour le calcul effectif du degré topologique :

Théorème 2-11 : *Si* $y : (x_1, x_2) \to [y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2)]$ *est une application telle que* :

(i) $y(x) \in \mathrm{C}^0(\overline{\mathrm{D}}_\mathrm{R}) \cap \mathrm{C}^1(\mathrm{D_R})$ *où* $\mathrm{D_R} = \{x \in \mathrm{E}^2 : |x| < \mathrm{R}\}$, $\mathrm{R} > 0$;

(ii) $y(x) \neq 0$ *pour* $x \in \dot{\mathrm{D}}_\mathrm{R}$;

(iii) $y_1(x_1, x_2)$ *et* $y_2(x_1, x_2)$ *sont des fonctions homogènes de degré* $m > 0$, *alors,*

(i) $d\,[y(x), \mathrm{D_R}, 0]$ *ne dépend pas de* R ;

(ii) $d\,[y(x), \mathrm{D_R}, 0]$ *est égal à l'indice de Kronecker* [57]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\dot{\mathrm{D}}_\mathrm{R}} \frac{y_1(x_1, x_2)\,dy_2(x_1, x_2) - y_2(x_1, x_2)\,dy_1(x_1, x_2)}{y_1^2(x_1, x_2) + y_2^2(x_1, x_2)} \tag{2.6.1}$$

c'est-à-dire à la rotation du champ de vecteurs $[y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2)]$ *dans* E^2 (*considéré comme espace vectoriel*) *le long de* $\dot{\mathrm{D}}_\mathrm{R}$.

La fonction $\Phi(r)$ satisfaisant aux conditions de la définition 2-1, on a

$$d\,[y(x), \mathrm{D_R}, 0] = \iint_\mathrm{D} \Phi\,[\,|y(x)|\,]\,\mathrm{J}\,[y(x)]\,dx$$

ou, en passant aux coordonnées polaires,

$$d\,[y(x), \mathrm{D_R}, 0] = \int_0^\mathrm{R} \int_0^{2\pi} \Phi\,[\,|y(r\cos\theta, r\sin\theta)|\,]\ \text{dét} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial r} & \dfrac{\partial y_1}{\partial \theta} \\[2ex] \dfrac{\partial y_2}{\partial r} & \dfrac{\partial y_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} dr\,d\theta$$

$$= \int_0^\mathrm{R} \int_0^{2\pi} \Phi\,[r^m\,|\mathrm{Y}(\theta)|\,]\ \text{dét} \begin{pmatrix} m\,r^{m-1}\,\mathrm{Y}_1(\theta) & r^m \dfrac{d\mathrm{Y}_1}{\partial\theta}(\theta) \\[2ex] m\,r^{m-1}\,\mathrm{Y}_2(\theta) & r^m \dfrac{d\mathrm{Y}_2}{d\theta}(\theta) \end{pmatrix} dr\,d\theta$$

où nous avons posé $Y(\theta) = (Y_1(\theta), Y_2(\theta)) = (y_1(\cos\theta, \sin\theta), y_2(\cos\theta, \sin\theta))$. Par conséquent,

$$d\,[y(x), D_R, 0] = m \int_0^{2\pi} [Y_1(\theta)\frac{dY_2}{d\theta}(\theta) - Y_2(\theta)\frac{dY_1}{d\theta}(\theta)]\,d\theta \int_0^R \Phi\,[r^m \mid Y(\theta)\mid] r^{2m-1}\,dr \tag{2.6.2}$$

Or, nous avons, par hypothèse,

$$\inf_{x\in\dot{D}_R} \mid y(x)\mid = R^m \inf_{\theta\in[0,2\pi]} [Y_1^2(\theta) + Y_2^2(\theta)]^{1/2} \neq 0$$

ce qui entraîne

$$\inf_{\theta\in[0,2\pi]} [Y_1^2(\theta) + Y_2^2(\theta)]^{1/2} \neq 0$$

et nous poserons cette quantité égale à $2\eta^m R^m$ où η est une constante strictement positive. En vertu de la définition 2-1, nous pouvons dès lors prendre pour $\Phi(\rho)$ une fonction continue telle que

$$\Phi(\rho) = 0 \text{ pour } \rho \in \left[0, \frac{\eta^m R^m}{2}\right] \text{ et } \rho \in [\eta^m R^m, \infty[$$

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \Phi(r) r\,dr\,d\theta = 1, \text{ soit } \int_0^\infty \Phi(r) r\,dr = \frac{1}{2\pi}.$$

Ces conditions seront en particulier réalisées par la fonction définie comme suit :

$$\Phi(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \rho \in \left[0, \dfrac{\eta^m R^m}{2}\right] \\ \alpha\left(\rho - \dfrac{\eta^m R^m}{2}\right) & \text{pour } \rho \in \left[\dfrac{\eta^m R^m}{2}, \dfrac{3\eta^m R^m}{4}\right] \\ -\alpha(\rho - \eta^m R^m) & \text{pour } \rho \in \left[\dfrac{3\eta^m R^m}{4}, \eta^m R^m\right] \\ 0 & \text{pour } \rho \in [\eta^m R^m, \infty[\end{cases}$$

avec $\alpha = \dfrac{4^3}{6\pi\eta^{3m}R^{3m}}$

On en déduit que

$$\Phi\,[r^m \mid Y(\theta)\mid] \begin{cases} 0 & \text{pour } r \in \left[0, \dfrac{R}{\mid 2Y(\theta)\mid^{1/m}}\right] \\ \alpha\left(r^m \mid Y(\theta)\mid - \dfrac{\eta^m R^m}{2}\right) & \text{pour } r \in \left[\dfrac{\eta R}{\mid 2Y(\theta)\mid^{1/m}}, \dfrac{3^{1/m}\eta R}{\mid 4Y(\theta)\mid^{1/m}}\right] \\ -\alpha(r^m \mid Y(\theta)\mid - \eta^m R^m) & \text{pour } r \in \left[\dfrac{3^{1/m}\eta R}{\mid 4Y(\theta)\mid^{1/m}}, \dfrac{\eta R}{\mid Y(\theta)\mid^{1/m}}\right] \\ 0 & \text{pour } r \in \left[\dfrac{\eta R}{\mid Y(\theta)\mid^{1/m}}, \infty\right[\end{cases}$$

ce qui permet dès lors de calculer aisément l'intégrale (2.6.2) et entraîne

$$d\,[y(x), \dot{\mathrm{D}}_{\mathrm{R}}, 0] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{Y}_1(\theta)\,\dfrac{d\mathrm{Y}_2}{d\theta}(\theta) - \mathrm{Y}_2(\theta)\,\dfrac{d\mathrm{Y}_1}{d\theta}(\theta)}{\mathrm{Y}_1^2(\theta) + \mathrm{Y}_2^2(\theta)}\,d\theta$$

Il est immédiat que cette quantité est égale à (2.6.1) quel que soit le rayon R de $\dot{\mathrm{D}}_{\mathrm{R}}$, ce qui démontre le théorème.

Nous allons donc pouvoir appliquer, pour le calcul de $d\,[y(x), \dot{\mathrm{D}}_{\mathrm{R}}, 0]$ les techniques utilisées pour le calcul de l'indice de Kronecker ou de la rotation d'un champ de vecteurs [57], et, en particulier, une formule importante que nous allons établir. L'intégrale (2.6.1) pouvant s'écrire

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\dot{\mathrm{D}}_{\mathrm{R}}} d\left[\operatorname{arctg}\frac{y_2(x_1, x_2)}{y_1(x_1, x_2)}\right]$$

où $\dot{\mathrm{D}}_{\mathrm{R}}$ est parcouru dans le sens direct, il est clair en vertu de la continuité que cette intégrale est égale au nombre p de zéros de $y_1(x_1, x_2)$ sur $\dot{\mathrm{D}}_{\mathrm{R}}$ en lesquels $y_2(x_1, x_2) > 0$ et $y_1(x_1, x_2)$ passe du signe + au signe —, diminué du nombre q de zéros de $y_1(x_1, x_2)$ sur $\dot{\mathrm{D}}_{\mathrm{R}}$ en lesquels $y_2(x_1, x_2) > 0$ et $y_1(x_1, x_2)$ passe du signe moins au signe plus. Par conséquent, si $y_1(x_1, x_2)$ s'annule en un nombre fini de points $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$ de $\dot{\mathrm{D}}_{\mathrm{R}}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, et si on remarque que, pour une rotation complète, à chaque zéro de $y_1(x_1, x_2)$ tel que $y_2(x_1, x_2) > 0$ et $y_1(x_1, x_2)$ passe du signe plus au signe moins (resp. du signe moins au signe plus) correspond un zéro de $y_1(x_1, x_2)$ tel que $y_2(x_1, x_2) < 0$ et $y_1(x_1, x_2)$ passe du signe moins au signe plus (resp. du signe plus au signe moins), on obtient aisément la formule [57] :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\dot{\mathrm{D}}_{\mathrm{R}}} d\left[\operatorname{arctg}\frac{y_2(x_1, x_2)}{y_1(x_1, x_2)}\right] = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{k} \operatorname{sgn} y_2(x^{(i)})\,[\operatorname{sgn} y_1(x^{(i)} - 0) - \operatorname{sgn} y_1(x^{(i)} + 0)] \tag{2.6.3}$$

où $\operatorname{sgn} y_1(x^{(i)} - 0)$ (resp. $\operatorname{sgn} y_1(x^{(i)} + 0)$) est la signature de y_1 pour des points x de $\dot{\mathrm{D}}_{\mathrm{R}}$ situés dans le voisinage de $x^{(i)}$ et antérieurs (resp. postérieurs) à ce point lorsque $\dot{\mathrm{D}}_{\mathrm{R}}$ est décrit dans le sens direct. Si $y(x) \in \mathrm{C}^1(\mathrm{U})$, où U est un ouvert de E^2 contenant $\overline{\mathrm{D}}_{\mathrm{R}}$, et si la courbe $\dot{\mathrm{D}}_{\mathrm{R}}$ est représentée paramétriquement par $x_1 = x_1(\theta)$, $x_2 = x_2(\theta)$, $\theta \in [\alpha, \beta]$, $x_i(\alpha) = x_i(\beta)$, $i = 1, 2$, où $x_i(\theta) \in \mathrm{C}^1\,[\alpha, \beta]$, alors, les θ_i étant les valeurs de θ telles que

$$y_1\,[x_1(\theta), x_2(\theta)] \equiv \mathrm{Y}_1(\theta) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, k,$$

il est immédiat que l'on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\dot{\mathrm{D}}_{\mathrm{R}}} d\left[\operatorname{arctg}\frac{y_2(x_1, x_2)}{y_1(x_1, x_2)}\right] = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \operatorname{sgn} \mathrm{Y}_2(\theta_i)\operatorname{sgn}\frac{d\mathrm{Y}_1}{d\theta}(\theta_i) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \operatorname{sgn}\left[\mathrm{Y}_2(\theta_i)\frac{d\mathrm{Y}_1}{d\theta}(\theta_i)\right] \tag{2.6.4}$$

Il suffit d'appliquer la définition de la dérivée.

2-7. *Calcul du degré topologique à l'origine d'applications multilinéaires de* E^2

Une application *multilinéaire* définie dans E^2 est une application

$$y : (x_1, x_2) \to [y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2)]$$

où

$$y_1(x_1, x_2) \equiv a_0 x_1^m + a_1 x_1^{m-1} x_2 + \dots + a_m x_2^m$$

$$y_2(x_1, x_2) \equiv b_0 x_1^n + b_1 x_1^{n-1} x_2 + \dots + b_n x_2^n \tag{2.7.1}$$

les a_i, $i = 0, 1, 2, \dots, m$, et les b_j, $j = 0, 1, \dots n$, étant des constantes réelles, m et n des entiers positifs. Une telle application est donc homogène. Elle sera dite *non dégénérée* si $x_1 = x_2 = 0$ est le seul zéro commun aux polynômes $y_1(x_1, x_2)$ et $y_1(x_1, x_2)$; dans ce cas, y_1 et y_2 n'ont donc pas de facteur linéaire réel commun. Elle sera dite *dégénérée* dans le cas contraire. Les zéros de $y_1(x_1, x_2)$ sont situés sur les droites de E^2 dont les coefficients angulaires k sont solutions de l'équation

$$y_1(1, k) \equiv a_0 + a_1 k + \dots + a_m k^m = 0 \tag{2.7.2}$$

(en tenant compte de la solution $k = +\infty$ si le degré de ce polynôme est inférieur à m), et ceux de $y_2(x_1, x_2)$ se trouvent sur les droites de coefficients angulaires k tels que

$$y_2(1, k) \equiv b_0 + b_1 k + \dots + b_n k^n = 0. \tag{2.7.3}$$

Une application multilinéaire sera donc non dégénérée si ces deux équations en k n'ont pas de racine commune (y compris $k = +\infty$) soit, en d'autres termes, si les degrés respectifs sont bien m et n et si le p.g.c.d. des deux polynômes $y_1(1, k)$ et $y_2(1, k)$ n'a pas de racine réelle. Remarquons que le degré topologique à l'origine d'une application multilinéaire non dégénérée $y(x)$ existe pour tout disque D_R de E^2 centré à l'origine car, quel que soit $R > 0$, $y(x) \neq 0$ pour $x \in \dot{D}_R$.

Écrivons maintenant (2.7.1) sous forme factorisée :

$$y_1(x_1, x_2) = K_1 \prod_{i=1}^{m} (x_2 - k_i x_1)^{p_i} \tag{2.7.4}$$

$$y_2(x_1, x_2) = K_2 \prod_{j=1}^{n} (x_2 - l_j x_1)^{q_j}$$

où les k_i, $i = 1, 2, \dots, m$ et les l_j, $j = 1, 2, \dots, n$ sont respectivement les racines de (2.7.2) et (2.7.3), p_i et q_j étant leur multiplicité. Si certaines racines sont égales à $+\infty$, le facteur correspondant dans (2.7.4) sera pris égal à x_1. En vertu du théorème 2-8, si $Y : x \to Y(x)$ est l'application définie par

$$Y_1(x_1, x_2) \equiv \prod_{i=1}^{m} (x_2 - k_i x_1)^{p_i}, \; Y_2(x_1, x_2) \equiv \prod_{j=1}^{n} (x_2 - l_j x_1)^{q_j},$$

alors, pour tout disque D_R centré à l'origine

$$d\,[y(x), D_R, 0] = \operatorname{sgn}(K_1 K_2)\, d\,[Y(x), D_R, 0]$$

et il suffit donc de calculer $d\,[Y(x), D_R, 0]$.

En utilisant un raisonnement dû à J. CRONIN [29] et basé sur le théorème 2-3, on peut montrer que certains facteurs peuvent être supprimés dans $Y(x)$ sans modifier $d\,[Y(x), D_R, 0]$. On peut négliger :

1) *les paires de facteurs* $(x_2 - k_{i_1}x_1)$, $(x_2 - k_{i_2}x_1)$ *dans lesquelles* $k_{i_1} = k_{i_2}$ *(auquel cas* $(x_2 - k_{i_1}x_1)(x_2 - k_{i_2}x_1) = x_2^2 + |k_{i_1}|^2 x_1^2 > 0$*).*

2) *les facteurs* $(x_2 - k_{i_1}x_1)^{p'_{i_1}}$ *où* k_{i_1} *est réel et* p'_{i_1} *pair.*

3) *les paires de facteurs* $(x_2 - k_{i_1}x_1)$, $(x_2 - k_{i_2}x_1)$ *telles que* $k_{i_1} < k_{i_2}$ *et qu'il n'existe aucun* l_j *ou* k_{i_3} *satisfaisant aux inégalités*

$$k_{i_1} < l_j < k_{i_2} \text{ ou } k_{i_1} < k_{i_3} < k_{i_2}. \tag{2.7.5}$$

4) *les paires de facteurs* $(x_2 - k_1x_1)$, $(x_2 - k_mx_1)$ *où* k_1 *et* k_m *sont le plus petit et le plus grand des nombres* $k_1, k_2, \ldots, k_m, l_1, l_2, \ldots, l_n$ *(uniquement dans le cas où tous les deux sont des* k_i*).*

5) *les facteurs énumérés ci-dessus avec les* k_i *remplacés par les* l_j.

Si tous les facteurs de $Y_1(x_1, x_2)$ ou $Y_2(x_1, x_2)$ sont inclus dans les cinq types que nous venons de considérer, le degré topologique de $Y(x)$ en 0 par rapport à tout disque D_R centré à l'origine est égal à zéro puisque, dans ce cas, $Y(x)$ est homotope à une application dont une des deux composantes est égale à une constante. Sinon, on est ramené, en vertu de ce qui précède, à calculer le degré d'une application $y : (x_1, x_2) \to [y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2)]$ dont les deux composantes y_1 et y_2 possèdent le même nombre r de facteurs $(x_2 - k_ix_1)$, $(x_2 - l_ix_1)$, les k_i et l_i étant tels que

$$k_1 < l_1 < k_2 < \ldots < k_r < l_r \tag{2.7.6}$$

ou

$$l_1 < k_1 < l_2 < \ldots < l_r < k_r \tag{2.7.7}$$

et l'exposant des facteurs étant toujours égal à un. Puisque les opérations 1) à 5) consistent toujours à supprimer un nombre pair de facteurs linéaires dans l'une ou l'autre des composantes de $Y(x)$, il est clair que, si m et n dans (2.7.1) sont de parité différente, on obtient nécessairement une application dont une des composantes est une constante, ce qui démontre le

Théorème 2-12 : D_R *étant un disque ouvert quelconque centré à l'origine de* E^2 *et* $y : (x_1, x_2) \to [y_1(x_2, x_2), y_2(x_1, x_2)]$ *l'application multilinéaire non dégénérée définie par* (2.7.1), *si* m *et* n *sont de parité différente, alors*

$$d\,[y(x), D_R, 0] = 0.$$

Il ne nous reste plus maintenant qu'à calculer le degré topologique à l'origine des applications multilinéaires

$$y : (x_1, x_2) \to [y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2)]$$

telles que

$$y_1(x_1, x_2) \equiv \prod_{i=1}^{r} (x_2 - k_ix_1), \; y_2(x_1, x_2) = \prod_{i=1}^{r} (x_2 - l_ix_1) \tag{2.7.8}$$

les k_i et l_i satisfaisant à (2.7.6) ou (2.7.7). Si nous passons aux coordonnées polaires, nous constatons immédiatement que les points de $\dot{D}_R$ où $y_1(x_1, x_2)$ s'annule sont les points d'argument $\theta_i \in [0, 2\pi]$ tels que $\theta_i = \operatorname{arctg} k_i$, $\theta_{s+i} = \operatorname{arctg} k_i + \pi$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Ils sont donc en nombre $2r$ et, en appliquant la formule (2.6.4) pour un disque de rayon un (puisque le résultat est indépendant de R), on obtient

$$d\,[y(x), D_1, 0] =$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2r} \operatorname{sgn}\left\{\left[\prod_{i=1}^{r}(\cos\theta_i - l_j \sin\theta_i)\right]\left[\prod_{\substack{s=1\\ s\neq i}}^{r}(\sin\theta_i - k_s\cos\theta_i)\right](\cos\theta_i + k_i\sin\theta_i)\right\}$$

$$= -\sum_{i=1}^{r}\operatorname{sgn}\left\{\left[\prod_{j=1}^{r}(k_i - l_j)\right]\left[\prod_{\substack{s=1\\ s\neq i}}^{r}(k_i - k_s)\right](1 + k_i^2)\right\}$$

Dès lors,

$$d\,[y(x), D_1, 0] = -\sum_{i=1}^{r}[(-1)^{r-i+1}(-1)^{r-i}] = r$$

si les k_i et l_i satisfont à (2.7.6) et

$$d\,[y(x), D_1, 0] = -\sum_{i=1}^{r}[(-1)^{r-i}(-1)^{r-1}] = -r$$

si les k_i et l_i satisfont à (2.7.7).

Nous avons donc démontré le

Théorème 2-13 : D_R *étant un disque ouvert quelconque centré à l'origine de* E^2 *et* $y : (x_1, x_2) \to [y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2)]$ *l'application multilinéaire non dégénérée définie par* (2.7.1), *si m et n sont de même parité et si, par le processus de réduction introduit dans ce paragraphe,* $y(x)$ *se ramène à une application de type* (2.7.8) *avec*

$$k_1 < l_1 < k_2 < \ldots < k_r < l_r$$

$$(\text{resp. } l_1 < k_1 < l_2 < \ldots < l_r < k_r),$$

alors

$$d\,[y(x), D_R, 0] = r \operatorname{sgn}(K_1K_2) \ (\text{resp. } -r \operatorname{sgn}(K_1K_2))$$

Si la forme factorisée (2.7.4) de (2.7.1) n'est pas connue, on peut alors utiliser, pour calculer le degré topologique de y, un algorithme basé sur la théorie des suites de Sturm et dont on pourra trouver l'exposé détaillé en [35], [57] ou [71].

D'autre part, ainsi que l'ont montré J. Cronin [29] et l'école de M. A. Krasnosels'kii [57], le théorème de Poincaré-Bohl permet de ramener le calcul du degré topologique de certaines applications définies dans E^2 à celui d'applications multilinéaires.

Considérons tout d'abord l'application

$$y : (x_1, x_2) \to [y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2)]$$

définie dans E^2 où

$$y_1(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^{m} y_1^{(i)}(x_1, x_2), \quad y_2(x_1, x_2) = \sum_{j=0}^{n} y_2^{(j)}(x_1, x_2) \tag{2.7.9}$$

les $y_1^{(i)}(x_1, x_2)$ et $y_2^{(j)}(x_1, x_2)$ étant des polynômes homogènes en x_1 et x_2 de degrés respectifs i et j. Définissons l'application Y :

$$\mathrm{Y} : (x_1, x_2) \to [\mathrm{Y}_1(x_1, x_2), \mathrm{Y}_2(x_1, x_2)] \text{ par}$$

$$\mathrm{Y}_1(x_1, x_2) = y_1^{(m)}(x_1, x_2), \; \mathrm{Y}_2(x_1, x_2) = y_2^{(n)}(x_1, x_2) \tag{2.7.10}$$

et supposons que $y_1^{(m)}$ et $y_2^{(n)}$ n'ont pas de facteur linéaire réel commun, ce qui entraîne la non-dégénérescence de $\mathrm{Y}(x)$. On trouvera en [29], [57] ou [71] la démonstration du

Théorème 2-14 : $y : (x_1, x_2) \to [y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2)]$ *et* $\mathrm{Y} : (x_1, x_2) \to [\mathrm{Y}_1(x_1, x_2), \mathrm{Y}_2(x_1, x_2)]$ *étant les applications définies dans* E^2 *respectivement par* (2.7.9) *et* (2.7.10), *si* $\mathrm{D_R}$ *est un disque de* E^2 *centré à l'origine et de rayon* R *suffisamment grand, alors,*

$$d\,[y(x), \mathrm{D_R}, 0] = d\,[\mathrm{Y}(x), \mathrm{D_R}, 0].$$

Soit maintenant l'application $y : (x_1, x_2) \to [y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2)]$ définie par

$$\begin{aligned} y_1(x_1, x_2) &= y_1^{(m)}(x_1, x_2) + \mathrm{R}_1(x_1, x_2) \\ y_2(x_1, x_2) &= y_2^{(n)}(x_1, x_2) + \mathrm{R}_2(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{2.7.10}$$

où $y_1^{(m)}$ et $y_2^{(n)}$ sont des polynômes homogènes en x_1 et x_2 de degrés respectifs m et n et sans facteurs linéaires réels communs, tandis que les fonctions $\mathrm{R}_i(x_1, x_2)$, $i = 1, 2$, appartiennent à $\mathrm{C}^0(\mathrm{E}^2)$ et sont respectivement d'ordre $m + 1$ et $n + 1$, une fonction $\mathrm{R}(x_1, x_2)$ étant dite d'ordre $k + 1$ si

$$\lim_{x_1^2 + x_2^2 \to 0} \frac{\mathrm{R}(x_1, x_2)}{(x_1^2 + x_2^2)^{m/2}} = 0$$

Considérons l'application $\mathrm{Y} : (x_1, x_2) \to [\mathrm{Y}_1(x_1, x_2), \mathrm{Y}_2(x_1, x_2)]$ définie par

$$\mathrm{Y}_1(x_1, x_2) = y_1^{(m)}(x_1, x_2), \; \mathrm{Y}_2(x_1, x_2) = y_2^{(n)}(x_1, x_2). \tag{2.7.12}$$

Le théorème suivant est également démontré en [29], [57] et [71] :

Théorème 2-15 : $y : (x_1, x_2) \to [y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2)]$ *et* $\mathrm{Y} : (x_1, x_2) \to [\mathrm{Y}_1(x_1, x_2), \mathrm{Y}_2(x_1, x_2)]$ *étant les applications définies dans* E^2 *respectivement par* (2.7.11) *et* (2.7.12), *si* $\mathrm{D_R}$ *est un disque de* E^2 *centré à l'origine et de rayon* R *suffisamment petit, alors*

$$d\,[y(x), \mathrm{D_R}, 0] = d\,[\mathrm{Y}(x), \mathrm{D_R}, 0].$$

Signalons enfin, sans entrer dans le détail, qu'un algorithme dû à P. P. Zabreiko [57, 97] permet de calculer le degré topologique à l'origine d'applications très générales définies dans E^2, et qu'on peut également déduire du théorème 2-7 des résultats, dus à J. Cronin [21, 29], sur le calcul du degré de certaines applications définies dans E^n. Enfin, le théorème du point fixe de Brouwer [8], le théorème de Miranda [72], ainsi que le théorème des fonctions implicites et certaines de ses généralisations, peuvent se déduire facilement de la théorie du degré topologique (cf. [51], [57], et [71]).

Chapitre 3

LA MÉTHODE DE CESARI

3-1. *Introduction*

Ce chapitre est consacré à l'exposé d'une méthode générale d'étude des solutions périodiques de systèmes différentiels périodiques ou autonomes. Elle est due à L. Cesari [15, 16] et peut être considérée comme l'extension d'un algorithme élaboré par cet auteur pour l'étude des systèmes linéaires à coefficients périodiques [11] et appliqué en outre, en collaboration avec J. K. Hale [12, 13, 17] aux problèmes d'existence et de stabilité des solutions périodiques de systèmes différentiels dont la non-linéarité est petite (systèmes quasi-linéaires ou faiblement non linéaires). H. W. Knobloch [53] a apporté d'importantes contributions à cette méthode et l'a appliquée à des problèmes de nature qualitative relatifs à des équations différentielles non autonomes du second ordre [54, 55]. L. Cesari [18], J. Locker [64], S. Bancroft, J. K. Hale et D. Sweet [3] ont alors successivement étendu le procédé à l'étude de problèmes aux limites pour des équations non linéaires dans des espaces de Hilbert et de Banach.

En adoptant des hypothèses mathématiques plus restrictives que celles de [16] et [53], mais réalisées dans la plupart des applications, on peut donner à la méthode de Cesari une forme particulièrement simple [66] et très voisine de celle proposée par J. K. Hale [48, 49] dans le cas des systèmes faiblement non linéaires. C'est le point de vue que nous adopterons ici et nous considérerons, contrairement à Cesari et Knobloch, des systèmes différentiels contenant un paramètre. Nous aurons également l'occasion d'obtenir quelques propriétés nouvelles utilisées dans la suite de ce travail et d'étendre aux systèmes non linéaires quelconques certaines notions introduites par J. K. Hale [48, 49] pour les systèmes faiblement non linéaires ainsi que les théorèmes qui en découlent.

3-2. *Définition des systèmes différentiels étudiés*

Considérons le système différentiel réel

$$\dot{x} = q(x, t, \lambda) \tag{3.2.1}$$

où $x = \operatorname{col}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $q = \operatorname{col}(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$, $t \in\,]-\infty, \infty[$, $\lambda \in [0, \Lambda]$, $\Lambda > 0$. Si $u = \operatorname{col}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, nous prendrons comme norme de ce vecteur u :

$$\| u \| = \max_{j=1, \ldots, n} | u_j |.$$

Dans (3.2.1), q est une fonction vectorielle définie pour $\| x \| \leqslant \mathrm{R}$, $\mathrm{R} > 0$ fini ou non, $t \in\,]-\infty, \infty[$, $\lambda \in [0, \Lambda]$, continue et périodique en t de période $\mathrm{T} = \dfrac{2\pi}{\omega}$

(ou indépendante de t auquel cas T est arbitraire), continue en λ et satisfaisant à la condition de Lipschitz

$$\| q(x^1, t, \lambda) - q(x^2, t, \lambda) \| \leqslant \mathrm{M} \| x^1 - x^2 \| \tag{3.2.2}$$

M étant une constante positive et $\| x^1 \| \leqslant \mathrm{R}$, $\| x^2 \| \leqslant \mathrm{R}$, $t \in]-\infty, \infty[$, $\lambda \in [0, \Lambda]$(*).

Cette condition sera en particulier réalisée si les fonctions $\frac{\partial q}{\partial x_j}(x, t, \lambda)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, existent et sont continues en x, t, λ (ainsi que bornées si R n'est pas fini) dans un ouvert contenant l'ensemble considéré.

Si R est fini, nous poserons

$$\mathrm{K} = \sup_{\| x \| \leqslant \mathrm{R},\, t \in [0, \mathrm{T}],\, \lambda \in [0, \Lambda]} \| q(x, t, \lambda) \| \tag{3.2.3}$$

tandis que si R n'est pas fini, la relation (3.2.2) entraîne, pour $x \in \mathrm{E}^n$, $t \in]-\infty, \infty[$, $\lambda \in [0, \Lambda]$,

$$\| q(x, t, \lambda) \| \leqslant \| q(x, t, \lambda) - q(0, t, \lambda) \| + \| q(0, t, \lambda) \| \leqslant \mathrm{M} \| x \| + \mathrm{K}_1 \tag{3.2.4}$$

où $\mathrm{K}_1 = \sup_{t \in [0, \mathrm{T}],\, \lambda \in [0, \Lambda]} \| q(0, t, \lambda) \|$.

3-3. *Théorème fondamental*

Soit S l'espace de Banach des fonctions vectorielles $x(t) = [\mathrm{col}\; x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]$ réelles, continues et périodiques de période T introduit au paragraphe 1-2. Rappelons que la norme dans S est définie par

$$\nu(x) = \sup_{t \in [0, \mathrm{T}]} \| x(t) \|.$$

Supposons tout d'abord R fini et soit R_1 un nombre réel tel que $0 < \mathrm{R}_1 < \mathrm{R}$. m étant un entier positif ou nul et S_0 étant l'ensemble défini par

$$\{x \in \mathrm{S} : x(t) = \mathrm{P}_m x(t)\}$$

soit $x^0(t)$ un élément quelconque de S_0 satisfaisant à

$$\nu(x^0) \leqslant \mathrm{R}_1 < \mathrm{R}. \tag{3.3.1}$$

Si $\mathrm{S}_\mathrm{R}^0 = \{x \in \mathrm{S} : \nu(x) \leqslant \mathrm{R}, \mathrm{P}_m x = x^0\}$, il résulte de la continuité de P_m que cet ensemble est un fermé de S. Dans S_R^0, considérons, avec L. Cesari [16], l'opérateur

$$\mathcal{T}_m = \mathrm{P}_m + \mathrm{H}(\mathrm{I} - \mathrm{P}_m) q$$

où H est défini en (1.3.3) et q par

$$qx : \mathrm{col}\,(q_1 x, q_2 x, \ldots, q_n x),\; q_j x = q_j\,[x(t), t, \lambda],\; j = 1, 2, \ldots, n,$$

Si pour $x \in \mathrm{S}_\mathrm{R}^0$,

$$y = \mathcal{T}_m x = x^0 + \mathrm{H}(\mathrm{I} - \mathrm{P}_m) qx,$$

(*) Remarquons qu'en considérant (3.2.1) comme un système différentiel au sens de Caratheodory [17], on peut facilement généraliser les résultats de ce chapitre au cas où le second membre de (3.2.1) est seulement supposé intégrable au sens de Lebesgue en t.

alors

$$\mathcal{T}_m : S_R^0 \to S \text{ et } P_m y = x^0 + P_m H(I - P_m)qx = x^0$$

en vertu des propriétés de P_m et de H.

D'autre part, en utilisant (1.3.5) et (3.2.3),

$$\nu(y) \leqslant \nu(x^0) + \nu\,[H(I - P_m)qx] \leqslant R_1 + 2^{1/2}\omega^{-1}\sigma(m)K$$

et, si on choisit m suffisamment grand pour que $2^{1/2}\omega^{-1}\sigma(m)K \leqslant R - R_1$, ce qui est toujours possible par suite de (1.3.6), il vient

$$\nu(y) \leqslant R.$$

En outre, si $x^i \in S_R^0$, $y^i = \mathcal{T}_m x^i$, $i = 1, 2$,

$$\nu(y^1 - y^2) = \nu\,\{H\,[(qx^1 - qx^2) - P_m(qx^1 - qx^2)]\} \leqslant 2^{1/2}\omega^{-1}\sigma(m)M\nu(x^1 - x^2)$$

en utilisant (1.3.5) et (3.2.2). Dès lors, $\mathcal{T}_m$ sera une contraction si on prend m suffisamment grand pour que $2^{1/2}\omega^{-1}\sigma(m)M < 1$. Il existe donc un entier $m_0 \geqslant 0$ tel que, pour toute valeur finie et entière de $m \geqslant m_0$, $\mathcal{T}_m$ soit une contraction de $S_R^0 \subset S$ en lui-même. Il résulte alors du théorème de Banach [86] que $\mathcal{T}_m$ possède un et un seul point fixe dans S_R^0, c'est-à-dire un et un seul élément $y \in S_R^0$ tel que

$$y = \mathcal{T}_m y = x^0 + H(I - P_m)qy. \tag{3.3.2}$$

Si R n'est pas fini, nous devons introduire une légère variante du procédé due à H. W. Knobloch [53]. $x^0(t)$ étant un élément quelconque de S_0, introduisons comme précédemment l'opérateur

$$\mathcal{T}_m = P_m + H(I - P_m)q$$

qui est, cette fois, défini partout dans S. En vertu de (1.3.5) et (3.2.4), si $x \in S$, $x^i \in S$, $y = \mathcal{T}_m x$, $y^i = \mathcal{T}_m x^i$, $i = 1, 2$,

$$\nu(y) \leqslant \nu(x^0) + 2^{1/2}\omega^{-1}\sigma(m)\,[M\nu(x) + K_1]$$
$$\nu(y^1 - y^2) \leqslant 2^{1/2}\omega^{-1}\sigma(m)M\nu(x^1 - x^2).$$

Choisissons maintenant m suffisamment grand pour que

$$2^{1/2}\omega^{-1}\sigma(m)M < 1 \tag{3.3.3}$$

et $R > 0$ suffisamment grand pour que

$$\nu(x^0) + 2^{1/2}\omega^{-1}\sigma(m)(MR + K_1) \leqslant R$$

c'est-à-dire

$$R \geqslant [1 - 2^{1/2}\omega^{-1}\sigma(m)M]^{-1}\,[\nu(x^0) + 2^{1/2}\omega^{-1}\sigma(m)K_1]$$

ce qui est toujours possible en vertu de la condition (3.3.3).

$\mathcal{T}_m$ est alors une contraction de $S_R^0 = \{x \in S : P_m x = x^0, \nu(x) \leqslant R\}$ en lui-même et possède donc un point fixe unique y dans S_R^0.

Ainsi donc, que R soit fini ou non, et toujours en vertu du théorème de Banach, le point fixe unique y dont nous venons de démontrer l'existence peut s'obtenir comme limite du processus d'approximations successives défini par

$$\begin{gathered} y^{k+1} = x^0 + H(I - P_m)q(y^k, t, \lambda),\ k = 0, 1, 2, \ldots \\ y^0 = x^0, \end{gathered} \tag{3.3.4}$$

et on a la relation

$$\nu(y^k - y) \leqslant \theta_0^k(1 - \theta_0)^{-1}\nu(y^1 - y^0)$$

avec $\theta_0 = 2^{1/2}\omega^{-1}\sigma(m)\mathrm{M} < 1$. En outre, il est immédiat à partir de (3.3.2) que ce point fixe $y(t)$ est une fonction périodique de période T une fois continûment dérivable par rapport à t pour $t \in]-\infty, \infty[$ et qui satisfait à

$$\mathrm{P}_m y = x^0,$$
$$\dot{y} = q(y, t, \lambda) + \mathrm{P}_m [\dot{y} - q(y, t, \lambda)] = q(y, t, \lambda) + \dot{x}^0 - \mathrm{P}_m q(y, t, \lambda) \qquad (3.3.5)$$

Nous avons donc démontré le

Théorème 3-1 : *Sous les hypothèses énoncées au paragraphe* 3-2, *il existe un entier* $m_0 \geqslant 0$ *tel que, pour tout entier* $m \geqslant m_0$ *et tout polynôme trigonométrique de période* T *et d'ordre* m *satisfaisant, si* R *est fini, à* (3.3.1), *il existe une et une seule fonction* $y(t)$ *périodique de période* T, *une fois continûment dérivable par rapport à* t *pour* $t \in]-\infty,$ $\infty[$ *et vérifiant la relation* (3.3.5).

Cette fonction $y(t)$ *peut s'obtenir comme limite de la suite d'approximations successives définie par* (3.3.4).

3-4. *Propriétés de la fonction associée*

La fonction $y(t)$ dont le théorème 3-1 vient de démontrer l'existence sera dite la *fonction associée* au polynôme trigonométrique $x^0(t)$ par le système différentiel (3.2.1). Il est clair, en vertu de (3.3.4), que la fonction $y(t)$ dépend de λ et de $x^0(t)$, c'est-à-dire de ses coefficients de Fourier $a_0, a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m$. Nous allons étudier cette dépendance en détail. Posons

$$\alpha = \mathrm{col}\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{(2m+1)n}) = \mathrm{col}\,(a_{0,1}, \ldots, a_{0,n}, a_{1,1}, \ldots, a_{1,n}, b_{1,1}, \ldots, b_{1,n}, \ldots, b_{m,n}). \qquad (3.4.1)$$

α est donc un vecteur de dimension $(2m + 1)n$. On doit à L. CESARI [16] le

Théorème 3-2 : *Sous les hypothèses du théorème* 3-1, y *est une fonction lipschitzienne de* x^0 (*donc de* α).

Soient $x^0 = a_0 + \sum_{s=1}^{m} (a_s \cos s\omega t + b_s \sin s\omega t)$ et $x'^0 = a'_0 + \sum_{s=1}^{m} (a'_s \cos s\omega t +$ $b'_s \sin s\omega t)$ deux polynômes trigonométriques de période T satisfaisant à (3.3.1) si R est fini, et soient $\mathrm{S}_\mathrm{R}^0 = \{x \in \mathrm{S} : \nu(x) \leqslant \mathrm{R},\ \mathrm{P}_m x = x^0\}$, $\mathrm{S}_\mathrm{R}'^0 = \{x \in \mathrm{S} : \nu(x) \leqslant \mathrm{R},$ $\mathrm{P}_m x = x'^0\}$ les ensembles correspondants. Si $y = y_{x^0}(t)$ et $y' = y_{x'^0}(t)$ sont les points fixes respectifs, alors,

$$\nu(y - y') \leqslant \nu(x^0 - x'^0) + 2^{1/2}\omega^{-1}\sigma(m)\mathrm{M}\nu(y - y')$$

ce qui entraîne, puisque $1 - 2^{1/2}\omega^{-1}(m)\mathrm{M}$ est positif pour $m \geqslant m_0$,

$$\nu(y - y') \leqslant [1 - 2^{1/2}\omega^{-1}\sigma(m)\mathrm{M}]^{-1}\nu(x^0 - x'^0).$$

En outre, on a, pour $j = 1, 2, \ldots, n$,

$$| x_j^0 - x_j'^0 | \leqslant | a_{0,j} - a_{0,j} | + \sum_{s=1}^{m} (| a_{s,j} - a'_{s,j} | + | b_{s,j} - b'_{s,j} |)$$
$$\leqslant (2m + 1)\, || \alpha - \alpha' ||$$

si on pose $\| \alpha \| = \max\limits_{\substack{j=1,2,\ldots,n \\ s=1,2,\ldots,m}} (| a_{0,j} |, | a_{s,j} |, | b_{s,j} |)$

Par conséquent,

$$\nu(y - y') \leqslant [1 - 2^{1/2}\omega^{-1}\sigma(m)\mathrm{M}]^{-1} (2m + 1) \| \alpha - \alpha' \|,$$

ce qui démontre le théorème.

Dans le même ordre d'idées, on a le

Théorème 3-3 : *Sous les hypothèses du théorème* 3-1, *y est une fonction continue de λ pour $\lambda \in [0, \Lambda]$.*

Cela résulte du fait que les fonctions y^k de la suite $\{y^k(t)\}$ définie en (3.3.4) sont des fonctions continues de λ et que la convergence est uniforme en λ pour $\lambda \in [0, \Lambda]$ puisque les constantes K et M ne dépendent pas de λ.

Moyennant des hypothèses de continuité pour les dérivées partielles de $q(x, t, \lambda)$ par rapport à ses différents arguments, on peut démontrer des propriétés analogues pour les dérivées d'ordre correspondant de $y(t, \alpha, \lambda)$ par rapport aux composantes de α et de λ. Nous renverrons le lecteur, pour la démonstration de ces résultats, aux références [53], [66] et [71].

Le théorème suivant établit un lien entre les propriétés d'annulation de $q(x, t, \lambda)$, $x^0(t)$ et la fonction associée $y(t)$:

Théorème 3-4 : *Si, pour l des n indices $1, 2, \ldots, n$, $1 \leqslant l \leqslant n$, soit $i_1, i_2, \ldots, i_l$, le système différentiel* (3.2.1) *est tel que*

$$[q_{i_k}(x, t, \lambda)]_{x_{i_1} = \ldots = x_{i_l} = 0} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, l,$$

quels que soient $t \in]-\infty, \infty[$ et $\lambda \in [0, \Lambda]$ et si on choisit un polynôme trigonométrique $x^0(t)$ tel que

$$x^0_{i_k}(t) \equiv 0, \quad k = 1, 2, \ldots, l,$$

alors la fonction associée $y(t)$ satisfait à

$$y_{i_k}(t) \equiv 0, \quad k = 1, 2, \ldots, l.$$

En vertu du théorème 3-1, les composantes $y_{i_k}(t)$ sont les limites respectives des suites d'approximations successives définies par

$$y^{j+1}_{i_k}(t) = \mathrm{H}(\mathrm{I} - \mathrm{P}_m) q_{i_k}(y^j, t, \lambda), \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

$$y^0_{i_k}(t) \equiv 0, \quad k = 1, 2, \ldots, l.$$

Par suite des hypothèses faites sur $q(x, t, \lambda)$, si $y^j_{i_k}(t) \equiv 0$, $y^{j+1}_{i_k}(t) \equiv 0$, ce qui démontre le théorème.

Corollaire 3-1 : *Si le système différentiel* (3.2.1) *est tel que, pour tout $t \in]-\infty, \infty[$ et $\lambda \in [0, \Lambda]$,*

$$q(0, t, \lambda) = 0,$$

et si $x^0(t) \equiv 0$, la fonction associée $y(t)$ est également identiquement nulle.

3-5. *Propriété* E *par rapport à* (Q, ε, τ)

Nous allons généraliser, dans ce paragraphe, un intéressant concept dû à J. K. Hale [48, 49].

Définition 3-1 : *Le système différentiel* (3.2.1) *possède la propriété* E *par rapport à* (Q, ε, τ) *s'il existe une matrice constante* Q *de dimension* $n \times n$ *et deux nombres réels* ε *et* τ *tels que, pour* $\| x \| \leqslant R$, $t \in]-\infty, \infty[$ *et* $\lambda \in [0, \Lambda]$, *on ait* :

$$Q^2 = I, \ \varepsilon^2 = 1, \tag{3.5.1}$$

$$Qq(Qx, \varepsilon t + \tau, \lambda) = \varepsilon q(x, t, \lambda)$$

Cette propriété signifie simplement que le système différentiel (3.2.1) est invariant sous l'effet de la substitution

$$t \to \varepsilon t + \tau, \ x \to Qx.$$

En effet, (3.2.1) devient alors

$$\varepsilon^{-1} \frac{d}{dt} (Qx) = q(Qx, \varepsilon t + \tau, \lambda),$$

et, en multipliant les deux membres par εQ et en utilisant (3.5.1), on obtient (3.2.1). Lorsque $\varepsilon = -1$ et $\tau = 0$, on retrouve la notion de propriété E par rapport à Q définie par J. K. Hale [48, 49] et pour laquelle nous conserverons cette dénomination.

Le théorème suivant généralise un résultat de J. K. Hale [48, 49] :

Théorème 3-5 : *Supposons que le système différentiel* (3.2.1) *possède la propriété* E *par rapport à* (Q, ε, τ). *Si* $x^0(t)$ *est un polynôme trigonométrique de période* T *et d'ordre* $m \geqslant m_0$ *satisfaisant à* (3.3.1) (*pour* R *fini*), *et à la relation*

$$Qx^0(\varepsilon t + \tau) = x^0(t), \ t \in [0, T],$$

la fonction $y(t)$ *associée à* $x^0(t)$ *par le système* (3.2.1) *est telle que*

$$Qy(\varepsilon t + \tau) = y(t), \ t \in [0, T].$$

On sait, par le théorème 3-1, que $y(t)$ est le point fixe unique de l'opérateur (3.3.2). Considérons l'ensemble $S_R^E \subset S_R^0$ défini par

$$S_R^E = \{x \in S_R^0 : Qx(\varepsilon t + \tau) = x(t), \ t \in [0, T]\}.$$

Il est clair que $x^0(t) \in S_R^E$. En outre, si $x(t) \in S_R^E$, il vient, puisque H est un opéreteur de primitivation tel que $P_m H = 0$,

$$\begin{aligned} Q\mathcal{T}_m x(\varepsilon t + \tau) &= Qx^0(\varepsilon t + \tau) + \varepsilon QH(I - P_m)q\,[x(\varepsilon t + \tau), \varepsilon t + \tau, \lambda] \\ &= x^0(t) + \varepsilon H(I - P_m)Qq\,[Qx(t), \varepsilon t + \tau, \lambda] \\ &= x^0(t) + H(I - P_m)q\,[x(t), t, \lambda] = \mathcal{T}_m x(t), \end{aligned}$$

ce qui démontre que $\mathcal{T}_m x \in S_R^E$ lorsque $x \in S_R^E$. Il en résulte immédiatement que, si $x^0(t) \in S_R^E$, il en est de même pour la fonction associée $y(t)$.

Le théorème suivant est une conséquence immédiate de la définition 3-1 :

Théorème 3-6 : *Si les systèmes différentiels*

$$\dot{x} = q^{(i)}(x, t, \lambda),\ i = 1, 2, \ldots, p,$$

possèdent la propriété E *par rapport à* (Q, ε, τ), *il en est de même des systèmes*

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{p} A_i q^{(i)}(x, t, \lambda)$$

les A_i, $i = 1, 2, \ldots, p$, *étant des matrices constantes de dimension* $n \times n$ *qui commutent avec* Q.

Enfin, il est clair que si le système (3.2.1) possède la propriété E par rapport à $(Q_1, \varepsilon_1, \tau_1), \ldots, (Q_p, \varepsilon_p, \tau_p)$, et si on peut trouver un $x^0(t)$ tel que

$$Q_j x^0(\varepsilon_j t + \tau_j) = x^0(t),\ j = 1, 2, \ldots, p,$$

alors la fonction associée $y(t)$ satisfera à

$$Q_j y(\varepsilon_j t + \tau_j) = y(t),\ j = 1, 2, \ldots, p.$$

3-6. *Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants*

Considérons le système différentiel linéaire à coefficients constants

$$\dot{x} = Ax \tag{3.6.1}$$

où $x = \mathrm{col}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et A est une matrice constante réelle de dimension $n \times n$. Rappelons qu'un système différentiel du type

$$\ddot{y} = B(t)y$$

où $y = \mathrm{col}\,(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ et $B(t)$ une matrice réelle de dimension $n \times n$ dont les composantes sont des fonctions continues et périodiques en t de période T peut toujours être ramenée à la forme (3.6.1) par un changement de variables

$$y = P(t)x$$

où $P(t)$ est une matrice réelle de dimension $(n \times n)$ dont les composantes sont des fonctions périodiques de période 2T une fois continûment dérivables par rapport à t [50, 85].

Proposons-nous d'utiliser les résultats de ce chapitre pour obtenir la fonction $y(t)$ associée à un polynôme trigonométrique de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ par le système différentiel (3.6.1). Le second membre de (3.6.1) étant défini quel que soit $x \in E^n$ et satisfaisant aux conditions

$$\| Ax \| \leqslant \| A \|\, \| x \|,\ \| Ax^1 - Ax^2 \| \leqslant \| A \|\, \| x^1 - x^2 \|,$$

la fonction $y(t)$ associée à un polynôme trigonométrique quelconque de période T et d'ordre m existera si m est suffisamment grand pour que

$$2^{1/2}\omega^{-1}\sigma(m)\, \| A \| < 1.$$

A fortiori, on aura donc, en utilisant (1.3.6),

$$m + 1 > \omega^{-1} \| A \| \tag{3.6.2}$$

relation que nous aurons à utiliser par la suite. D'autre part, la fonction associée sera limite de la suite d'approximations successives

$$\begin{aligned} y^0(t) &= x^0(t) \\ y^1(t) &= x^0(t) + \mathrm{H}(\mathrm{I} - \mathrm{P}_m)\mathrm{A}x^0(t) = x^0(t) + \mathrm{AH}(\mathrm{I} - \mathrm{P}_m)x^0(t) = x^0(t), \\ &\ldots\quad \ldots\quad \ldots \\ y^k(t) &= x^0(t) + \mathrm{H}(\mathrm{I} - \mathrm{P}_m)x^0(t) = x^0(t) \\ &\ldots\quad \ldots\quad \ldots \end{aligned}$$

ce qui démontre le

Théorème 3-7 : *La fonction* $y(t)$ *associée au polynôme trigonométrique* $x^0(t)$ *de période* $\mathrm{T} = 2\pi/\omega$ *par le système différentiel* (3.6.1) *est égale à* $x^0(t)$.

3-7. *Équations déterminantes*

Si nous nous référons maintenant au théorème fondamental 3-1 et à la relation (3.3.5), le système différentiel (3.2.1) possédera une solution périodique $y(t)$ de période $\mathrm{T} = 2\pi/\omega$ si on peut trouver un polynôme trigonométrique $x^0(t)$ de période T et d'ordre $m \geqslant m_0$ qui satisfait, si R est fini, $\nu(x^0) \leqslant \mathrm{R}_1$ et est tel que, pour tout t,

$$\mathrm{P}_m \,[\dot{y} - q(y, t, \lambda)] \equiv \dot{x}^0 - \mathrm{P}_m q(y, t, \lambda) = 0. \tag{3.7.1}$$

Puisque $y = y(t, \alpha, \lambda)$ est une fonction uniforme de t, λ et du vecteur α formé par les composantes des coefficients de Fourier de $x^0(t)$, les équations (3.7.1) constituent en fait un système de $(2m + 1)n$ équations transcendantes en les $(2m + 1)n$ composantes de α, système qui dépend en outre du paramètre λ. Ces équations, dites, *équations déterminantes* [16], s'écrivent explicitement

$$\begin{gathered} \mathrm{T}^{-1} \int_0^{\mathrm{T}} q\,[y(t, \alpha, \lambda), t, \lambda]\, dt = 0 \\ s\omega b_s - 2\mathrm{T}^{-1} \int_0^{\mathrm{T}} q\,[y(t, \alpha, \lambda), t, \lambda] \cos s\omega t\, dt = 0 \\ s\omega a_s + 2\mathrm{T}^{-1} \int_0^{\mathrm{T}} q\,[y(t, \alpha, \lambda), t, \lambda] \sin s\omega t\, dt = 0 \\ s = 1, 2, \ldots, m. \end{gathered} \tag{3.7.2}$$

Soit maintenant $x(t)$ une solution périodique de période T du système différentiel (3.2.1) pour une valeur donnée de λ, et, si R est fini, supposons que

$$\nu(x) \leqslant \mathrm{R}_1' < \mathrm{R}.$$

Définissons $x^0(t)$ par

$$x^0(t) = \mathrm{P}_m x(t) = a_0 + \sum_{s=1}^{m} (a_s \cos s\omega t + b_s \sin s\omega t).$$

Puisque $x(t)$ est une fois continûment dérivable par rapport à t pour $t \in]-\infty, \infty[$ et que $\dot{x}(t) = q[x(t), t, \lambda]$, on déduit de (1.3.5) et (3.2.3)

$$\nu(x - \mathrm{P}_m x) = \nu[\mathrm{H}(\dot{x} - \mathrm{P}_m \dot{x})] \leqslant 2^{1/2}\omega^{-1}\sigma(m)\nu(\dot{x}) \leqslant 2^{1/2}\omega^{-1}\sigma(m)\mathrm{K}.$$

Dès lors,

$$\nu(x^0) \leqslant \nu(x - \mathrm{P}_m x) + \nu(x) \leqslant 2^{1/2}\omega^{-1}\sigma(m)\mathrm{K} + \mathrm{R}_1' = \mathrm{R}_1 < \mathrm{R}$$

à condition de prendre $m \geqslant m_0$ où m_0 est un entier suffisamment grand pour que

$$\mathrm{R}_1 = 2^{1/2}\omega^{-1}\sigma(m)\mathrm{K} + \mathrm{R}_1' < \mathrm{R}. \tag{3.7.3}$$

D'autre part, $x(t)$ étant solution périodique de (3.2.1), on a

$$(\mathrm{I} - \mathrm{P}_m)[\dot{x} - q(x, t, \lambda)] = 0 \text{ et } \mathrm{P}_m[\dot{x} - q(x, t, \lambda)] = 0. \tag{3.6.4}$$

Mais, par suite du théorème 3-1, pour $m \geqslant m_0$, il existe une fonction unique $y = y(t, \alpha, \lambda)$ qui satisfait à la première des relations (3.7.4) et à $\mathrm{P}_m y = x^0$. Dès lors, pour $m \geqslant m_0$, $x(t) \equiv y(t, \alpha, \lambda)$ et, puisque $x(t)$ satisfait à la deuxième des relations (3.7.4), α est solution des équations déterminantes (3.7.1). Nous avons donc démontré le

Théorème 3-8 : *Une condition nécessaire et suffisante pour que le système différentiel* (3.2.1) *possède une solution périodique $x(t)$ de période* T *telle que, si* R *est fini* $\nu(x) \leqslant \mathrm{R}_1' < \mathrm{R}$, *est qu'il existe un polynôme trigonométrique $x^0(t)$ de période* T *et d'ordre $m \geqslant m_0$, m_0 étant défini par* (3.7.3), *dont les coefficients de Fourier soient solutions des équations déterminantes*

$$\dot{x}^0 - \mathrm{P}_m q[y(t, \alpha, \lambda), t, \lambda] \equiv 0,$$

où $y(t, \alpha, \lambda)$ est la fonction associée à $x^0(t)$ par le système (3.2.1).

Chapitre 4

ANALYSE DES ÉQUATIONS DÉTERMINANTES

4-1. *Introduction*

La méthode de Cesari exposée au chapitre précédent, et en particulier le théorème 3-8, ont montré que l'existence des solutions périodiques d'un système différentiel de type (3.2.1) se ramenait à celle d'une solution réelle des équations déterminantes. Nous allons voir que la théorie du degré topologique constitue un outil précieux pour résoudre ce dernier problème. La seule méthode proposée jusqu'à présent par L. Cesari [16] pour démontrer l'existence d'une solution des équations déterminantes peut d'ailleurs s'exprimer, comme nous le montrerons au paragraphe 4-5, en termes des théorèmes classiques démontrés au chapitre 2. Malheureusement, cette méthode est d'un maniement long et difficile et les problèmes posés par son application varient suivant l'équation différentielle étudiée. Un autre procédé, basé sur le théorème de Miranda, a été introduit par H. W. Knobloch [54], mais il est limité à des systèmes de type (3.2.1) dont le second membre est borné quels que soient $x \in E^n$, $t \in [0, T]$ et $\lambda \in [0, \Lambda]$.

Nous allons montrer qu'il existe deux vastes classes de systèmes différentiels pour lesquels les équations déterminantes peuvent être étudiées de manière plus directe. Il s'agit, d'une part, des systèmes différentiels dont tous les termes non linéaires apparaissent multipliés par un facteur que l'on peut supposer suffisamment petit (*systèmes quasi-linéaires* ou *faiblement non linéaires*), et, d'autre part, des systèmes où aucune hypothèse n'est faite sur l'ordre de grandeur des termes non linéaires, mais pour lesquels il est possible de démontrer, *a priori*, l'existence d'une borne pour toutes les solutions périodiques éventuelles. La classe des systèmes différentiels faiblement non linéaires a fait l'objet d'un nombre considérable de travaux qu'il sera intéressant de comparer avec les résultats que nous obtiendrons. D'autre part, dans les derniers chapitres de ce travail et dans des publications ultérieures, nous montrerons qu'un très grand nombre d'équations et de systèmes différentiels de la mécanique non linéaire appartiennent à la seconde classe, ce qui nous permettra d'obtenir de nombreux critères d'existence de solutions périodiques pour ces équations.

Il va sans dire que ces méthodes nécessitent la connaissance d'une expression aussi explicite que possible des équations déterminantes en fonction de la forme du système différentiel correspondant, et c'est à ce problème que seront consacrés plusieurs paragraphes de ce chapitre.

4-2. *Théorème fondamental*

Si nous écrivons, pour plus de brièveté, les équations déterminantes sous la forme

$$F(\alpha, \lambda) = 0 \tag{4.2.1}$$

où $F = \mathrm{col}\,(F_1, F_2, \ldots, F_{(2m+1)n})$, les $F_i(\alpha, \lambda)$, $i = 1, 2, \ldots, (2m+1)n$, seront des fonctions continues de α et λ pour $\alpha \in \{\alpha \in E^{(2m+1)n} : \nu(x^0) \leqslant R_1\}$ (si R est fini), et $\lambda \in [0, \Lambda]$. Cela résulte en effet immédiatement du fait que $q(y, t, \lambda)$ est une fonction continue de y, t, λ et que la fonction associée $y(t, \alpha, \lambda)$ est également continue en tous ses arguments dans le domaine considéré.

Nous pouvons dès lors considérer le premier membre de (4.2.1) comme définissant une famille d'applications continues $F_\lambda : (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{(2m+1)n}) \to [F_1(\alpha, \lambda), F_2(\alpha, \lambda), \ldots, F_{(2m+1)n}(\alpha, \lambda)]$. Soit Ω un ouvert borné de $E^{(2m+1)n}$ tel que, si R est fini, $\Omega \subset \{\alpha \in E^{(2m+1)n} : \nu(x^0) \leqslant R_1 < R\}$. Si on peut montrer que, pour $\lambda \in [0, \Lambda]$, $d\,[F(\alpha, \lambda), \Omega, 0]$ est défini (en d'autres termes, si $F(\alpha, \lambda) \neq 0$ pour $\alpha \in \dot{\Omega}$ et $\lambda \in [0, \Lambda]$), et si, pour un $\lambda_0 \in [0, \Lambda]$,

$$d\,[F(\alpha, \lambda_0), \Omega, 0] \neq 0,$$

alors, en vertu du théorème 2-3, $d\,[F(\alpha, \lambda), \Omega, 0]$ sera différent de zéro pour $\lambda \in [0, \Lambda]$. Par conséquent, grâce au théorème 2-2, le système d'équations (4.2.1) admettra, quel que soit $\lambda \in [0, \Lambda]$, au moins une solution appartenant à Ω, ce qui, par suite du théorème 3-8, démontre le

Théorème 4-1 : *Ω étant un ouvert borné de $E^{(2m+1)n}$ tel que, si R est fini, $\Omega \subset \{\alpha \in E^{(2m+1)n} : \nu(x^0) \leqslant R_1 < R\}$, et $F(\alpha, \lambda)$ la famille d'applications définie par les premiers membres des équations déterminantes* (4.2.1), *si $d\,[F(\alpha, \lambda), \Omega, 0]$ existe quel que soit $\lambda \in [0, \Lambda]$ (en d'autres termes, si $F(\alpha, \lambda) \neq 0$ pour $\alpha \in \dot{\Omega}$ et $\lambda \in [0, \Lambda]$), et s'il existe un $\lambda_0 \in [0, \Lambda]$ tel que*

$$d\,[F(\alpha, \lambda_0), \Omega, 0] \neq 0,$$

alors le système différentiel (3.2.1) *possède au moins une solution périodique de période* T.

Les difficultés dans l'application de ce théorème sont évidemment, d'une part de prouver que, pour $\lambda \in [0, \Lambda]$, $F(\alpha, \lambda) \neq 0$ pour $\alpha \in \dot{\Omega}$, et d'autre part de calculer le degré pour une valeur particulière de λ, étant bien entendu que $F(\alpha, \lambda)$ n'est pas connu *explicitement*, puisque la fonction associée $y(t, \alpha, \lambda)$ qui intervient dans les équations déterminantes n'est fournie, en fonction de t, α, λ, que par un processus d'approximations successives.

4-3. *Systèmes différentiels faiblement non linéaires*

L'existence d'une classe de systèmes différentiels pour lesquels les difficultés que nous venons de signaler peuvent être surmontées est suggérée par le théorème 3-7 qui affirme que la fonction associée $y(t, \alpha, \lambda)$ est parfaitement déterminée pour les systèmes linéaires à coefficients constants, puisque égale dans ce cas à $x^0(t)$. Considérons dès lors un système différentiel du type

$$\dot{x} = Ax + \lambda f(x, t, \lambda) \tag{4.3.1}$$

où $x = \mathrm{col}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, A est une matrice constante de dimension $n \times n$, $\lambda \in [0, \Lambda]$ et $f(x, t, \lambda)$ satisfait aux mêmes hypothèses que $q(x, t, \lambda)$ dans (3.2.1). Pour $\lambda = 0$, (4.3.1) se réduit à un système de type (3.6.1) et la fonction associée est alors explicitement connue. Par conséquent, si $F(\alpha, \lambda)$ représente l'application définie par les premiers membres des équations déterminantes de (4.3.1) pour $\lambda \in]0, \Lambda]$, et si $d\,[F(\alpha, 0), \Omega, 0]$ est défini et différent de zéro, ce qui se vérifie aisément puisque $F(\alpha, 0)$ est explicitement déterminé, il en sera de même, en vertu du corollaire 2-1, pour $d\,[F(\alpha, \lambda), \Omega, 0]$ si $\lambda \in [0, \lambda_1]$, $\lambda_1 \in]0, \Lambda]$ étant un nombre suffisamment petit. Les systèmes différentiels de la forme (4.3.1), lorsqu'on se limite aux valeurs petites de λ, sont dits *systèmes quasi-linéaires* ou *faiblement non linéaires*. Dans le cas contraire, ils sont dits *fortement non linéaires*, et nous avons donc démontré le théorème fondamental suivant :

Théorème 4-2 : Ω étant un ouvert borné de $E^{(2m+1)n}$ contenu (si R est fini) dans $\{\alpha \in E^{(2m+1)n} : \nu(x^0) \leqslant R_1 < R\}$, et $F(\alpha, \lambda)$ la famille d'applications définies par les premiers membres des équations déterminantes de (4.3.1) pour $\lambda \in]0, \Lambda]$, si

$$d\,[F(\alpha, 0), \Omega, 0]$$

existe et est différent de zéro, on peut trouver un $\lambda_1 \in]0, \Lambda]$ tel que, pour $\lambda \in [0, \Lambda_1]$, le système différentiel (4.3.1) possède au moins une solution périodique de période T.

Les conséquences de ce théorème seront discutées au paragraphe 4-7.

4-4. *Systèmes différentiels non linéaires dont on connaît a priori une borne supérieure pour les solutions périodiques éventuelles*

Considérons le système différentiel (3.2.1) et supposons qu'on ait pu démontrer, a priori, que si $x(t)$ est une solution périodique éventuelle de période T, alors,

$$T^{-1} \int_0^T \| x(t) \|^2 \, dt = \| a_0 \|^2 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\infty} (\| a_s \|^2 + \| b_s \|^2) < C^2$$

C étant une constante positive indépendante de λ et de $x(t)$. On en déduit immédiatement que, quel que soit m,

$$\| a_0 \|^2 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{m} (\| a_s \|^2 + \| b_s \|^2) < C^2$$

et, si C est tel que

$$\Omega_C = \{\alpha \in E^{(2m+1)n} : \| a_0 \|^2 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{m} (\| a_s \|^2 + \| b_s \|^2) < C^2\} \qquad (4.4.1)$$

soit contenu dans $\{\alpha \in E^{(2m+1)n} : \nu(x^0) \leqslant R_1 < R\}$ (si R est fini), on sera assuré de l'existence de $d\,[F(\alpha, \lambda), \Omega_C, 0]$ pour $\lambda \in [0, \Lambda]$ puisque $F(\alpha, \lambda)$ ne pourra jamais s'annuler sur $\dot{\Omega}_C$. Par suite du théorème 2-3, $d\,[F(\alpha, \lambda), \Omega_C, 0]$ sera indépendant de λ, et, en vertu des théorèmes 2-2 et 4-1, nous obtenons le

Théorème 4-3 : Supposons que, pour toute solution périodique éventuelle $x(t)$ de période T du système différentiel (3.2.1) il existe une constante positive C indépendante de λ et de $x(t)$ et telle que

$$T^{-1} \int_0^T \| x \|^2 \, dt < C^2 ; \qquad (4.4.2)$$

si, avec les notations du chapitre III, Ω_C défini par (4.4.1) est contenu dans $\{\alpha \in E^{(2m+1)n} : \nu(x^0) \leqslant R_1 < R\}$, et s'il existe une valeur λ_0 de λ appartenant à $[0, \Lambda]$ et telle que

$$d\,[F(\alpha, \lambda_0), \Omega_C, 0] \neq 0, \qquad (4.4.3)$$

alors le système différentiel (3.2.1) *possède, pour* $\lambda \in [0, \Lambda]$, *au moins une solution périodique de période* T.

Remarquons que la condition (4.4.3) sera facile à vérifier pour des systèmes différentiels qui, pour $\lambda = 0$, se ramènent à des systèmes linéaires à coefficients constants puisque, dans ce cas, il suffira de prendre $\lambda_0 = 0$ pour obtenir un $F(\alpha, 0)$ parfaitement déterminé. Si (3.2.1) possède des solutions constantes (et dès lors périodiques de période T), il conviendra de modifier Ω_C de telle sorte qu'il ne les contienne pas, afin que le théorème 4-3 soit un critère d'existence de solutions périodiques non triviales. D'autre part, lorsque (3.2.1) est autonome, certaines précautions doivent être prises car, si $x(t)$ est solution, il en est de même de $x(t + \delta)$ quelle que soit la constante réelle δ. Cela revient à dire qu'on peut, sans perte de généralité, imposer une condition supplémentaire à la solution périodique. D'un autre côté, dans les systèmes autonomes, la période est une inconnue supplémentaire dans les équations déterminantes, et il faudra aussi obtenir une borne supérieure pour cette dernière. Ces particularités pourront être utilisées pour modifier les équations déterminantes et le domaine Ω_C de telle sorte qu'il y ait encore une correspondance biunivoque entre l'existence d'une solution périodique de (3.2.1) et d'une solution réelle de (4.2.1).

D'autre part, dans les applications du théorème 4-3, il convient encore de vérifier la possibilité de choisir les ensembles Ω_C et $\Phi = \{\alpha \in E^{(2m+1)n} : \nu(x^0) \leqslant R_1 < R\}$ de telle sorte que $\Omega_C \subset \Phi$ ou d'obtenir une hypothèse équivalente facilement utilisable. Considérons, pour simplifier, le cas important où le second membre de (3.2.1) est défini et *localement* lipschitzien pour tout $x \in E^n$. Supposons tout d'abord que, pour toute solution périodique éventuelle $x(t)$ de période T de (3.2.1), il existe, outre la condition (4.4.2), une constante C', indépendante de $x(t)$ et de λ et telle que

$$\frac{1}{T}\int_0^T \| \dot{x}(t) \|^2 \, dt < C'^2$$

Dès lors, le polynôme trigonométrique $x^0(t)$ correspondant, dans la méthode de Cesari, à une telle solution périodique satisfera, quel que soit son ordre m, aux relations

$$\frac{1}{T}\int_0^T \| x^0(t) \|^2 \, dt < C^2, \quad \frac{1}{T}\int_0^T \| \dot{x}^0(t) \|^2 \, dt < C'^2 \tag{4.4.4}$$

d'où, par suite de (1.3.8) et de l'égalité de Parseval, à l'inégalité

$$\sup_{t \in [0, T]} \| x^0(t) \| < C + \frac{\pi}{\sqrt{3}\,\omega} C' = C'' \tag{4.4.5}$$

Si on prend alors, dans la méthode de Cesari, $R_1 = C''$ et $R = 2C''$, et si on adopte pour Ω_C l'ensemble

$$\Omega_{C''} = \mathring{\Phi} = \{\alpha \in E^{(2m+1)n} : \sup_{t \in [0, T]} \| x^0(t) \| < C''\} \tag{4.4.6}$$

où $\mathring{\Phi}$ désigne l'intérieur de Φ, la fonction associée existera pour tout $\alpha \in \overline{\Omega}_{C''}$ et les zéros des équations déterminantes correspondantes ne seront jamais situés sur $\dot{\Omega}_{C''}$ quel que soit $\lambda \in [0, \Lambda]$.

Comme, d'autre part, les constantes intervenant dans les relations (4.4.4) à (4.4.6) peuvent être choisies aussi grandes que l'on veut (à condition de rester finies), nous avons démontré le

Corollaire 4-1 : *Supposons le système différentiel* (3.2.1) *défini et localement lipschitzien pour tout* $x \in E^n$. *Si les hypothèses suivantes sont vérifiées* :

1. *pour toute solution périodique éventuelle* $x(t)$ *de période* T *de* (3.2.1), *il existe des constantes positives* C, C′, *indépendantes de* λ *et de* $x(t)$ *et telles que*

$$\frac{1}{T}\int_0^T \| x(t) \|^2 dt < C^2, \ \frac{1}{T}\int_0^T \| \dot{x}(t) \|^2 dt < C'^2 ;$$

2. *il existe une valeur* λ_0 *de* λ *appartenant à* $[0, \Lambda]$ *et telle que*

$$d\,[F(\alpha, \lambda_0), \Omega_{C''}, 0] \neq 0$$

$\Omega_{C''}$ *étant défini par* (4.4.6) *où* C″ *est un nombre positif fini pouvant être pris aussi grand que l'on veut*;

le système (3.2.1) *possède, pour* $\lambda \in [0, \Lambda]$, *au moins une solution périodique de période* T.

D'une manière analogue, si, au lieu de (4.4.2), on suppose, pour toute solution périodique éventuelle $x(t)$ de période T de (3.2.1), l'existence d'une constante D positive indépendante de λ et de $x(t)$ et telle que

$$\sup_{t\in[0,T]} \| x(t) \| < D,$$

on aura

$$\sup_{t\in[0,T]} \| \dot{x}(t) \| \leqslant \sup_{\substack{t\in[0,T]\\ \|x\| \leqslant D\\ \lambda\in[0,\Lambda]}} \| q(x, t, \lambda) \| < D'$$

où D′ est une constante positive satisfaisant aux mêmes conditions que D. Dès lors, le polynôme trigonométrique $x^0(t)$ correspondant, dans la méthode de Cesari, à $x(t)$ vérifiera, quel que soit son ordre, les inégalités

$$\frac{1}{T}\int_0^T \| x^0(t) \|^2 dt \leqslant \frac{1}{T}\int_0^T \| x(t) \|^2 dt < D^2,$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \| \dot{x}^0(t) \|^2 dt \leqslant \frac{1}{T}\int_0^T \| \dot{x}(t) \|^2 dt < D'^2$$

et

$$\sup_{t\in[0,T]} \| x^0(t) \| < D + \frac{\pi}{\sqrt{3}\omega} D' = D''.$$

Il suffit alors de refaire le raisonnement ci-dessus, en remplaçant respectivement C, C′ et C″ par D, D′ et D″, pour obtenir le

Corollaire 4-2 : *Supposons le système différentiel* (3.2.1) *défini et localement lipschitzien pour tout* $x \in E^n$. *Si les hypothèses suivantes sont vérifiées* :

1. *pour toute solution périodique éventuelle* $x(t)$ *de période* T *de* (3.2.1), *il existe une constante positive* D *indépendante de* λ *et de* $x(t)$ *et telle que*

$$\sup_{t\in[0,T]} \| x(t) \| < D ;$$

2. *il existe une valeur* λ_0 *de* λ *appartenant à* $[0, \Lambda]$ *et pour laquelle*

$$d\,[\mathrm{F}(\alpha, \lambda_0), \Omega_{\mathrm{D}''}, 0] \neq 0,$$

$\Omega_{\mathrm{D}''}$ *étant défini par* (4.4.6) *où* D'' *remplace* C'' *et peut être pris aussi grand que l'on veut,*

le système (3.2.1) *possède, pour* $\lambda \in [0, \Lambda]$, *au moins une solution périodique de période* T.

4-5. *Systèmes différentiels non linéaires dont on ne connaît pas a priori une borne supérieure pour les solutions périodiques éventuelles*

Il reste enfin à considérer le cas des systèmes différentiels fortement non linéaires pour lesquels on ne peut pas démontrer l'existence de bornes « a priori » pour les solutions périodiques éventuelles. Il est alors possible d'utiliser le procédé proposé par L. Cesari [15, 16] et qui est lié à la méthode de B. G. Galerkin [52, 56].

L'algorithme de Cesari étant plus particulièrement adapté aux équations différentielles ne contenant pas de paramètre, soit

$$\dot{x} = q(x, t) \tag{4.5.1}$$

le système considéré, où $q(x, t)$ satisfait aux mêmes hypothèses que $q(x, t, \lambda)$ dans (3.2.1). Soit $\mathrm{F}(\alpha) = 0$ les équations déterminantes,

$$\mathrm{F} : (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{(2m+1)n}) \to [\mathrm{F}_1(\alpha), \mathrm{F}_2(\alpha), \ldots, \mathrm{F}_{(2m+1)n}(\alpha)]$$

l'application définie par leur premier membre et Ω un ouvert borné de $\mathrm{E}^{(2m+1)n}$ contenu (si R est fini), dans

$$\{\alpha \in \mathrm{E}^{(2m+1)n} : \nu(x^0) \leqslant \mathrm{R}_1 < \mathrm{R}\}.$$

On appelle *approximation de Galerkin d'ordre m* d'une solution périodique de période T de (4.5.1) le polynôme trigonométrique d'ordre m et de période T :

$$x^{(m)}(t) = a_0' + \sum_{s=1}^{m} (a_s' \cos s\omega t + b_s' \sin s\omega t)$$

dont les coefficients de Fourier sont solutions des équations

$$\begin{gathered}
\mathrm{T}^{-1} \int_0^{\mathrm{T}} q\,[x^{(m)}(t), t]\, dt = 0 \\
s\omega b_s' - 2\mathrm{T}^{-1} \int_0^{\mathrm{T}} q\,[x^{(m)}(t), t] \cos s\omega t\, dt = 0 \\
s\omega a_s' + 2\mathrm{T}^{-1} \int_0^{\mathrm{T}} q\,[x^{(m)}(t), t] \sin s\omega t\, dt = 0 \\
s = 1, 2, \ldots, m
\end{gathered} \tag{4.5.2}$$

dites *équations de Galerkin*, et qui expriment simplement l'annulation des $2m + 1$ premiers coefficients de Fourier de l'expression $\dot{x}^{(m)} - q\,[x^{(m)}(t), t]$.

Soit $\mathrm{F}_{\mathrm{G}} : (\alpha_2, \alpha_2, \ldots, \alpha_{(2m+1)n}) \to [\mathrm{F}_{\mathrm{G},1}(\alpha), \mathrm{F}_{\mathrm{G},2}(\alpha), \ldots, \mathrm{F}_{\mathrm{G},(2m+1)n}(\alpha)]$, l'application définie par les premiers membres des équations de Galerkin. Elle est parfaitement déterminée par le système différentiel (4.5.1). Supposons qu'il existe une constante positive L telle que

$$\inf_{\alpha \in \dot{\Omega}} | F_G(\alpha) | \geqslant L$$

et une constante positive N telle que

$$\sup_{\alpha \in \dot{\Omega}} | F(\alpha) - F_G(\alpha) | \leqslant N.$$

Si $N < L$, alors, pour tout $\alpha \in \dot{\Omega}$,

$$| F(\alpha) - F_G(\alpha) | < \sup_{\alpha \in \dot{\Omega}} | F(\alpha) - F_G(\alpha) | \leqslant N < L \leqslant \inf_{\alpha \in \dot{\Omega}} | F_G(\alpha) | < | F_G(\alpha)|$$

et dès lors, par le théorème de Rouché,

$$d\,[F(\alpha), \Omega, 0] = d\,[F_G(\alpha), \Omega, 0].$$

Par suite du théorème 4-1, nous avons donc démontré le

Théorème 4-4 : Ω *étant un ouvert borné contenu, si* R *est fini, dans*

$$\{\alpha \in E^{(2m+1)n} : \nu(x^0) \leqslant R_1 < R\}, \text{ et } F_G : (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{(2m+1)n}) \to$$
$$[F_{G,1}(\alpha), F_{G,2}(\alpha), \ldots, F_{G,(2m+1)n}(\alpha)]$$

l'application définie par les premiers membres des équations de Galerkin (4.5.2), *soient* L *une constante positive telle que*

$$\inf_{\alpha \in \dot{\Omega}} | F_G(\alpha) | \geqslant L$$

et N *une constante positive telle que*

$$\sup_{\alpha \in \dot{\Omega}} | F(\alpha) - F_G(\alpha) | \leqslant N$$

où F *est l'application définie par les premiers membres des équations déterminantes* (3.8.2). *Si* $N < L$ *et si*

$$d\,[F_G(\alpha), \Omega, 0] \neq 0,$$

le système différentiel (4.5.1) *possède au moins une solution périodique de période* T.

Comme nous l'avons déjà signalé, cette méthode est intéressante mais longue et difficile à appliquer. Elle suppose en effet réalisées les opérations suivantes :

1. la détermination explicite de la valeur m_0 de m pour laquelle la méthode d'approximations successives du théorème 3-1 converge dans la boule $\nu(x) \leqslant R$;
2. le calcul des équations de Galerkin d'ordre m_0 ;
3. l'estimation des constantes N et L ;
4. la vérification du fait que $d\,[F_G(\alpha), \Omega, 0]$ est différent de zéro.

Le seul exemple traité par L. CESARI [15, 16] concerne l'équation différentielle

$$\ddot{x} + x^3 = \sin t.$$

Dans le cas où l'on peut démontrer l'existence a priori d'une borne pour les solutions périodiques éventuelles, il y a intérêt à utiliser le procédé introduit au paragraphe 4-4 car, pour cette méthode :

1. il n'est pas nécessaire de connaître la valeur de m pour laquelle la méthode d'approximations successives (3.3.4) converge ;

2. le degré topologique de l'application définie par les équations déterminantes en une valeur λ_0 de λ (en général $\lambda = 0$) est plus simple à calculer que celui de l'application définie par les équations de Galerkin.

Pour plus de détails sur la méthode esquissée dans ce paragraphe, nous renverrons aux articles originaux de L. CESARI [15, 16, 18].

4-6. *Équations déterminantes des systèmes différentiels du type de Coddington-Levinson*

Considérons le système différentiel

$$\dot{u}^{(i)} = A_i u^{(i)} + \lambda f^{(i)}(u, v, w, t, \lambda), \quad i = 1, 2, \dots, p ; \tag{4.6.1-1}$$

$$\dot{v}^{(j)} = B_j v^{(j)} + \lambda g^{(j)}(u, v, w, t, \lambda) \quad j = 1, 2, \dots, r ; \tag{4.6.1-2}$$

$$\dot{w} = Cw + \lambda h(u, v, w, t, \lambda) \tag{4.6.1-3}$$

où $u^{(i)}$, $f^{(i)}$ sont des vecteurs-colonne de dimension $2\alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, p$; $v^{(j)}$, $g^{(j)}$ des vecteurs-colonne de dimension β_j, $j = 1, 2, \dots, r$; w, h des vecteurs-colonne de dimension γ, $u = \mathrm{col}\,(u^{(1)}), \dots, u^{(p)})$, $v = \mathrm{col}\,(v^{(1)}, \dots, v^{(r)})$. En outre, $f^{(i)}$ $(i = 1, 2, \dots, p)$, $g^{(j)}$ $(j = 1, 2, \dots, r)$ et h sont des fonctions de u, v, w, λ et t périodiques en t de période 2π (qui n'est pas nécessairement la plus petite période) et satisfaisant à certaines conditions que nous expliciterons plus loin. Nous poserons

$$n = 2\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{j=1}^{r} \beta_j + \gamma$$

qui sera donc l'ordre du système différentiel. Les A_i sont des matrices de dimension $2\alpha_i \times 2\alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, p$ de la forme (les termes non écrits sont nuls) :

$$A_i = \begin{pmatrix} S_i & & & & \\ E_2 & S_i & & & \\ & E_2 & S_i & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & E_2 & S_i \end{pmatrix}$$

avec

$$S_i = \begin{pmatrix} 0 & s_i \\ -s_i & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

les s_i étant des entiers positifs $(i = 1, 2, \dots, p)$. Toutes les valeurs propres des matrices A_i sont donc imaginaires pures et à partie imaginaire entière. Les B_j sont des matrices de dimension $\beta_j \times \beta_j$, $j = 1, 2, \dots, r$, de la forme

$$
B_j = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & 1 & 0 & & & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

(les termes non écrits sont tous nuls), $j = 1, 2, \ldots, r$. Toutes les valeurs propres des matrices B_j sont nulles. Si $\alpha_i = 1$, $A_i = S_i$ et si $\beta_j = 1$, $B_j = 0$. Enfin, C est une matrice de dimension $\gamma \times \gamma$ dont les valeurs propres sont toutes différentes de $k\sqrt{-1}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Les solutions périodiques de systèmes différentiels du type (4.6.1) ont été étudiées, pour les valeurs petites de λ (non-linéarité faible), par E. A. CODDINGTON et N. LEVINSON [19, 20]. Pour cette raison, ils seront dits, dans ce qui suit, *systèmes de Coddington-Levinson*.

Il est bien connu [39] que tout système différentiel de la forme

$$
\dot{y} = By + \lambda\varphi(y, t, \lambda) \tag{4.6.2}
$$

où $y = \text{col}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $\varphi = \text{col}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$, B est une matrice constante réelle de dimension $n \times n$, peut être ramené à (4.6.1) par un changement de variables

$$
y = Tx
$$

où $x = \text{col}(u, v, w)$ et T une matrice constante réelle non singulière de dimension $n \times n$.

D'autre part, on sait [20] que tout système différentiel de la forme

$$
\dot{z} = A(t)z + \lambda\psi(z, t, \lambda)
$$

où $z = \text{col}(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $\psi = \text{col}(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$, $A(t)$ est une matrice continue et périodique de période π peut être ramené à la forme (4.6.2) par le changement de variable

$$
z = P(t)y
$$

où $P(t)$ est une matrice non singulière de dimension $n \times n$, périodique de période 2π et une fois continûment dérivable par rapport à t. Les systèmes de Coddington-Levinson sont donc de nature très générale.

Si nous posons

$$
A = \text{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_p, B_1, B_2, \ldots, B_r, C)
$$

$$
x = \text{col}(u, v, w)
$$

$$
q = \text{col}(f^{(1)}, \ldots, f^{(p)}, g^{(1)}, \ldots, g^{(r)}, h)
$$

et que nous supposons que $q = q(x, t, \lambda)$ est une fonction vectorielle définie pour $\| x \| \leqslant R$, $R > 0$ fini ou non, $t \in]-\infty, \infty[$, $\lambda \in [0, \Lambda]$, $\Lambda > 0$, continue et périodique de période 2π en t, et satisfaisant à la condition de Lipschitz

$$
\| q(x^1, t, \lambda) - q(x^2, t, \lambda) \| \leqslant M \| x^1 - x^2 \|
$$

où M est une constante positive, $\| x^1 \| \leqslant R$, $\| x^2 \| \leqslant R$, $t \in]-\infty, \infty[$, $\lambda \in [0, \Lambda]$ le système différentiel (4.6.1) est un cas particulier de (3.2.1) et nous pouvons lui appliquer la méthode de Cesari et ses conséquences. Avec les notations du chapitre 3, soit $x^0(t)$ un polynôme trigonométrique de période 2π et d'ordre $m \geqslant m_0$, tel que, si R est fini,

$$|| x^0(t) || \leqslant R_1 < R, \; t \in]-\infty, \infty[$$

et, α étant le vecteur-colonne des composantes des coefficients de Fourier de $x^0(t)$ défini en (3.4.1), soit $y(t, \alpha, \lambda)$ la fonction associée à $x^0(t)$ par le système différentiel (4.6.1). Puisque, pour $\lambda = 0$, le système différentiel (4.6.1) est du type (3.6.1), il résulte de l'inégalité (3.6.2) que m sera en tous cas tel que

$$m > \max_{i=1,2,\ldots,p} s_i \tag{4.6.3}$$

puisque $|| A || \geqslant 1 + s_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, p$, en vertu de la forme des A_i. D'autre part, par le théorème 3-7, $y(t, \alpha, 0) \equiv x^0(t)$.

En vue d'écrire explicitement les équations déterminantes, posons

$$x^0(t) = \operatorname{col}\,(u^{(1),0}, \ldots, u^{(p),0}, v^{(1),0}, \ldots, v^{(r),0}, w^0)$$

et

$$u^{(i),0} = a_0^{(i)} + \sum_{s=1}^{m} (a_s^{(i)} \cos st + b_s^{(i)} \sin st), \; i = 1, 2, \ldots, p.$$

$$v^{(j),0} = c_0^{(j)} + \sum_{s=1}^{m} (c_s^{(j)} \cos st + d_s^{(j)} \sin st), \; j = 1, 2, \ldots, r,$$

$$w^0 = e_0 + \sum_{s=1}^{m} (e_s \cos st + f_s \sin st),$$

$$x^0 = a_0 + \sum_{s=1}^{m} (a_s \cos st + b_s \sin st).$$

En tenant compte de la condition (4.6.3), des manipulations algébriques simples permettent de mettre les équations déterminantes sous la forme des équations (4.6.4-1) à (4.6.4-12). Dans certaines de ces expressions, le nombre λ apparaissait en facteur et on a simplifié l'expression correspondante par cette quantité. De cette manière, les solutions des équations (4.6.4) correspondront aux solutions périodiques de (4.6.1) pour $\lambda \in]0, \Lambda]$ et, les équations déterminantes restant définies et continues en $\lambda = 0$, à leur limite lorsque $\lambda \to 0$, c'est-à-dire aux solutions périodiques de période 2π du système différentiel linéaire

$$\dot{x} = Ax$$

vers lesquelles tendent, lorsque $\lambda \to 0$, les solutions périodiques du système différentiel non linéaire (4.6.1). Il est clair que l'annulation identique, pour $\lambda = 0$, de certaines équations déterminantes avant simplification par λ résulte du fait que, dans un système de type (3.6.1), une solution périodique non triviale n'est jamais isolée. Nous obtenons donc, pour les solutions périodiques de période 2π de (4.6.1) lorsque $\lambda \in]0, \Lambda]$ et leur limite en $\lambda = 0$, les équations déterminantes suivantes :

$$A_i a_0^{(i)} + \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^{(i)}(y, t, \lambda) dt = 0 \tag{4.6.4-1}$$

$$\begin{pmatrix} A_i & -sI \\ sI & A_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_s^{(i)} \\ b_s^{(i)} \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{\pi}\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} f^{(i)}(y, t, \lambda)\cos st \\ f^{(i)}(y, t, \lambda)\sin st \end{pmatrix} dt = 0 \qquad (4.6.4\text{-}2)$$

$$s = 1, 2, \ldots, m, \ s \neq s_i \ ;$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathcal{A}_i & & & \\ \hline \mathcal{E} & \mathcal{A}_i & & 0 \\ \hline & & \ddots & \\ \hline 0 & & \mathcal{E} & \mathcal{A}_i \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} a_{s_i,1}^{(i)} \\ b_{s_i,2}^{(i)} \\ a_{s_i,2}^{(i)} \\ b_{s_i,1}^{(i)} \\ \hline a_{s_i,3}^{(i)} \\ b_{s_i,4}^{(i)} \\ a_{s_i,4}^{(i)} \\ b_{s_i,3}^{(i)} \\ \hline \vdots \\ \hline a_{s_i,2\alpha_i-3}^{(i)} \\ b_{s_i,2\alpha_i-2}^{(i)} \\ a_{s_i,2\alpha_i-2}^{(i)} \\ b_{s_i,2\alpha_i-3}^{(i)} \end{array}\right]$$

$$+ \frac{\lambda}{\pi}\int_0^{2\pi} \left[\begin{array}{c} f_1^{(i)}(y, t, \lambda)\sin s_i t \\ f_3^{(i)}(y, t, \lambda)\cos s_i t - f_4^{(i)}(y, t, \lambda)\sin s_i t \\ f_2^{(i)}(y, t, \lambda)\sin s_i t \\ f_4^{(i)}(y, t, \lambda)\cos s_i t + f_3^{(i)}(y, t, \lambda)\sin s_i t \\ \hline f_3^{(i)}(y, t, \lambda)\sin s_i t \\ f_5^{(i)}(y, t, \lambda)\cos s_i t - f_6^{(i)}(y, t, \lambda)\sin s_i t \\ f_4^{(i)}(y, t, \lambda)\sin s_i t \\ f_6^{(i)}(y, t, \lambda)\cos s_i t + f_5^{(i)}(y, t, \lambda)\sin s_i t \\ \hline \vdots \\ \hline f_{2\alpha_i-3}^{(i)}(y, t, \lambda)\sin s_i t \\ f_{2\alpha_i-1}^{(i)}(y, t, \lambda)\cos s_i t - f_{2\alpha_i}^{(i)}(y, t, \lambda)\sin s_i t \\ f_{2\alpha_i-2}^{(i)}(y, t, \lambda)\sin s_i t \\ f_{2\alpha_i}^{(i)}(y, t, \lambda)\cos s_i t + f_{2\alpha_i-1}^{(i)}(y, t, \lambda)\sin s_i t \end{array}\right] dt = 0 \qquad (4.6.4\text{-}3)$$

avec

$$\mathcal{A}_i = \left(\begin{array}{cc|cc} s_i & s_i & & \\ 1 & -1 & & \\ \hline & & s_i & -s_i \\ & & 1 & 1 \end{array}\right), \qquad \mathcal{E} = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 0 & \\ & 1 & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

les éléments non écrits étant nuls ;

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f_1^{(i)}(y,t,\lambda)\cos s_it - f_2^{(i)}(y,t,\lambda)\sin s_it]\,dt = 0 \tag{4.6.4-4}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f_2^{(i)}(y,t,\lambda)\cos s_it + f_1^{(i)}(y,t,\lambda)\sin s_it]\,dt = 0 \tag{4.6.4-5}$$

$$b^{(i)}_{s_i,2\alpha_i-3} + s_i(a^{(i}_{s_i,2\alpha_i-1} + b^{(i)}_{s_i,2\alpha_i}) + \frac{\lambda}{\pi}\int_0^{2\pi} f^{(i)}_{2\alpha_i-1}(y,t,\lambda)\sin s_it\,dt = 0 \tag{4.6.4-6}$$

$$b^{(i)}_{s_i,2\alpha_i-2} + s_i(a^{(i)}_{s_i,2\alpha_i} - b^{(i)}_{s_i,2\alpha_i-1}) + \frac{\lambda}{\pi}\int_0^{2\pi} f^{(i)}_{2\alpha_i}(y,t,\lambda)\sin s_it\,dt = 0 \tag{4.6.4-7}$$

$$i = 1, 2, \ldots, p\,;$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_1^{(j)}(y,t,\lambda)\,dt = 0 \tag{4.6.4-8}$$

$$\begin{pmatrix} c^{(j)}_{0,1} \\ c^{(j)}_{0,2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c^{(j)}_{0,\beta_j-1} \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix} g_2^{(j)}(y,t,\lambda) \\ g_3^{(j)}(y,t,\lambda) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g^{(j)}_{\beta_j}(y,t,\lambda)\end{pmatrix} dt = 0 \tag{4.6.4-9}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{B}_j & -s\mathrm{I} \\ \hline s\mathrm{I} & \mathrm{B}_j \end{array}\right)\begin{pmatrix} c_s^{(j)} \\ \hline d_s^{(j)} \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{\pi}\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix} g^{(j)}(y,t,\lambda)\cos st \\ \hline g^{(j)}(y,t,\lambda)\sin st\end{pmatrix} dt = 0 \tag{4.6.4-10}$$

$$s = 1, 2, \ldots, m\,;\ j = 1, 2, \ldots, r\,;$$

$$\mathrm{C}e_0 + \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(y,t,\lambda)\,dt = 0 \tag{4.6.4-11}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{C} & -s\mathrm{I} \\ \hline s\mathrm{I} & \mathrm{C} \end{array}\right)\begin{pmatrix} e_s \\ \hline f_s \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{\pi}\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix} h(y,t,\lambda)\cos st \\ \hline h(y,t,\lambda)\sin st\end{pmatrix} dt = 0 \tag{4.6.4-12}$$

$$s = 1, 2, \ldots, m.$$

Remarquons que les quantités

$$\text{dét } \mathrm{A}_i,\ \text{dét}\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A}_i & -s\mathrm{I} \\ \hline s\mathrm{I} & \mathrm{A}_i \end{array}\right) = \text{dét}\,(\mathrm{A}_i^2 + s^2\mathrm{I}),\ s = 1, 2, \ldots, m\,;\ s \neq s_i\,;$$

$$\text{dét}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_i & & & & \\ \mathscr{E}\boldsymbol{a}_i & & & & \\ & \mathscr{E}\boldsymbol{a}_i & & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & \mathscr{E}\boldsymbol{a}_i & \cdot \end{pmatrix} = (-4s_i^2)^{\alpha_i-1},$$

$$i = 1, 2, \ldots, p\,;$$

$$\text{dét}\left(\frac{B_j}{sI}\middle|\frac{-sI}{B_j}\right) = \text{dét}\,(B_j^2 + s^2 I),\ s = 1, 2, \ldots, m\ ;\ j = 1, 2, \ldots, r\ ;$$

$$\text{dét C et dét}\left(\frac{C}{sI}\middle|\frac{-sI}{C}\right) = \text{dét}\,(C^2 + s^2 I),\ s = 1, 2, \ldots, m,$$

sont toutes différentes de zéro par hypothèse. Si nous posons

$$\alpha = \operatorname{col}(\alpha', \alpha'')$$

où

$$\alpha' = \operatorname{col}(a^{(1)}_{s_1,2\alpha_1-1}, b^{(1)}_{s_1,2\alpha_1-1}, \ldots, a^{(p)}_{s_p,2\alpha_p-1}, b^{(p)}_{s_p,2\alpha_p-1},$$
$$c^{(1)}_{0,\beta_1}, c^{(2)}_{0,\beta_2}, \ldots, c^{(r)}_{0,\beta_r})$$

et α'' est le vecteur-colonne dont les composantes sont les autres coefficients de Fourier de $x^0(t)$ dans l'ordre qu'ils occupaient dans α, les équations déterminantes peuvent s'écrire, après réarrangement de l'ordre, sous forme abrégée

$$F_1(\alpha', \alpha'', \lambda) = 0 \tag{4.6.5}$$

$$D'\alpha' + D''\alpha'' - \lambda F_2(\alpha', \alpha'', \lambda) = 0 \tag{4.6.6}$$

où (4.6.5) représente l'ensemble des $k' = 2p + r$ équations (4.6.4-4), (4.6.4-5) et (4.6.4-8), et (4.6.6) les $k'' = (2m + 1)n - (2p + r)$ équations restantes, D' et D'' étant respectivement des matrices de dimension $k' \times k''$ et $k'' \times k''$, avec dét $D'' \neq 0$, le théorème 2-9 et le théorème 4-1 ont pour conséquence immédiate le

Théorème 4-5 : Ω étant un ouvert borné contenu, si R est fini, dans $\{\alpha \in E^{(2m+1)n} : \nu(x^0) \leqslant R_1 < R\}$ et Ω' étant l'ouvert du sous-espace E^{2p+r} des α' défini par $\Omega' = \Omega \cap E^{2p+r}$, soient $F : \alpha \to \operatorname{col}[F_1(\alpha', \alpha'', \lambda), D'\alpha' + D''\alpha'' - \lambda F_2(\alpha', \alpha'', \lambda)]$ la famille d'applications définies dans Ω par (4.6.5) *et* (4.6.6), *et $F_{1,0} : \alpha' \to F_{1,0}(\alpha')$ l'application définie dans Ω' par* (4.6.5) *pris en $\lambda = 0$, $\alpha'' = -(D'')^{-1}D'\alpha'$. Si*

$$d\,[F(\alpha, \lambda), \Omega, 0]$$

existe quel que soit $\lambda \in [0, \Lambda]$ (c'est-à-dire si $F(\alpha, \lambda) \neq 0$ pour $\alpha \in \dot{\Omega}$, $\lambda \in [0, \Lambda]$), et si

$$d\,[F_{1,0}(\alpha'), \Omega', 0] \neq 0,$$

le système différentiel de Coddington-Levinson (4.6.1) *possède au moins une solution périodique de période 2π quel que soit $\lambda \in [0, \Lambda]$.*

Un corollaire intéressant est le suivant :

Corollaire 4-3 : Considérons un système de Coddington-Levinson tel que $p = r = 0$. Soit Ω un ouvert borné contenu, si R est fini, dans $\{\alpha'' \in E^{(2m+1)\gamma} : \nu(w^0) \leqslant R_1 < R\}$ où $\alpha'' = \operatorname{col}(e_0, e_1, f_1, \ldots, e_m, f_m)$, et soit $F : \alpha'' \to F(\alpha'', \lambda)$ la famille d'applications définies dans Ω par les premiers membres de (4.6.6). *Si*

$$d\,[F(\alpha'', \lambda), \Omega, 0]$$

existe quel que soit $\lambda \in [0, \Lambda]$ (c'est-à-dire si $F(\alpha, \lambda) \neq 0$ pour $\alpha'' \in \dot{\Omega}$, $\lambda \in [0, \Lambda]$), le système différentiel en question possède au moins une solution périodique de période 2π quel que soit $\lambda \in [0, \Lambda]$.

En effet, par suite de la forme de (4.6.6) et du corollaire 2-4,

$$d\,[\mathrm{F}(\alpha'', 0), \Omega, 0] = \operatorname{sgn}\,[\text{dét}\,\mathrm{C}.\prod_{s=1}^{m} \text{dét}\,(\mathrm{C}^2 + s^2\mathrm{I})] = \pm 1,$$

et le corollaire résulte alors des théorèmes 2-2, 2-3, et 4-1.

Enfin, on pourra trouver en [68] et [71] une étude systématique de matrices Q par rapport auxquelles les systèmes de Coddington-Levinson possèdent la propriété E et une discussion des équations déterminantes correspondantes.

4-7. *Solutions périodiques de systèmes de Coddington-Levinson faiblement non linéaires*

Étant donné son importance théorique et ses nombreuses applications, l'étude des solutions périodiques des systèmes différentiels faiblement non linéaires a donné lieu à une littérature très abondante et nous nous limiterons à signaler les méthodes fondamentales proposées, depuis les travaux de H. Poincaré [76], par N. M. Krylov, K. Bogolioubov et Yu. A. Mitropolsky [7], I. G. Malkin [65], J. Haag [45, 85], N. O. Friedrichs [36–38], E. A. Coddington et N. Levinson [19, 20], Y. Sibuya [91, 92] et L. Cesari et J. K. Hale [17, 49].

Il existe bien entendu, entre tous ces travaux que nous venons de citer, de nombreux points communs et J. K. Hale a fait dans l'introduction de l'ouvrage cité en [49] une intéressante comparaison. Nous allons insister sur quelques-unes de leurs caractéristiques communes, afin de mettre clairement en évidence les différences entre ces approches et celle que nous proposons. Dans toutes ces méthodes, l'existence d'une solution périodique est liée (comme dans la méthode générale de Cesari exposée au chapitre 3) à l'existence d'une solution d'un système *fini* d'équations transcendantes (appelées, selon les auteurs, *conditions de périodicité*, *équations de bifurcation* ou *équations déterminantes*), mais ces dernières équations ne sont valables que pour des valeurs suffisamment petites du paramètre λ. Par contre, les équations déterminantes (3.7.1) ont été établies dans le même domaine de validité en λ que celui de l'équation différentielle elle-même. Elles sont d'autre part en plus grand nombre que dans les méthodes du type de Poincaré, mais nous verrons que cette caractéristique n'intervient pas dans l'application aux systèmes faiblement non linéaires. Il n'y a donc, par la nature même des méthodes classiques, aucune possibilité d'extension des résultats aux valeurs non petites de λ. D'autre part, dans tous les travaux cités ci-dessus, il convient de traiter séparément le cas *non critique* ou *non résonant* (i. e. le système (4.3.1) en $\lambda = 0$ n'admet aucune solution périodique de période T non triviale) et le cas *critique* ou *résonant* (i. e. (4.3.1) en $\lambda = 0$ admet des solutions périodiques non triviales de période T). Nous avons vu par contre que la méthode du chapitre 3 ne fait aucune distinction de ce genre. Enfin, toutes ces méthodes apparaissent essentiellement comme des méthodes de perturbation de systèmes différentiels linéaires, et s'appuient ainsi fortement sur les propriétés des solutions de ces systèmes, qu'il n'est plus nécessaire de connaître lorsqu'on prend pour point de départ la méthode générale de Cesari.

L'application de la théorie du degré topologique à l'étude des équations de bifurcation (obtenues par la méthode de Friedrichs ou de Coddington-Levinson) de systèmes différentiels faiblement non linéaires a été développée de façon très élégante et très complète par J. Cronin [23, 27, 29]. Dans le même type de problèmes, R. W. Bass [5] avait déjà utilisé le degré topologique, mais uniquement lorsque celui-ci était égal à la somme des signatures des jacobiens. L. CESARI a brièvement signalé dans [13, 14] les possibilités dans ce domaine et a en outre fait usage des théorèmes de Brouwer et de Miranda qui se rattachent à cet ordre d'idées. Nous allons voir que l'on peut, dans le cadre de ce travail, reformuler le théorème fondamental de Cronin sous des hypothèses quelque peu plus générales. Pour une étude plus détaillée des intéressants apports du degré topologique dans l'étude des systèmes faiblement non linéaires, nous renverrons aux travaux originaux de J. CRONIN et en particulier à la monographie [29].

Considérons donc un système différentiel du type de Coddington-Levinson. Avec les notations du théorème 4-5, il résulte du théorème 4-2 que le système différentiel (4.6.1) possédera au moins une solution périodique de période 2π pour tout $\lambda \in [0, \lambda_1]$, où λ_1 est contenu dans $]0, \Lambda]$ et suffisamment petit, si $d\,[F_{1,0}(\alpha'), \Omega', 0]$ existe et différent de zéro. Or, d'une manière explicite, $F_{1,0}(\alpha')$ est l'application définie dans Ω' par

$$a^{(i)}_{s_i,2\alpha_i-1} \to \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f_1^{(i)}(y(t), t, 0) \cos s_i t - f_2^{(i)}(y(t), t, 0) \sin s_i t]\, dt,$$

$$b^{(i)}_{s_i,2\alpha_i-1} \to \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f_2^{(i)}(y(t), t, 0) \cos s_i t + f_1^{(i)}(y(t), t, 0) \sin s_i t]\, dt, \qquad (4.7.1)$$

$$i = 1, 2, \dots, p\,;$$

$$c^{(j)}_{0,\beta_j} \to \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_1^{(j)}(y(t), t, 0)\, dt,$$

$$j = 1, 2, \dots, r\,;$$

avec

$$y(t) = (0, 0, \dots, 0, a^{(i)}_{s_i,2\alpha_i-1} \cos s_i t + b^{(i)}_{s_i,2\alpha_i-1} \sin s_i t, b^{(i)}_{s_i,2\alpha_i-1} \cos s_i t$$
$$- a^{(i)}_{s_i,2\alpha_i-1} \sin s_i t,\ i = 1, 2, \dots, p\,;\ 0, 0, \dots, c^{(j)}_{0,\beta_j},\ j = 1, 2, \dots, r\,;\ 0, 0, \dots, 0) \qquad (4.7.2)$$

On obtient ainsi un théorème démontré par J. CRONIN [24] sous l'hypothèse de l'existence et de la continuité des dérivées partielles premières de $q(x, t, \lambda)$ par rapport aux x_j, $j = 1, 2, \dots, n$:

Théorème 4-6 : *Ω étant un ouvert borné de E^{2p+r} contenu, si R est fini, dans $\{\alpha' : \nu(y(t)) \leq R_1 < R\}$, où $y(t)$ est donné en* (4.7.2), *et $F_{1,0} : \alpha' \to F_{1,0}(\alpha')$ l'application définie, dans Ω, par* (4.7.1), *si $d\,[F_{1,0}(\alpha'), \Omega, 0]$ existe et est différent de zéro, il existe un $\lambda_1 \in]0, \Lambda]$ tel que, pour $\lambda \in [0, \lambda_1]$, le système différentiel* (4.6.1) *possède au moins une solution périodique de période* 2π.

Dans la terminologie des méthodes classiques, le nombre $2p + r$ est dit le degré de dégénérescence du système (4.6.1) ; c'est le nombre maximum de solutions périodiques linéairement indépendantes de période 2π de (4.6.1) pris en $\lambda = 0$.

Dans le cas de systèmes de Coddington-Levinson possédant la propriété E par rapport à une matrice Q, le calcul effectif du degré topologique peut être facilité par une réduction du nombre de composantes de l'application considérée. En outre, la solution périodique dont on démontre l'existence possède dans ce cas certaines propriétés de symétrie qu'on ne peut obtenir à partir du théorème 4-6. Ce problème est traité dans le travail cité en [71]. En ce qui concerne l'étude des équations déterminantes au moyen du théorème des fonctions implicites, nous renverrons le lecteur aux références [66–68, 71] où sont étendus, dans différentes directions, des résultats de E. A. CODDINGTON, N. LEVINSON, L. CESARI et J. K. HALE, et où l'approximation des solutions périodiques est considérée dans plusieurs cas particuliers importants.

4.8. *Équations déterminantes de systèmes différentiels possédant la propriété* E.

Nous allons montrer dans ce paragraphe comment la propriété E introduite précédemment permet de réduire le nombre d'équations déterminantes. Nous nous contenterons de donner deux exemples particulièrement importants dans les applications, renvoyant le lecteur, pour plus de détails, aux références [68] et [71].

Supposons tout d'abord que le second membre du système (3.2.1) soit tel que

$$q\left(-x, t+\frac{T}{2}, \lambda\right) = -q(x, t, \lambda) \tag{4.8.1}$$

dans tout son domaine de définition. Le système différentiel (3.2.1) possède donc la propriété E par rapport à $\left(-I, 1, \frac{T}{2}\right)$, où I est la matrice identité. Dès lors, si $x^0(t)$ vérifie la relation

$$-x^0\left(t+\frac{T}{2}\right) = x^0(t), \ t \in E^1,$$

en d'autres termes, si

$$x^0(t) = \sum_{s=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} [a_{2s+1} \cos (2s+1)\omega t + b_{2s+1} \sin (2s+1)\omega t],$$

$\left[\frac{m-1}{2}\right]$ désignant le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{m-1}{2}$, la fonction associée $y(t)$ satisfera à la relation

$$-y\left(t+\frac{T}{2}\right) = y(t), \ t \in E^1.$$

En ce qui concerne les équations déterminantes correspondantes, on aura, si

$$\alpha = (a_1, b_1, a_3, b_3, \ldots, a_{2\left[\frac{m-1}{2}\right]+1}, b_{2\left[\frac{m-1}{2}\right]+1}),$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T q\,[y(t, \alpha, \lambda), t, \lambda]\,dt = \frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} + \int_{\frac{T}{2}}^T\right) q\,[y(t, \alpha, \lambda), t, \lambda]\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} q\,[y(t, \alpha, \lambda), t, \lambda]\,dt + \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} q\left[-y(t, \alpha, \lambda), t+\frac{T}{2}, \lambda\right] dt \equiv 0\,;$$

$$\frac{2}{T}\int_0^T q\,[y(t,\alpha,\lambda),t,\lambda]\left\{\begin{matrix}\cos 2s\omega t\\ \sin 2s\omega t\end{matrix}\right\}dt = \frac{2}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} + \int_{\frac{T}{2}}^{T}\right) q\,[y(t,\alpha,\lambda),t,\lambda]\left\{\begin{matrix}\cos 2s\omega t\\ \sin 2s\omega t\end{matrix}\right\}dt$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} q\,[y(t,\alpha,\lambda),t,\lambda]\left\{\begin{matrix}\cos 2s\omega t\\ \sin 2s\omega t\end{matrix}\right\}dt +$$

$$\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} q\left[-y(t,\alpha,\lambda),t+\frac{T}{2},\lambda\right]\left\{\begin{matrix}\cos 2s\omega\left(t+\dfrac{T}{2}\right)\\ \sin 2s\omega\left(t+\dfrac{T}{2}\right)\end{matrix}\right\}dt = 0,$$

en utilisant (4.8.1). Par conséquent, le système d'équations déterminantes se ramène au système des $2n\left(\left[\frac{m-1}{2}\right]+1\right)$ équations

$$(2s+1)\omega b_{2s+1} - 2T^{-1}\int_0^T q\,[y(t,\alpha,\lambda),t,\lambda]\cos(2s+1)\omega t\,dt = 0$$

$$(2s+1)\omega a_{2s+1} + 2T^{-1}\int_0^T q\,[y(t,\alpha,\lambda),t,\lambda]\sin(2s+1)\omega t\,dt = 0,$$

$$s = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{m-1}{2}\right],$$

en les $2n\left(\left[\frac{m-1}{2}\right]+1\right)$ inconnues que sont les composantes scalaires de α.

Supposons maintenant que le système différentiel (3.2.1) possède la propriété E par rapport à une matrice diagonale Q dont les éléments diagonaux sont égaux à $+1$ ou -1 (et non nécessairement de même signe). Si $x^0(t)$ est choisi de telle sorte que

$$Qx^0(-t) = x^0(t),$$

c'est-à-dire

$$x_i^0(t) = \sum_{s=0}^{m} a_{s,i}\cos s\omega t$$

pour les i tels que $(Q)_{ii} = +1$, et

$$x_i^0(t) = \sum_{s=1}^{m} b_{s,i}\sin s\omega t$$

pour les i tels que $(Q)_{ii} = -1$, alors, la fonction associée $y(t)$ satisfera aux relations

$$Qy(-t) = y(t) \quad \text{et} \quad -Q\dot{y}(-t) = \dot{y}(t),\ t\in E^1.$$

Par conséquent, pour les i correspondant à $(Q)_{ii} = +1$, on a

$\{\dot{y}_i(-t) - q_i\,[y(-t), -t, \lambda]\}\cos(-st) =$

$\{-(Q)_{ii}\dot{y}_i(t) - q_i\,[Qy(t), -t, \lambda]\}\cos st =$

$\{-\dot{y}_i(t) + (Q)_{ii}q_i\,[y(t), t, \lambda]\}\cos st = -\{\dot{y}_i(t) - q_i\,[y(t), t, \lambda]\}\cos st,$

$$s = 0, 1, 2, \ldots, m,$$

ce qui entraîne

$$\frac{2}{T}\int_0^T \{\dot{y}_i(t) - q_i\,[y(t), t, \lambda]\} \cos st\, dt \equiv 0, \;\; s = 0, 1, \ldots, m.$$

De même, pour les i tels que $(Q)_{ii} = -1$, on a

$$\frac{2}{T}\int_0^T \{\dot{y}_i(t) - q_i\,[y(t), t, \lambda]\} \sin st\, dt \equiv 0, \;\; s = 1, 2, \ldots, m,$$

et dès lors les équations déterminantes se ramènent au système d'équations

$$s\omega a_{s,i} + 2T^{-1}\int_0^T q_i\,[y(t, \alpha, \lambda), t, \lambda] \sin s\omega t\, dt = 0,$$

$$i = i_1, i_2, \ldots, i_{r_1},$$

$$T^{-1}\int_0^T q_i\,[y(t, \alpha, \lambda), t, \lambda]\, dt = 0,$$

$$s\omega b_{s,i} - 2T^{-1}\int_0^T q_i\,[y(t, \alpha, \lambda), t, \lambda] \cos s\omega t\, dt = 0,$$

$$i = i_{r_1+1}, i_{r_1+2}, \ldots, i_n,$$

$$s = 1, 2, \ldots, m,$$

où $(Q)_{ii} = +1$ pour $i = i_1, i_2, \ldots, i_{r_1}$ et $(Q)_{ii} = -1$ pour $i = i_{r_1+1}, \ldots, i_n$. Si on pose $r_2 = n - r_1$, on voit qu'il s'agit d'un système de $2mr_1 + (2m+1)r_2$ équations en $(2m+1)r_1 + 2mr_2$ inconnues et ces deux nombres ne seront égaux que si $r_1 = r_2$. Il faudra donc que l'ordre n du système (3.2.1) soit pair et que $r_1 = r_2 = \dfrac{n}{2}$.

4-9. *Un cas particulier important*

Étant donné son importance dans les applications, examinons en détail le cas du système d'ordre $n = kr$, $k \geqslant 1$, $r \geqslant 1$,

$$\frac{d^k z}{dt^k} = \lambda f\left(\frac{d^{k-1}z}{dt^{k-1}}, \frac{d^{k-2}z}{dt^{k-2}}, \ldots, \frac{dz}{dt}, z, t, \lambda\right), \;\; \lambda \in [0, 1] \tag{4.9.1}$$

où $z = \mathrm{col}\,(z_1, z_2, \ldots, z_r)$, $f = \mathrm{col}\,(f_1, f_2, \ldots, f_r)$, les fonctions f_j satisfaisant aux mêmes hypothèses que les fonctions q_j dans (3.2.1) avec $T = 2\pi$. Si nous posons

$$\frac{d^{k-1}z_1}{dt^{k-1}} = x_1^{(1)}, \;\; \frac{d^{k-1}z_2}{dt^{k-1}} = x_1^{(2)}, \;\; \ldots, \;\; \frac{d^{k-1}z_r}{dt^{k-1}} = x^{(r)},$$

$$\ldots \;\; \ldots \;\; \ldots \;\; \ldots \;\; \ldots \;\; \ldots \;\; \ldots \;\; \ldots \;\; \ldots \;\; \ldots$$

$$z_1 = x_k^{(1)}, \;\; z_2 = x_k^{(2)}, \;\; \ldots, \;\; z_r = x_k^{(r)},$$

et

$$x = \mathrm{col}\,(x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(r)}, \ldots, x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(r)}),$$

nous obtenons le système équivalent

$$\dot{x}^{(j)} = Bx^{(j)} + \lambda f^{(j)}(x, t, \lambda), \;\; j = 1, 2, \ldots, r, \tag{4.9.2}$$

où

$$x^{(j)} = \mathrm{col}\,(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \ldots, x_k^{(j)}) = \mathrm{col}\left(\frac{d^{k-1}z_j}{dt^{k-1}}, \frac{d^{k-2}z_j}{dt^{k-2}}, \ldots, z_j\right)$$

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & 0 & & & & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(matrice de dimension } k \times k\text{)},$$

$$f^{(j)} = \mathrm{col}\,[f_j(x, t, \lambda), 0, \ldots, 0].$$

Il s'agit donc d'un système de Coddington-Levinson (4.6.1) particulier, avec $p = \gamma = 0$, $\beta_j = k$, $j = 1, 2, \ldots, r$. Par conséquent, les équations déterminantes sont de la forme (4.6.4-8, 9), soit, avec les notations $a_0^{(j)}$, $a_s^{(j)}$, $b_s^{(j)}$ au lieu de $c_0^{(j)}$, $c_s^{(j)}$, $d_s^{(j)}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_j(y, t, \lambda)\, dt = 0, \tag{4.9.3-1}$$

$$a_{0,1}^{(j)} = 0,\ a_{0,2}^{(j)} = 0, \ldots, a_{0,k-1}^{(j)} = 0, \tag{4.9.3-2}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{B} & -s\mathrm{I} \\ \hline s\mathrm{I} & \mathrm{B} \end{array}\right)\begin{pmatrix} a_s^{(j)} \\ \hline b_s^{(j)} \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{\pi}\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix} f^{(j)}(y, t, \lambda)\cos st \\ \hline f^{(j)}(y, t, \lambda)\sin st \end{pmatrix} dt = 0, \tag{4.9.3-3}$$

$$j = 1, 2, \ldots, r\,;\ s = 1, 2, \ldots, m.$$

Si nous posons

$$\alpha = \mathrm{col}\,(a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, b_1^{(1)}, \ldots, a_m^{(1)}, b_m^{(1)}, \ldots, a_m^{(r)}, b_m^{(r)})$$

$$\alpha_0 = \mathrm{col}\,(a_{0,k}^{(1)}, a_{0,k}^{(2)}, \ldots, a_{0,k}^{(r)})$$

et que nous désignons respectivement par $\mathrm{F}(\alpha, \lambda)$ et $\mathrm{F}_0(\alpha_0)$ les applications définies par les premiers membres de (4.9.3) et par

$$\alpha_0 \to \mathrm{col}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(0, \ldots, 0, \alpha_0, t, 0)dt, \ldots, \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_r(0, \ldots, 0, \alpha_0, t, 0)dt\right] \tag{4.9.4}$$

nous déduisons immédiatement du théorème 4-5 le

Théorème 4-7 : *Ω étant un ouvert borné contenu, si R est fini, dans*

$$\{\alpha \in \mathrm{E}^{(2m+1)n} : \nu(x^0) \leqslant \mathrm{R}_1 < \mathrm{R}\}$$

et Ω_0 étant l'ouvert du sous-espace E^r des α_0 défini par $\Omega_0 = \Omega \cap \mathrm{E}^r$, si

$$d\,[\mathrm{F}(\alpha, \lambda), \Omega, 0]$$

est défini quel que soit $\lambda \in [0, 1]$ (c'est-à-dire si $\mathrm{F}(\alpha, \lambda) \neq 0$ pour $\alpha \in \dot{\Omega}$, $\lambda \in [0, 1]$), et si

$$d\,[\mathrm{F}_0(\alpha_0), \Omega_0, 0] \neq 0,$$

le système différentiel (4.9.1) *possède au moins, quel que soit $\lambda \in [0, 1]$, une solution périodique de période 2π.*

Supposons maintenant que le second membre de (4.9.1) satisfasse, dans son domaine de définition, à la relation

$$f\left(-\frac{d^{k-1}z}{dt^{k-1}}, -\frac{d^{k-2}z}{dt^{k-2}}, \dots, -\frac{dz}{dt}, -z, t+\pi, \lambda\right) =$$

$$-f\left(\frac{d^{k-1}z}{dt^{k-1}}, \frac{d^{k-2}z}{dt^{k-2}}, \dots, \frac{dz}{dt}, z, t, \lambda\right). \tag{4.9.5}$$

Il est clair dans ce cas que le système différentiel (4.9.2) possède la propriété E par rapport à $(-\mathrm{I}, 1, \pi)$. Dès lors, si $x^0(t)$ est choisi de telle sorte que

$$-x^0(t+\pi) = x^0(t), \; t \in \mathrm{E}^1,$$

la fonction associée $y(t)$ satisfera à la relation

$$-y(t+\pi) = y(t), \; t \in \mathrm{E}^1,$$

et, en vertu des résultats du paragraphe 4-8, le système d'équations déterminantes se réduira au système formé par les équations (4.9.3-3) pour $s = 1, 3, \dots, 2m'+1$, où $2m'+1$ est le plus grand nombre impair inférieur ou égal à m, les inconnues étant les $a_1^{(j)}, b_1^{(j)}, a_3^{(j)}, b_3^{(j)}, \dots, a_{2m'+1}^{(j)}, b_{2m'+1}^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, r$, que nous désignerons encore d'une manière globale par α, $\mathrm{F}(\alpha, \lambda)$ étant encore l'application correspondant aux premiers membres des équations déterminantes. On a le

Théorème 4-8 : *Ω étant un ouvert borné contenu, si* R *est fini, dans*

$$\{\alpha \in \mathrm{E}^{(2m'+1)n} : \nu(x^0) \leqslant \mathrm{R}_1 < \mathrm{R}\},$$

si

$$d\,[\mathrm{F}(\alpha, \lambda), \Omega, 0]$$

est défini quel que soit $\lambda \in [0, 1]$, le système différentiel (4.9.1) *possède, pour tout $\lambda \in [0, 1]$, au moins une solution périodique de période 2π telle que $z(t+\pi) = -z(t)$, lorsque son second membre vérifie la relation* (4.9.5).

En effet, par suite du corollaire 2-4,

$$d\,[\mathrm{F}(\alpha, 0), \Omega, 0] = \operatorname{sgn} \prod_{s=0}^{m'} \text{dét}\,[\mathrm{B}^2 + (2s+1)^2\mathrm{I}] = \pm 1.$$

Supposons maintenant que k soit pair et que, dans tout le domaine de définition, on ait

$$f\left(\frac{d^{k-1}z}{dt^{k-1}}, -\frac{d^{k-2}z}{dt^{k-2}}, \dots, \frac{dz}{dt}, -z, -t, \lambda\right) =$$

$$-f\left(\frac{d^{k-1}z}{dt^{k-1}}, \frac{d^{k-2}z}{dt^{k-2}}, \dots, z, t, \lambda\right). \tag{4.9.6}$$

Dans ce cas, on vérifie aisément que le système (4.9.2) possède la propriété E par rapport à

$$\mathrm{Q} = \operatorname{diag}(1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1).$$

Par conséquent, si $x^0(t)$ est choisi de telle sorte que

$$Qx^0(-t) = x^0(t),$$

c'est-à-dire

$$x_i^0(t) = a_{0,i} + \sum_{s=1}^{m} a_{s,i} \cos st, \text{ si } i \text{ est impair,}$$

$$x_i^0(t) = \sum_{s=1}^{m} b_{s,i} \sin st, \text{ si } i \text{ est pair,}$$

la fonction associée $y(t)$ satisfera à la relation

$$Qy(-t) = y(t),$$

et, en vertu des résultats du paragraphe 4-8, les équations déterminantes se réduiront au système

$$a_{0,1}^{(j)} = 0,\ a_{0,3}^{(j)} = 0,\ \ldots,\ a_{0,k-1}^{(j)} = 0,$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I} & -s\mathrm{I} \\ \hline s\mathrm{I} & \underline{\mathrm{B}} \end{array}\right)\begin{pmatrix} \underline{a}_s^{(j)} \\ \hline \underline{b}_s^{(j)} \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{\pi}\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix} 0 \\ \hline \underline{f}^{(j)}(y, t, \lambda) \sin st \end{pmatrix} dt = 0, \qquad (4.9.7)$$

$$j = 1, 2, \ldots, r\,;\ s = 1, 2, \ldots, m,$$

où

$$\underline{a}_s^{(j)} = \operatorname{col}\,(a_{s,1}^{(j)}, a_{s,3}^{(j)}, \ldots, a_{s,k-1}^{(j)}),$$

$$\underline{b}_s^{(j)} = \operatorname{col}\,(b_{s,2}^{(j)}, b_{s,4}^{(j)}, \ldots, b_{s,k}^{(j)}),$$

$$\underline{f}^{(j)} = \operatorname{col}\,(f_j(x, t, \lambda), 0, \ldots, 0),$$

et

$$\underline{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & 0 & & & & & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot & \\ 0 & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \left(\text{matrice de dimension } \frac{k}{2} \times \frac{k}{2}\right)$$

Il s'agit donc d'un système de $(2m + 1)\dfrac{n}{2}$ équations en le même nombre d'inconnues, et un raisonnement analogue à celui du théorème 4-8 conduit au

Théorème 4-9 : Ω étant un ouvert borné contenu, si R *est fini, dans*

$$\{\alpha \in \mathrm{E}^{(2m+1)\frac{n}{2}} : \nu(x^0) \leqslant \mathrm{R}_1 < \mathrm{R}\},$$

et $\mathrm{F}(\alpha, \lambda)$ *désignant l'application définie par les premiers membres des équations déterminantes* (4.9.7), *si*

$$d\,[\mathrm{F}(\alpha, \lambda), \Omega, 0]$$

est défini quel que soit $\lambda \in [0, 1]$, *le système différentiel* (4.9.1), *lorsque son second membre vérifie la relation* (4.9.6), *possède au moins une solution périodique de période* 2π *telle que* $z(-t) = -z(t)$.

Supposons, pour terminer, que nous désirions étudier l'existence des solutions de période 2π du système

$$\frac{d^k z}{dt^k} = f\left(\frac{d^{k-1}z}{dt^{k-1}}, \frac{d^{k-2}z}{dt^{k-2}}, \ldots, \frac{dz}{dt}, z, t\right) \tag{4.9.8}$$

(les notations étant les mêmes que pour (4.9.1)), dont le second membre satisfait aux mêmes hypothèses que celui de (3.2.1) si ce n'est qu'il sera supposé défini et localement lipschitzien pour toutes les valeurs de z et de ses $k - 1$ premières dérivées. Introduisons le *système auxiliaire* (4.9.1) dont le second membre sera soumis aux mêmes conditions que celui de (4.9.8) et sera astreint à se réduire à (4.9.8) pour $\lambda = 1$. En combinant alors respectivement les résultats du corollaire 4-1 avec ceux des théorèmes 4-7, 4-8 et 4-9 et en remarquant que, pour toute fonction périodique $z(t)$ de période 2π telle que $z(t) \in C^k(E^1)$, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\|\frac{dz}{dt}\right\|^2 dt \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\|\frac{d^2z}{dt^2}\right\|^2 dt \leqslant \ldots \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\|\frac{d^kz}{dt^k}\right\|^2 dt,$$

avec, en outre, si $z(t)$ est de valeur moyenne nulle

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\| z(t) \|^2 dt \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\|\frac{dz}{dt}\right\|^2 dt,$$

on obtient les critères d'existence suivants :

Corollaire 4-4 : *Si, pour toute solution périodique éventuelle* $z(t)$ *de période* 2π *de* (4.9.1), *il existe deux constantes* C_0 *et* C_1 *indépendantes de* λ *et de* $z(t)$ *et telles que*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\| z(t) \|^2 dt < C_0^2, \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\|\frac{d^kz(t)}{dt^k}\right\|^2 dt < C_1^2,$$

et si

$$d\,[F_0(\alpha_0), \Omega_0, 0] \neq 0,$$

où $F_0(\alpha_0)$ *est défini par* (4.9.4) *et où* $\Omega_0 = \{\alpha_0 \in E^r : \| \alpha_0 \| < R_1\}$, $R_1 > 0$ *suffisamment grand, le système différentiel* (4.9.8) *possède au moins une solution périodique de période* 2π.

Corollaire 4-5 : *Si le second membre de* (4.9.8) *vérifie la condition* (4.9.5) *et si, pour toute solution périodique éventuelle* $z(t)$ *de période* 2π *de* (4.9.1) *telle que* $z(t + \pi) = -z(t)$, *il existe une constante* C *indépendante de* λ *et de* $z(t)$ *et telle que*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\|\frac{d^kz(t)}{dt^k}\right\|^2 dt < C^2,$$

le système différentiel (4.9.8) *possède au moins une solution périodique de période* 2π *qui vérifie la relation* $z(t + \pi) = -z(t)$.

Corollaire 4-6 : *Si le second membre de* (4.9.8) *vérifie la condition* (4.9.6) *et si,* *pour toute solution périodique éventuelle* $z(t)$ *de période* 2π *de* (4.9.1) *telle que* $z(-t) = -z(t)$, *il existe une constante* C *indépendante de* λ *et de* $z(t)$ *et telle que*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\|\frac{d^k z(t)}{dt^k}\right\|^2 dt < C^2,$$

le système différentiel (4.9.8) *possède au moins une solution périodique de période* 2π *et cette solution est impaire par rapport à* t.

Chapitre 5

SOLUTIONS PÉRIODIQUES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON AUTONOMES DU SECOND ORDRE DU TYPE DE LEVINSON

5-1. *Introduction*

On appelle *équation du type de Levinson* toute équation différentielle de la forme

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = e(t) \tag{5.1.1}$$

où $e(t)$ est une fonction périodique de t. De telles équations sont très importantes en mécanique et en physique, et en particulier pour l'étude des circuits électroniques. C'est d'ailleurs dans ce domaine qu'un cas particulier de (5.1.1) correspondant à $f(x, \dot{x}) = k(x^2 - 1)$ et $g(x) = \omega^2 x$ a été étudié pour la première fois en 1920 par B. van der Pol [77, 78]. La démonstration rigoureuse de l'existence de solutions périodiques de (5.1.1) lorsque f et g ne sont pas supposés très petits n'a été obtenue cependant qu'une vingtaine d'années plus tard, grâce aux travaux de R. Cacciopoli et A. Ghizzetti [9] relatifs à l'équation

$$\ddot{x} + f(\dot{x}) + x = e(t),$$

de S. Lefschetz [60] consacrés à

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = e(t),$$

et surtout de N. Levinson [62] qui a traité l'équation (5.1.1). Signalons également les nombreuses recherches de M. L. Cartwright et J. E. Littlewood [10] qui ont porté sur l'équation différentielle

$$\ddot{x} + kf(x)\dot{x} + g(x) = ke(t),$$

où k est un paramètre.

A partir de 1950, l'étude de (5.1.1) et de ses cas particuliers a donné lieu à un nombre considérable de travaux, étudiés de manière systématique dans les monographies de L. Cesari [17], G. Sansone et R. Conti [88] et R. Reissig, G. Sansone et R. Conti [79].

En 1964, R. Faure [33], utilisant des bornes pour les solutions périodiques éventuelles de l'équation

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = e(t) \tag{5.1.2}$$

établies en 1952 par D. Graffi [42] a démontré, par la méthode de Leray-Schauder, l'existence d'une solution périodique pour (5.1.2). Nous verrons que la méthode proposée dans ce travail permet d'obtenir le même résultat sous des hypothèses plus faibles.

Nous considérerons également le cas des équations

$$\ddot{x} + f(\dot{x}) + g(x) = e(t)$$

et

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = e(t),$$

où les fonctions f et g sont des polynômes, ce qui nous permettra de généraliser d'importants résultats de R. GOMORY [40] et d'obtenir, pour ces équations, des conditions d'existence de solutions périodiques qui échappent à la fois aux critères cités en [17, 79, 88] et à des théorèmes obtenus plus récemment par I. BARBALAT [4], H. W. KNOBLOCH [54] et K. SCHMITT [89].

5-2. *Solutions périodiques de l'équation différentielle de Liénard*

Considérons l'équation différentielle de LIÉNARD

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = e(t) \tag{5.2.1}$$

où $f(x)$ est définie et localement lipschitzienne dans E^1 et $e(t) \in C^0\,[0, T]$ est périodique de période $T = 2\pi/\omega$, $\omega > 1$, satisfaisant en outre à

$$\frac{1}{T}\int_0^T e(t)dt = 0.$$

Afin d'établir l'existence de solutions périodiques de (5.2.1), considérons l'équation

$$\ddot{x} + \lambda f(x)\dot{x} + \lambda x = \lambda e(t), \ \lambda \in [0, 1]. \tag{5.2.2}$$

En utilisant un procédé dû à D. GRAFFI [43], nous allons obtenir des bornes indépendantes de λ pour les solutions périodiques éventuelle de période T de (5.2.2). Soit $x(t) \in C^2\,[0, T]$ une solution périodique éventuelle de période T de (5.2.2). Si nous l'introduisons dans (5.2.2), une intégration entre 0 et T entraîne, pour toute solution périodique correspondant à $\lambda \in \,]0, 1]$ et sa limite en $\lambda = 0$:

$$\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = 0 \tag{5.2.3}$$

puisque

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\dot{x}\,dt = 0.$$

Multiplions maintenant les deux membres de (5.2.2) par $T^{-1}x(t)$ et intégrons de 0 à T ; il vient :

$$-\frac{1}{T}\int_0^T \dot{x}^2(t)dt + \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T e(t)x(t)dt.$$

Or, en vertu de (5.2.3) et de la relation (1.4.1),

$$\frac{1}{T}\int_0^T \dot{x}^2(t)\,dt \geqslant \frac{\omega^2}{T}\int_0^T x^2(t)dt$$

ce qui entraîne

$$\frac{\omega^2 - 1}{\omega^2 T}\int_0^T \dot{x}^2(t)dt \leqslant -\frac{1}{T}\int_0^T e(t)x(t)dt.$$

Dès lors, puisque $\omega > 1$, on en déduit, en utilisant l'inégalité de Schwarz :

$$\frac{\omega^2 - 1}{\omega^2 T} \int_0^T \dot{x}^2(t)dt \leqslant \left[\frac{1}{T}\int_0^T e^2(t)dt\right]^{1/2} \left[\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt\right]^{1/2} \leqslant \frac{E}{\omega}\left[\frac{1}{T}\int^T \dot{x}^2(t)dt\right]^{1/2},$$

d'où

$$\frac{1}{T}\int_0^T \dot{x}^2(t)dt \leqslant \frac{\omega^2 E^2}{(\omega^2 - 1)^2}, \frac{1}{T}\int_b^T x^2(t)dt \leqslant \frac{E^2}{(\omega^2 - 1)^2} \tag{5.2.4}$$

si

$$E^2 = \frac{1}{T}\int_0^T e^2(t)dt,$$

et, par suite de (5.2.3),

$$\sup_{t \in [0, T]} |x(t)| \leqslant \frac{\pi E}{\sqrt{3}(\omega^2 - 1)} = F.$$

Multipliant enfin les deux membres de (5.2.2) par $T^{-1}\ddot{x}(t)$ et intégrant sur une période, on obtient

$$\frac{1}{T}\int_0^T \ddot{x}^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T [e(t) - f(x)\dot{x}]\,\ddot{x}(t)dt$$

d'où

$$\frac{1}{T}\int_0^T \ddot{x}^2(t)dt \leqslant \left[E + \sup_{|x| \leqslant F} |f(x)| \frac{\omega E}{\omega^2 - 1}\right]^2$$

L'équation (5.2.2) étant du type (4.9.1), il reste à vérifier que

$$d\,\{F_0(a_0),]-R, R[, 0\} \neq 0$$

si $F_0(a_0)$ est l'application définie par

$$a_0 \to -a_0$$

et si $R > 0$ est suffisamment grand. Or, quel que soit R, $d\{F_0(a_0),]-R, R[, 0\} = -1$, ce qui, grâce au corollaire 4-4 démontre le

Théorème 5-1 : *Si* $f(x)$ *est définie et localement lipschitzienne dans* E^1 *et si* $e(t) \in C^0\,[0, T]$, *est périodique de période* $T = 2\pi/\omega$, *avec* $\omega > 1$, *et telle que*

$$\frac{1}{T}\int_0^T e(t)dt = 0,$$

l'équation différentielle

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = e(t)$$

possède au moins une solution périodique de période $T = 2\pi/\omega$.

Ce théorème généralise le résultat de R. FAURE [33] qui suppose $f(x) = a + g(x)$, $a \neq 0$, $g(0) = 0$. D. GRAFFI [42] a montré que des bornes du type (5.2.4), avec des hypothèses aussi générales sur $f(x)$, sont impossibles à obtenir pour $\omega \leqslant 1$. Moyennant des conditions supplémentaires sur $f(x)$, nous allons démontrer, dans les paragraphes qui suivent, des critères d'existence où plus aucune restriction n'est faite sur la période.

5-3. *Solutions périodiques de l'équation différentielle de Rayleigh*

Nous allons étudier, dans ce paragraphe, les solutions périodiques de période 2π de l'équation différentielle de RAYLEIGH

$$\ddot{x} + f(\dot{x}) + g(x) = e(t) \tag{5.3.1}$$

où

$$f(\dot{x}) = \sum_{j=1}^{2n+1} c_j \dot{x}^j, \ n \text{ entier } \geqslant 0, \tag{5.3.2}$$

les c_j étant des constantes, avec $c_{2n+1} \neq 0$, et

$$g(x) = \sum_{j=1}^{2p+1} d_j x^j, \ p \text{ entier } \geqslant 0, \tag{5.3.3}$$

les d_j étant des constantes, avec $d_{2p+1} \neq 0$. Enfin, $e(t) \in C^0\,[0, 2\pi]$ est périodique de période 2π.

Considérons l'équation différentielle

$$\ddot{x} + \lambda f(\dot{x}) + \lambda g(x) = \lambda e(t), \ \lambda \in [0, 1] \tag{5.3.4}$$

et soit $x(t) \in C^2\,[\,0, 2\pi]$ une solution périodique éventuelle de période 2π de (5.3.4). Introduisons-là dans (5.3.4) et intégrons (5.3.4) de 0 à 2π après multiplication des deux membres par $(2\pi)^{-1}\dot{x}(t)$. On obtient, pour les solutions correspondant à $\lambda \in\,]0, 1]$ et leur limite en $\lambda = 0$:

$$\sum_{j=1}^{2n+1} \frac{c_j}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{x}^{j+1}(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e(t)\dot{x}(t)dt$$

d'où, par (1.4.2) :

$$\frac{|\,c_{2n+1}\,|}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{x}^{2n+2}(t)dt \leqslant \sup_{t\in[0,\,2\pi]} |\,e(t)\,| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\,\dot{x}(t)\,|\,dt + \sum_{j=1}^{2n} \frac{|\,c_j\,|}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\,\dot{x}(t)\,|^{j+1}\,dt$$

$$\leqslant \mathrm{E} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{x}^{2n+2}(t)dt\right]^{\frac{1}{2n+2}} + \sum_{j=1}^{2n} |\,c_j\,| \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{x}^{2n+2}(t)dt\right]^{\frac{j+1}{2n+2}}$$

ou encore

$$|\,c_{2n+1}\,| \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{x}^{2n+2}(t)dt\right]^{\frac{2n+1}{2n+2}} \leqslant \mathrm{E} + \sum_{j=1}^{2n} |\,c_j\,| \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{x}^{2n+2}(t)dt\right]^{\frac{j}{2n+2}},$$

$$\mathrm{E} = \sup_{t\in[0,2\pi]} |\,e(t)\,|$$

On en déduit

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dot{x}^{2n+2}(t)dt\right]^{\frac{1}{2n+2}} \leqslant \mathrm{R}_1 \tag{5.3.5}$$

où R_1 est la racine positive unique de l'équation

$$|\, c_{2n+1} \,|\, z^{2n+1} - \sum_{j=1}^{2n} |\, c_j \,|\, z^j - \mathrm{E} = 0.$$

Enfin, (5.3.5) et (1.4.2) entraînent

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dot{x}^2(t)dt \leqslant \mathrm{R}_1^2. \tag{5.3.6}$$

Posant $x(t) = a_0 + u(t)$, $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)dt$, et intégrant (5.3.4) de 0 à 2π après multiplication par $(2\pi)^{-1}$, nous obtenons

$$\sum_{j=1}^{2p+1} \frac{d_j}{2\pi}\int_0^{2\pi} [a_0 + u(t)]^j\, dt + \sum_{j=1}^{2n+1} \frac{c_j}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dot{x}^j(t)dt = 0$$

d'où

$$\sum_{j=1}^{2p+1} \frac{d_j}{2\pi}\sum_{k=0}^{j}\int_0^{2\pi} \mathrm{C}_j^k a_0^k u^{j-k}(t)dt + \sum_{j=1}^{2n+1} \frac{c_j}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dot{x}^j(t)dt = 0,\ \mathrm{C}_j^k = \frac{j!}{k!(j-k)!}$$

c'est-à-dire

$$d_{2p+1}a_0^{2p+1} + \sum_{j=1}^{2p} d_j a_0^j + \sum_{j=1}^{2p+1} \frac{d_j}{2\pi}\sum_{k=0}^{j-1}\int_0^{2\pi} \mathrm{C}_j^k a_0^k u^{j-k}(t)dt + \sum_{j=1}^{2n+1} \frac{c_j}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dot{x}^j(t)dt = 0.$$

Or, en vertu de (5.3.6) et (1.3.8),

$$\sup_{t\in[0,\,2\pi]} |\, u(t) \,| < 3^{-1/2}\pi\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}_2,$$

ce qui entraîne

$$|\, d_{2p+1} \,|\,|\, a_0 \,|^{2p+1} \leqslant \sum_{j=1}^{2p} |\, d_j \,|\,|\, a_0 \,|^j + \sum_{j=1}^{2p+1} |\, d_j \,| \sum_{k=0}^{j-1} \mathrm{C}_j^k \mathrm{R}_2^{j-k} |\, a_0 \,|^k + \sum_{j=1}^{2n+1} |\, c_j \,|\, \mathrm{R}_1^j,$$

soit

$$|\, a_0 \,| \leqslant \mathrm{R}_3 \tag{5.3.7}$$

R_3 étant la racine positive unique de l'équation

$$|\, d_{2p+1} \,|\, z^{2p+1} - \sum_{j=1}^{2p} |\, d_j \,|\, z^j - \sum_{j=1}^{2p+1} |\, d_j \,|\, [(z + \mathrm{R}_2)^j - z^j] - \sum_{j=1}^{2n+1} |\, c_j \,|\, \mathrm{R}_1^j = 0.$$

De (5.3.6) et (5.3.7), on déduit immédiatement

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2(t)dt \leqslant R_3^2 + R_1^2 = R_4^2,$$

et

$$\sup_{t\in[0,\,2\pi]} |\, x(t)\, | \leqslant R_3 + \frac{\pi R_1}{\sqrt{3}} = R_5.$$

Procédant comme au paragraphe précédent, on obtient alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ddot{x}^2(t)dt \leqslant R_6^2,$$

où $R_6 = \sup\limits_{|x| \leqslant R_5} |\, g(x)\, | + E$.

L'existence d'une solution périodique de période 2π de (5.3.4) résultera dès lors du corollaire 4-4 si

$$d\,\{F_0(a_0),\,]-R, R\, [, 0\} \neq 0, \text{ où } F_0(a_0) : a_0 \to -\sum_{j=1}^{2p+1} d_j a_0^j$$

et où $R > 0$ est suffisamment grand. Cette condition étant vérifiée par suite du théorème 2-10-1 nous avons démontré le

Théorème 5-2 : *Si*

$$f(\dot{x}) = \sum_{j=1}^{2n+1} c_j \dot{x}^j, \; n \textit{ entier} \geqslant 0,$$

les c_j *étant des constantes,* $c_{2n+1} \neq 0$, *et si*

$$g(x) = \sum_{j=1}^{2p+1} d_j x^j, \; p \textit{ entier} \geqslant 0,$$

les d_j *étant des constantes,* $d_{2p+1} \neq 0$, *l'équation différentielle*

$$\ddot{x} + f(\dot{x}) + g(x) = e(t)$$

où $e(t) \in C^0\,[0, 2\pi]$ *est périodique de période* 2π, *possède au moins une solution périodique de même période.*

Il est intéressant de remarquer que ce résultat n'est pas un cas particulier du théorème de N. Levinson relatif à (5.3.1) (et de ses diverses généralisations, cf. [79]), car on n'a pas nécessairement $f(\dot{x})/\dot{x} \geqslant -M$ pour $\dot{x} \in E^1$, M constante positive, ni $xg(x) > 0$ pour tout $|\, x\, | \geqslant a$, a constante positive, hypothèses imposées par le théorème de Levinson. Si $n = 0$, on obtient un critère d'existence pour l'équation de Duffing avec dissipation [71]. Enfin, si $f(-\dot{x}) = -f(\dot{x})$, $g(-x) = -g(x)$ et $e(t+\pi) = -e(t)$, le corollaire 4-5 s'applique et l'équation différentielle (5.3.1) possède au moins une solution périodique $x(t)$ de période 2π telle que

$$x(t+\pi) = -x(t).$$

5-4. *Solutions périodiques de l'équation différentielle de Liénard généralisée*

Considérons l'équation différentielle de LIÉNARD généralisée

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = e(t) \tag{5.4.1}$$

où

$$f(x) = \sum_{j=0}^{p} c_j x^j, \quad g(x) = \sum_{s=0}^{n} d_s x^s$$

p et n étant des entiers positifs, c_j, $j = 1, 2, ..., p$ et d_s, $s = 1, 2, ..., n$ des constantes et $e(t)$ une fonction périodique de période 2π. Les solutions d'équations différentielles de ce type ont été étudiées par R. GOMORY [40] qui a lié leur existence à la nature des points critiques à l'infini de l'équation autonome correspondante ($e(t) = 0$) (cf. aussi [28]). GOMORY a ainsi obtenu le résultat suivant :

Si : 1) $e(t) \in C^1 [0, 2\pi]$ et est périodique de période 2π ;

2) $p \geqslant n > 0$;

3) n est impair ;

4) on n'a pas simultanément $d_n > 0$ et p impair,

l'équation différentielle (5.4.1) possède au moins une solution périodique de période 2π. Comme le signale GOMORY [40], ce théorème est intéressant en ce sens qu'il ne concerne pas nécessairement des équations différentielles « dissipatives pour de grands déplacements » au sens de N. LEVINSON [63]. Nous allons montrer que la méthode introduite dans ce travail permet d'obtenir pour (5.4.1) un théorème analogue avec un substantiel allègement des hypothèses et d'une manière beaucoup plus rapide que par la méthode de Gomory.

Supposons tout d'abord que, dans (5.4.1), n soit impair, $e(t) \in C^0 [0, 2\pi]$ et soit périodique de période 2π et que $d_n < 0$. Considérons, avec les mêmes hypothèses, l'équation

$$\ddot{x} + \lambda f(x)\dot{x} + \lambda g(x) = \lambda e(t), \ \lambda \in [0, 1] \tag{5.4.2}$$

et soit $x(t) \in C^2 [0, 2\pi]$ une solution périodique éventuelle de (5.4.2) de période 2π. Introduisons-là dans (5.4.2), multiplions les deux membres de (5.4.2) par $(2\pi)^{-1}x(t)$ et intégrons de 0 à 2π ; il vient :

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dot{x}^2(t)dt + \lambda \sum_{s=0}^{n} \frac{d_s}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{s+1}(t)dt = \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} e(t)x(t)dt$$

d'où

$$0 \leqslant -\frac{\lambda d_n}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{n+1}(t)dt = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dot{x}^2(t)dt + \lambda \sum_{s=0}^{n-1} \frac{d_s}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{s+1}(t)dt$$

$$-\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} e(t)x(t)dt \leqslant \lambda \sum_{s=0}^{n-1} \frac{d_s}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{s+1}(t)dt - \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} e(t)x(t)dt. \tag{5.4.3}$$

Dès lors, pour toute solution périodique éventuelle correspondant à $\lambda \in]0, 1]$ et sa limite en $\lambda = 0$, nous obtenons par (5.4.3) et (1.4.2)

$$|d_n| \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{n+1}(t)dt\right] \leqslant \sum_{s=0}^{n-1} |d_s| \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{n+1}(t)dt\right]^{\frac{s+1}{n+1}}$$

$$+ \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^2(t)dt\right]^{1/2} \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{n+1}(t)dt\right]^{\frac{1}{n+1}}$$

c'est-à-dire

$$|d_n| \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{n+1}(t)dt\right]^{\frac{n}{n+1}} \leqslant \sum_{s=0}^{n-1} |d_s| \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{n+1}(t)dt\right]^{\frac{s}{n+1}} + \mathrm{E},$$

$$\mathrm{E}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^2(t)dt.$$

Par conséquent,

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{n+1}(t)dt\right]^{\frac{1}{n+1}} \leqslant \mathrm{R}_1 \tag{5.4.4}$$

où R_1 est la racine positive unique de l'équation

$$|d_n|\, z^n - \sum_{s=0}^{n-1} |d_s|\, z^s - \mathrm{E} = 0.$$

On a donc, par (5.4.4) et (1.4.2),

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2(t)dt \leqslant \mathrm{R}_1^2$$

et,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dot{x}^2(t)dt = \sum_{s=0}^{n} \frac{d_s}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{s+1}(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e(t)x(t)dt \leqslant \mathrm{R}_2^2.$$

Par conséquent, en procédant comme au § 5-2,

$$\sup_{t\in[0,\, 2\pi]} |x(t)| \leqslant \mathrm{R}_1 + \frac{\pi \mathrm{R}_2}{\sqrt{3}}, \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dot{x}^2(t)dt \leqslant \mathrm{R}_3^2$$

et, en vertu du corollaire 4-4, il reste à vérifier que

$$d\,\{\mathrm{F}_0(a_0),]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[, 0\} \neq 0, \text{ où } \mathrm{F}_0(a_0) : a_0 \to -\sum_{s=0}^{n} d_s a_0^s + e_0,$$

$e_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e(t)dt$, et où $\mathrm{R} > 0$ est suffisamment grand. n étant impair, le degré topologique en question est égal, en vertu du théorème 2-10-1, à $+ 1$ (puisque $d_n < 0$) ce qui démontre le

Théorème 5-3 : Si :

1) $e(t) \in C^0[0, 2\pi]$ *et est périodique de période* 2π ;

2) n *est impair* ;

3) $d_n < 0$,

l'équation différentielle

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$$

où $f(x) = \sum_{j=0}^{p} c_j x^j$, $g(x) = \sum_{s=0}^{n} d_s x^s$, p *et* n *entiers positifs, possède au moins une solution périodique de période* 2π.

Par rapport au résultat de GOMORY, on a donc dans ce cas $e(t) \in C^0[0, 2\pi]$ au lieu de $e(t) \in C^1[0, 2\pi]$ et plus aucune hypothèse n'est faite sur p qui, dans le théorème de Gomory, doit être pair et supérieur ou égal à n. En outre, dans le cas de l'équation de DUFFING ($p = 0$), on généralise un critère de J. P. GOSSEZ [41] obtenu au moyen de théorèmes du type de BROWDER-MINTY [87] et qui impose $d_s = 0$, $s = 0, 1, 2, 3, \ldots, n - 1$, et $d_1 < | d_n |$ (cf. [70]).

Supposons maintenant que $d_n > 0$, $n > 0$ et impair, $p > 0$ et pair et $e(t) \in C^1[0, 2\pi]$ et est périodique de période 2π. Avec ces hypothèses, considérons l'équation différentielle

$$\ddot{x} + \lambda f(x)\dot{x} + \lambda g(x) = \lambda^2 e(t), \ \lambda \in [0, 1] \tag{5.4.5}$$

et soit $x(t) \in C^3[0, 2\pi]$ une solution périodique éventuelle de période 2π de (5.4.5). Introduisons-là dans (5.4.5), multiplions les deux membres de (5.4.5) par $x^{j+1}(t)$, j entier $\geqslant 0$, et intégrons de 0 à 2π ; il vient :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ddot{x}(t)x^{j+1}(t)dt + \lambda \sum_{s=0}^{n} \frac{d_s}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{s+j+1}(t)dt = \frac{\lambda^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} e(t)x^{j+1}(t)dt,$$

c'est-à-dire, en intégrant le premier terme par parties,

$$\frac{1}{2\pi(j+1)}\int_0^{2\pi} x^j(t)\dot{x}^2(t)dt = \lambda \sum_{s=0}^{n} \frac{d_s}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{s+j+1}(t)dt - \frac{\lambda^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} e(t)x^{j+1}(t)dt. \tag{5.4.6}$$

Multiplions maintenant les deux membres de (5.4.5) par $\dfrac{\dot{x}(t)}{2\pi}$ et intégrons de 0 à 2π : il en résulte, pour les solution périodiques éventuelles relatives à $\lambda \in]0, 1]$ et leur limite en $\lambda = 0$:

$$\sum_{j=0}^{p} \frac{c_j}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^j(t)\dot{x}^2(t)dt = \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} e(t)\dot{x}(t)dt = -\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dot{e}(t)x(t)dt \tag{5.4.7}$$

Introduisant (5.4.6) dans (5.4.7), nous obtenons alors

$$\sum_{j=0}^{p}(j+1)c_j \sum_{s=1}^{n} d_s \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{s+j+1}(t)dt\right) - \lambda \sum_{j=0}^{p}(j+1)\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e(t)x^{j+1}(t)dt\right) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dot{e}(t)x(t)dt$$

c'est-à-dire

$$(p+1)c_p d_n\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{p+n+1}(t)dt\right) = -\sum_{j=0}^{p}(j+1)c_j\sum_{s=0}^{n-1} d_s\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{s+j+1}(t)dt\right)$$

$$-pc_{p-1}\sum_{s=1}^{n} d_s\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{s+p}(t)dt\right)+\lambda\sum_{j=0}^{p}(j+1)\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e(t)x^{j+1}(t)dt\right)$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\dot{e}(t)x(t)dt.$$

On en déduit, par (1.4.2),

$$(p+1)\mid c_p\mid d_n\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{p+n+1}(t)dt\right)\leqslant\sum_{j=0}^{p}(j+1)\mid c_j\mid$$

$$\sum_{s=0}^{n-1}\mid d_s\mid\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{p+n+1}(t)dt\right)^{\frac{s+j+1}{p+n+1}}+p\mid c_{p-1}\mid\sum_{s=0}^{n}\mid d_s\mid\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{p+n+1}(t)dt\right)^{\frac{s+p}{p+n+1}}$$

$$+\sum_{j=0}^{p}(j+1)\,\mathrm{E}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{p+n+1}(t)dt\right)^{\frac{j+1}{p+n+1}}+\mathrm{E}'\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{p+n+1}(t)dt\right)^{\frac{1}{p+n+1}},$$

$$\mathrm{E}=\sup_{t\in[0,\,2\pi]}\mid e(t)\mid,\ \mathrm{E}'=\sup_{t\in[0,\,2\pi]}\mid\dot{e}(t)\mid,$$

et dès lors

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{p+n+1}(t)dt\right]^{\frac{1}{p+n+1}}\leqslant \mathrm{R}_1$$

où R_1 est la racine positive unique de l'équation

$$(p+1)\mid c_p\mid d_n\, z^{p+n}-\sum_{j=0}^{p}(j+1)\mid c_j\mid\sum_{s=0}^{n-1}\mid d_s\mid z^{s+j}-p\mid c_{p-1}\mid\sum_{s=0}^{n}\mid d_s\mid z^{s+p-1}$$

$$-\sum_{j=0}^{p}(j+1)\,\mathrm{E}\,z^j-\mathrm{E}'=0.$$

On a donc, par (1.4.2)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2(t)dt\leqslant \mathrm{R}_1^2.$$

Comme pour le théorème 5-3, on déduit alors aisément les inégalités

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\dot{x}^2(t)dt\leqslant \mathrm{R}_2^2,\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ddot{x}^2(t)dt\leqslant \mathrm{R}_3^2,$$

et, puisque $\mathrm{F}_0(a_0): a_0\to-\sum_{s=0}^{n} d_s a_0^s$, $d\{\mathrm{F}_0(a_0),\,]-\mathrm{R},\mathrm{R}[,\,0\}=-1$ par le théorème

2-10-1 pour $R > 0$ et suffisamment grand, ce qui, en vertu du corollaire 4-4 démontre le

Théorème 5-4 : *Si*

1) $e(t) \in C^1[0, 2\pi]$ *et est périodique de période* 2π ;

2) $p > 0$ *est pair* ;

3) $n > 0$ *est impair* ;

4) $d_n > 0$,

l'équation différentielle

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = e(t),$$

où

$$f(x) = \sum_{j=0}^{p} c_j x^j, \quad g(x) = \sum_{s=0}^{n} d_s x^s$$

les c_j *et* d_s *étant des constantes, possède au moins une solution périodique de période* 2π.

Comparant ce résultats avec celui de GOMORY lorsque $d_n > 0$, on constate que l'hypothèse $p \geqslant n$ n'est plus nécessaire. Les théorèmes 5-3 et 5-4 constituent donc une généralisation du théorème de Gomory.

Chapitre 6

SOLUTIONS PÉRIODIQUES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON LINÉAIRES ET NON AUTONOMES DU TROISIÈME ORDRE

6-1. *Introduction*

L'étude des solutions périodiques d'équations différentielles non linéaires et non autonomes du troisième ordre a donné lieu, depuis une dizaine d'années, à un certain nombre de travaux. Comme dans le cas des équations du second ordre, beaucoup de ceux-ci démontrent l'existence d'une solution périodique à partir de celle d'une borne pour toutes les solutions de l'équation lorsque t est suffisamment grand. Ils utilisent alors soit des théorèmes de point fixe, soit la méthode de Leray-Schauder, et nous citerons les contributions de J. O. C. Ezeilo [32], V. A. Pliss [74], S. Sedziwy [90] et R. Reissig [82]. Par l'emploi simultané de la méthode de Leray-Schauder et de bornes a priori pour les solutions périodiques éventuelles, G. Villari [94] a démontré l'existence de solutions périodiques d'équations différentielles du type de M. A. Aizerman [1]

$$\dddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = p(t) + q(\ddot{x}) + r(\dot{x}) + s(x) \tag{6.1.1}$$

qui sont très importantes dans la théorie du contrôle automatique. Villari [96] a également étudié, de la même manière, l'équation

$$\dddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} + \mathrm{F}(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0 \tag{6.1.2}$$

et a étendu ainsi les résultats d'Ezeilo et de Sedsiwy. Ce chapitre est consacré à l'application de la méthode utilisée dans ce travail aux équations (6.1.1) et (6.1.2) ce qui permet d'obtenir de manière plus simple, tout en les généralisant, les intéressants résultats de G. Villari.

6-2. *Quelques résultats préliminaires sur les équations différentielles du type d'Aizerman*

Afin d'établir l'existence de solutions périodiques de l'équation différentielle du type d'Aizerman

$$\dddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = p(t) + q(\ddot{x}) + r(\dot{x}) + s(x)$$

où a, b, c sont des constantes réelles, $p(t) \in \mathrm{C}^0\,[0, 2\pi]$ est périodique de période 2π (et non constante), $q(\ddot{x})$, $r(\dot{x})$, $s(x)$ sont des fonctions définies et localement lipschitziennes dans E^1 et satisfont à diverses autres hypothèses explicitées plus loin, nous allons étudier les équations

$$\dddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = \lambda\,[p(t) + q(\ddot{x}) + r(\dot{x}) + s(x)],\ \lambda \in [0, 1] \tag{6.2.1}$$

et

$$\dddot{x} + \lambda(a\ddot{x} + b\dot{x} + cx) = \lambda\,[p(t) + q(\ddot{x}) + r(\dot{x}) + s(x)],\ \lambda \in [0, 1]. \tag{6.2.2}$$

Soit $x(t) \in C^3\,[0, 2\pi]$ une solution périodique éventuelle de période 2π de (6.2.1). Introduisons-là dans (6.2.1), multiplions les deux membres par $\dfrac{\dddot{x}(t)}{2\pi}$ et intégrons de 0 à 2π ; nous obtenons

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dddot{x}^2(t)dt - \frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ddot{x}^2(t)dt = \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(t)\dddot{x}(t)dt + \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} r(\dot{x})\dddot{x}(t)dt + \\ + \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} s(x)\dddot{x}(t)dt \tag{6.2.3-1}$$

Si $r(\dot{x}) \in C^1(E^1)$, cette relation entraîne, par une intégration par parties,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dddot{x}^2(t)dt - \frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ddot{x}^2(t)dt = \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(t)\dddot{x}(t)dt - \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} r'(\dot{x})\ddot{x}^2(t)dt + \\ + \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} s(x)\dddot{x}(t)dt \tag{6.2.4-1}$$

avec $r'(y) = dr(y)/dy$. Si $s(x) \in C^2(E^1)$, on déduit de (6.2.3-1) :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dddot{x}^2(t)dt - \frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ddot{x}^2(t)dt = \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(t)\dddot{x}(t)dt + \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} r(\dot{x})\dddot{x}(t)dt + \\ + \frac{\lambda}{4\pi}\int_0^{2\pi} s''(x)\dot{x}^3(t)dt \tag{6.2.5-1}$$

Procédant de même après multiplication par $(2\pi)^{-1}\ddot{x}(t)$, il vient

$$\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ddot{x}^2(t)dt - \frac{c}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dot{x}^2(t)dt = \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(t)\ddot{x}(t) + \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} q(\ddot{x})\ddot{x}(t)dt + \\ + \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} s(x)\ddot{x}(t)dt. \tag{6.2.6-1}$$

Dès lors, si $s(x) \in C^1(E^1)$,

$$\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ddot{x}^2(t)dt - \frac{c}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dot{x}^2(t)dt = \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(t)\ddot{x}(t)dt + \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} q(\ddot{x})\ddot{x}(t)dt - \\ - \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} s'(x)\dot{x}^2(t)dt. \tag{6.2.7-1}$$

Enfin, l'intégration de 0 à 2π après multiplication, respectivement, par $(2\pi)^{-1}\dot{x}(t)$ et $(2\pi)^{-1}x(t)$ entraîne :

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ddot{x}^2(t)dt + \frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dot{x}^2(t)dt = \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(t)\dot{x}(t)dt + \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} q(\ddot{x})\dot{x}(t)dt + \\ + \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} r(\dot{x})\dot{x}(t)dt \tag{6.2.8-1}$$

$$-\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dot{x}^2(t)dt + \frac{c}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2(t)dt = \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(t)x(t)dt + \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} q(\ddot{x})x(t)dt + \\ + \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} r(\dot{x})x(t)dt + \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} s(x)x(t)dt. \tag{6.2.9-1}$$

Si maintenant $x(t) \in C^3\,[0, 2\pi]$ est une solution périodique éventuelle de période 2π de (6.2.2), nous obtenons, exactement comme ci-dessus, les relations suivantes :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dddot{x}^2(t)dt - \frac{\lambda b}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ddot{x}^2(t)dt = \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(t)\dddot{x}(t)dt + \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} r(\dot{x})\dddot{x}(t)dt + \\ + \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} s(x)\dddot{x}(t)dt, \tag{6.2.3-2}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dddot{x}^2(t)dt - \frac{\lambda b}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ddot{x}^2(t)dt = \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(t)\dddot{x}(t)dt - \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} r'(\dot{x})\ddot{x}^2(t)dt + \\ + \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} s(x)\dddot{x}(t)dt, \tag{6.2.4-2}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dddot{x}^2(t)dt - \frac{\lambda b}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ddot{x}^2(t)dt = \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(t)\dddot{x}(t)dt + \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} r(\dot{x})\dddot{x}(t)dt + \\ + \frac{\lambda}{4\pi}\int_0^{2\pi} s''(x)\dot{x}^3(t)dt, \tag{6.2.5-2}$$

$$\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ddot{x}^2(t)dt - \frac{c}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dot{x}^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(t)\ddot{x}(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q(\ddot{x})\ddot{x}(t)dt + \\ + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} s(x)\ddot{x}(t)dt, \tag{6.2.6-2}$$

$$\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ddot{x}^2(t)dt - \frac{c}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dot{x}^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(t)\ddot{x}(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q(\ddot{x})\ddot{x}(t)dt - \\ - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} s'(x)\dot{x}^2(t)dt, \tag{6.2.7-2}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ddot{x}^2(t)dt + \frac{\lambda b}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dot{x}^2(t)dt = \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(t)\dot{x}(t)dt + \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} q(\ddot{x})\dot{x}(t)dt + \\ + \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} r(\dot{x})\dot{x}(t)dt, \tag{6.2.8-2}$$

$$-\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dot{x}^2(t)dt + \frac{c}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(t)x(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q(\ddot{x})x(t)dt + \\ + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r(\dot{x})x(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} s(x)x(t)dt. \tag{6.2.9-2}$$

Ces égalités sont valables pour les solutions périodiques de (6.2.2) correspondant à $\lambda \in\,]0, 1]$ et leur limite en $\lambda = 0$.

Nous allons maintenant utiliser les relations que nous venons de démontrer pour obtenir des bornes pour les solutions périodiques éventuelles de (6.2.1) ou (6.2.2) ; certaines de ces bornes sont dues à G. VILLARI [94] et d'autres sont nouvelles. On posera

$$P = \sup_{t\in[0,\, 2\pi]} |\, p(t)\, |.$$

Premier cas : $b < 1$, $|\, s(x) \,| \leqslant \mathrm{S}$ *pour* $x \in \mathrm{E}^1$, $|\, r(\dot{x}) \,| \leqslant \mathrm{R}$ *pour* $\dot{x} \in \mathrm{E}^1$. (6.2.3-1) ou (6.2.3-2) et (1.4.1) entraînent, en utilisant l'inégalité de Schwarz et en posant $b_1 = \min(1, 1 - b)$:

$$\frac{b_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dddot{x}^2(t)dt \leqslant \mathrm{P} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ddot{x}(t)dt \right]^{1/2} + \mathrm{S} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dddot{x}^2(t)dt \right]^{1/2} + \mathrm{R} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ddot{x}^2(t)dt \right]^{1/2}$$

d'où

$$\left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dddot{x}^2(t)dt \right]^{1/2} \leqslant (\mathrm{P} + \mathrm{R} + \mathrm{S}) b_1^{-1}.$$

On en déduit, par (1.3.8) et (1. .1),

$$\left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ddot{x}^2(t)dt \right]^{1/2} \leqslant b_1^{-1}(\mathrm{P} + \mathrm{R} + \mathrm{S}), \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{x}^2(t)dt \right]^{1/2} \leqslant (\mathrm{P} + \mathrm{R} + \mathrm{S}) b_1^{-1}$$

$$\sup_{t \in [0,\, 2\pi]} |\, \ddot{x}(t) \,| \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{3} b_1} (\mathrm{P} + \mathrm{R} + \mathrm{S}), \sup_{t \in [0,\, 2\pi]} |\, \dot{x}(t) \,| \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{3} b_1} (\mathrm{P} + \mathrm{R} + \mathrm{S}), \qquad (6.2.10)$$

$$\text{et} \sup_{t \in [0,\, 2\pi]} |\, x(t) - \mathrm{P}_0 x(t) \,| \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{3} b_1} (\mathrm{P} + \mathrm{R} + \mathrm{S}).$$

Deuxième cas : $b < 1$, $|\, s(x) \,| \leqslant \mathrm{S}$ *pour* $x \in \mathrm{E}^1$, $r(\dot{x}) \in \mathrm{C}^1(\mathrm{E}^1)$ *et* $r'(\dot{x}) \geqslant 0$ *pour* $x \in \mathrm{E}^1$.

Procédant comme pour le premier cas, à partir des relations (6.2.4-1) ou (6.2.4-2) on obtient

$$\left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dddot{x}^2(t)dt \right]^{1/2} \leqslant (\mathrm{P} + \mathrm{S}) b_1^{-1}$$

d'où

$$\left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ddot{x}^2(t)dt \right]^{1/2} \leqslant b_1^{-1}(\mathrm{P} + \mathrm{S}), \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{x}^2(t)dt \right]^{1/2} \leqslant (\mathrm{P} + \mathrm{S}) b_1^{-1}$$

$$\sup_{t \in [0,\, 2\pi]} |\, \ddot{x}(t) \,| \leqslant \frac{\pi}{b_1 \sqrt{3}} (\mathrm{P} + \mathrm{S}), \sup_{t \in [0,\, 2\pi]} |\, \dot{x}(t) \,| \leqslant \frac{\pi}{b_1 \sqrt{3}} (\mathrm{P} + \mathrm{S}),$$

$$\sup_{t \in [0,\, 2\pi]} |\, x(t) - \mathrm{P}_0 x(t) \,| \leqslant \frac{\pi}{b_1 \sqrt{3}} (\mathrm{P} + \mathrm{S}) \qquad (6.2.11)$$

Troisième cas : $b < 0$, $|\, q(\ddot{x}) \,| \leqslant \mathrm{Q}$ *pour* $\ddot{x} \in \mathrm{E}^1$, $|\, r(\dot{x}) \,| \leqslant \mathrm{R}$ *pour* $\dot{x} \in \mathrm{E}^1$.

Les relations (6.2.8-1) ou (6.2.8-2) entraînent dans ce cas

$$\left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{x}^2(t)dt \right]^{1/2} \leqslant |\, b \,|^{-1} (\mathrm{P} + \mathrm{Q} + \mathrm{R}) \qquad (6.2.14)$$

et

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ddot{x}^2(t)dt \leqslant 2^{1/2} |\, b \,|^{-1} (\mathrm{P} + \mathrm{Q} + \mathrm{R}) ;$$

par conséquent,

$$\sup_{t\in[0,2\pi]} |\dot{x}(t)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} \frac{(P+Q+R)\pi}{|b|} \text{ et } \sup_{t\in[0,2\pi]} |x(t) - P_0x(t)| \leqslant \frac{(P+Q+R)\pi}{\sqrt{3}\,|b|}.$$

Quatrième cas : $c/a < 1, a \neq 0, |q(\ddot{x})| \leqslant Q$ *pour* $\ddot{x} \in E^1$, $|s(x)| \leqslant S$ *pour* $x \in E^1$.

On déduit des relations (6.2.6-1) ou (6.2.6-2), en posant $c_1 = \min\left(1, 1 - \frac{c}{a}\right)$,

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ddot{x}^2(t)dt\right]^{1/2} \leqslant |c_1 a|^{-1} (P + Q + S),$$

d'où

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dot{x}^2(t)dt\right]^{1/2} \leqslant |ac_1|^{-1}(P+Q+S), \quad \sup_{t\in[0,2\pi]} |\dot{x}(t)| \leqslant \frac{\pi(P+Q+S)}{\sqrt{3}\,|a|\,c_1}$$

$$\sup_{t\in[0,2\pi]} |x(t) - P_0x(t)| \leqslant \frac{\pi(P+Q+S)}{\sqrt{3}\,|a|\,c_1}$$

Cinquième cas : $c/a < 1$, $a \neq 0$, $|q(\ddot{x})| \leqslant Q$ *pour* $\ddot{x} \in E^1$, $s(x) \in C^1(E^1)$, *et* $as'(x) \geqslant 0$ *pour* $x \in E^1$.

Dans ce cas, les relations (6.2.7-1) ou (6.2.7-2) entraînent

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ddot{x}^2(t)dt\right]^{1/2} \leqslant |c_1 a|^{-1}(P + Q)$$

et dès lors,

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dot{x}^2(t)dt\right]^{1/2} \leqslant |c_1 a|^{-1}(P+Q), \quad \sup_{t\in[0,2\pi]} |\dot{x}(t)| \leqslant \frac{\pi(P+Q)}{\sqrt{3}\,|a|\,c_1},$$

$$\sup_{t\in[0,2\pi]} |x(t) - P_0x(t)| \leqslant \frac{\pi(P+Q)}{\sqrt{3}\,|a|\,c_1}$$

Sixième cas : $c/a < 1$, $a \neq 0$, $aq(\ddot{x})\ddot{x} \leqslant 0$ *pour* $\ddot{x} \in E^1$, $|s(x)| \leqslant S$ *pour* $x \in E^1$. (6.2.6-1) ou (6.2.6-2) entraînent

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ddot{x}^2(t)dt\right]^{1/2} \leqslant |c_1 a|^{-1}(P + S)$$

d'où

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dot{x}^2(t)dt\right]^{1/2} \leqslant \frac{P+S}{|a|\,c_1}, \quad \sup_{t\in[0,2\pi]} |\dot{x}(t)| \leqslant \frac{\pi(P+S)}{\sqrt{3}\,|a|\,c_1},$$

$$\sup_{t\in[0,2\pi]} |x(t) - P_0x(t)| \leqslant \frac{\pi(P+S)}{\sqrt{3}\,|a|\,c_1}$$

Dès lors, en utilisant (6.2.3-1) ou (6.2.3-2)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dddot{x}^2(t)dt \leqslant \frac{|b|\,(P+S)^2}{|a|^2\,c_1^2} + (P + R_1 + S)\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dddot{x}^2(t)dt\right]^{1/2},$$

où

$$\mathrm{R}_1 = \sup_{|\dot{x}| \leqslant \frac{\pi(\mathrm{P}+\mathrm{S})}{\sqrt{3}\,|a|\,c_1}} |r(\dot{x})|,$$

c'est-à-dire

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dddot{x}^2(t)dt\right]^{1/2} \leqslant \mathrm{K}_1 \tag{6.2.15}$$

K_1 étant la racine positive unique de l'équation

$$z^2 - (\mathrm{P} + \mathrm{R}_1 + \mathrm{S})z - |b|\,|c_1 a|^{-2}(\mathrm{P}+\mathrm{S})^2 = 0.$$

De (6.2.15), on déduit alors, par (1.3.9),

$$\sup_{t\in[0,\,2\pi]} |\ddot{x}(t)| \leqslant \frac{\pi \mathrm{K}_1}{\sqrt{3}}$$

Septième cas : $c/a < 1$, $a \neq 0$, $aq(\ddot{x})\ddot{x} \leqslant 0$ *pour* $\ddot{x} \in \mathrm{E}^1$, $s(x) \in \mathrm{C}^2(\mathrm{E}^1)$, $as'(x) \geqslant 0$, $|s''(x)| \leqslant \mathrm{S}''$, *pour* $x \in \mathrm{E}^1$.

De (6.2.7-1) ou (6.2.7-2), on obtient

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ddot{x}^2(t)dt\right]^{1/2} \leqslant |c_1 a|^{-1}\,\mathrm{P},$$

d'où

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dot{x}^2(t)dt\right]^{1/2} \leqslant \frac{\mathrm{P}}{c_1\,|a|}, \quad \sup_{t\in[0,\,2\pi]} |\dot{x}(t)| \leqslant \frac{\pi \mathrm{P}}{\sqrt{3}\,|a|\,c_1},$$

$$\sup_{t\in[0,\,2\pi]} |x(t) - \mathrm{P}_0 x(t)| \leqslant \frac{\pi \mathrm{P}}{\sqrt{3}\,|a|\,c_1}$$

et, comme dans le sixième cas, mais à partir de (6.2.5-1) ou (6.2.5-2),

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dddot{x}^2(t)dt \leqslant |b|\,|c_1 a|^{-2}\mathrm{P}^2 + (\mathrm{P} + \mathrm{R}_2)\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dddot{x}^2(t)dt\right]^{1/2} + \frac{\mathrm{S}''}{2}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\,\frac{\mathrm{P}}{|a|\,c_1}\right)^3$$

avec

$$\mathrm{R}_2 = \sup_{|\dot{x}| \leqslant \frac{\pi \mathrm{P}}{\sqrt{3}\,|a|\,c_1}} |r(\dot{x})|$$

c'est-à-dire

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dddot{x}^2(t)dt\right]^{1/2} \leqslant \mathrm{K}_2$$

K_2 étant la racine positive unique de l'équation

$$z^2 - (\mathrm{P} + \mathrm{R}_2)z - \frac{|b|\,\mathrm{P}^2}{|a|^2 c_1^2} - \frac{\mathrm{S}''\pi^3\mathrm{P}^3}{6\sqrt{3}\,|a|^3 c_1^3} = 0$$

On en déduit alors

$$\sup_{t\in[0,\,2\pi]} |\ddot{x}(t)| \leqslant \frac{\pi \mathrm{K}_2}{\sqrt{3}}.$$

6-3. *Solutions périodiques de l'équation différentielle*

$$x + a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = p(t) + q(\ddot{x}) + r(\dot{x}) + s(x), \; c \neq 0.$$

En vue d'étudier l'existence de solutions périodiques de l'équation (6.1.1) lorsque $c \neq 0$, nous partirons de l'équation (6.2.1) et nous commencerons par démontrer que, si l'on ajoute l'hypothèse $c \neq 0$ aux hypothèses des différents cas traités au paragraphe précédent, on peut obtenir une borne supérieure pour

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2(t)dt \tag{6.3.1}$$

lorsque $x(t)$ est une solution périodique éventuelle de (6.2.1). L'obtention de cette borne sera basée sur la relation (6.2.9-1) et sur les résultats du paragraphe 6-2, dont nous conservons évidemment le mode de classement.

Remarquons une fois pour toutes que l'existence d'une borne pour (6.3.1) entraîne dans les cas 3 à 5, une propriété analogue pour

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ddot{x}^2(t)dt,$$

ainsi qu'on le vérifie aisément à partir de la relation (6.2.3.1) et des résultats du paragraphe 6-3. Nous ne reviendrons pas sur ce point dans la discussion ci-dessous.

Premier cas :

Si nous posons

$$Q_1 = \sup_{|\ddot{x}| \leqslant \frac{\pi(P+R+S)}{\sqrt{3}b_1}} |q(\ddot{x})|,$$

nous déduisons de (6.2.10) et (6.2.9-1)

$$\frac{|c|}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2(t)dt \leqslant |a|\, b_1^{-2}\,(P + R + S)^2 + (P + Q_1 + R + S)\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2(t)dt\right]^{1/2}$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2(t)dt \leqslant K_3^2$$

K_3 étant la racine positive unique de l'équation

$$|c|\, z^2 - (P + Q_1 + R + S)z - |a|\, b_1^{-2}\,(P + R + S)^2 = 0$$

Deuxième cas :

Posant

$$Q_2 = \sup_{|\ddot{x}| \leqslant \frac{\pi(P+S)}{\sqrt{3}b_1}} |q(\ddot{x})|, \quad R_3 = \sup_{|\dot{x}| \leqslant \frac{\pi(P+S)}{\sqrt{3}b_1}} |r(\dot{x})|$$

nous déduisons de (6.2.11) et (6.2.9-1)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2(t)dt \leqslant K_4^2$$

où K_4 est la racine positive unique de l'équation

$$| c | z^2 - (P + Q_2 + R_3 + S)z - | a | b_1^{-2} (P + S)^2 = 0$$

Troisième cas : Supposons, en outre, que $cs(x)x \leqslant 0$ pour $x \in E^1$.
On déduit encore de (6.2.14) et (6.2.9-1)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2(t)dt \leqslant K_5^2,$$

K_5 racine positive unique de l'équation

$$| c | z^2 - (P + Q + R)z - | a | | b |^{-2} (P + Q + R)^2 = 0$$

Quatrième cas :

En posant $R_4 = \sup\limits_{|\dot{x}| \leqslant \frac{\pi(P+Q+S)}{\sqrt{3}|a|c_1}} | r(\dot{x}) |$, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2(t)dt \leqslant K_6^2$$

K_6 racine positive unique de

$$| c | z^2 - (P + Q + R_4 + S)z - c_1^{-2} | a |^{-1} (P + Q + S)^2 = 0.$$

Cinquième cas : Supposons réalisée l'hypothèse supplémentaire $cs(x)x \leqslant 0$ pour $x \in E^1$.

Posant $R_5 = \sup\limits_{|\dot{x}| \leqslant \frac{\pi(P+Q)}{\sqrt{3}|a|c_1}} | r(\dot{x}) |$, il vient

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2(t)dt \leqslant K_7^2$$

K_7 racine positive unique de

$$| c | z^2 - (P + Q + R_5)z - | a |^{-1} c_1^{-2} (P + Q)^2 = 0$$

Sixième cas :
On a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2(t)dt \leqslant K_8^2,$$

K_8 racine positive unique de

$$| c | z^2 - (P + Q_3 + R_1 + S)z - | a |^{-1} c_1^{-2} (P + S)^2 = 0,$$

où

$$Q_3 = \sup_{|\dot{x}| \leqslant \frac{\pi K_1}{\sqrt{3}}} | q(\dot{x}) |, \quad R_1 = \sup_{|\dot{x}| \leqslant \frac{\pi(P+S)}{\sqrt{3}|a|c_1}} | r(\dot{x}) |.$$

Septième cas : Supposons, en outre, que $cs(x)x \leqslant 0$ pour $x \in E^1$.
On a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2(t)dt \leqslant K_9^2,$$

K_9 racine positive unique de

$$|c| z^2 - (P + Q_4 + R_2)z - |a|^{-1} c_1^{-2} P^2 = 0$$

où

$$Q_4 = \sup_{|\ddot{x}| \leqslant \frac{\pi K_2}{\sqrt{3}}} |q(\ddot{x})|, \quad R_2 = \sup_{|\dot{x}| \leqslant \frac{\pi P}{\sqrt{3}\,|a|\,c_1}} |r(\dot{x})|.$$

Remarquons enfin, que, lorsque $c \neq 0$, la relation (6.2.9-1) nous permet d'obtenir immédiatement deux nouveaux cas pour lesquels

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2(t)dt$$

est borné :

Huitième cas : $a/c \leqslant 0$, $c \neq 0$, $|q(\ddot{x})| \leqslant Q$ *pour* $\ddot{x} \in E^1$, $|r(\dot{x})| \leqslant R$ *pour* $\dot{x} \in E^1$, $|s(x)| \leqslant S$ *pour* $x \in E^1$.

On déduit en effet immédiatement de (6.2.9-1)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2(t)dt \leqslant |c|^{-2} (P + Q + R + S)^2$$

et il en résulte très facilement des bornes équivalentes pour $\dot{x}$, $\ddot{x}$ et $\dddot{x}$.

Neuvième cas : $a/c \leqslant 0$, $c \neq 0$, $|q(\ddot{x})| \leqslant Q$ *pour* $\ddot{x} \in E^1$, $|r(\dot{x})| \leqslant R$ *pour* $\dot{x} \in E^1$, $cs(x)x \leqslant 0$ *pour* $x \in E^1$.

On obtient en effet, par (6.2.9-1),

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2(t)dt \leqslant |c|^{-2} (P + Q + R)^2,$$

et il en résulte très facilement des bornes équivalentes pour $\dot{x}$, $\ddot{x}$ et $\dddot{x}$.

Remarquons maintenant que (6.2.1) devient, si on pose $x = x_1$, $\dot{x} = x_2$, $\ddot{x} = x_3$, un système du type (4.6.1-3) et que, puisque $c \neq 0$, l'équation caractéristique

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0$$

de sa partie linéaire n'admettra jamais de racine nulle. D'autre part, si elle admet un couple de racines imaginaires conjuguées de la forme $\pm iN$, N entier positif, alors b devra être égal au carré d'un entier, a et c devront être de même signe et tels que $c/a = b$. Or,

1) dans les 3 premiers cas, $b < 1$ ne peut être égal au carré d'un entier puisqu'il est négatif ou situé dans $]0, 1[$;

2) dans les 6 derniers cas, c/a ne peut être égal à b, c'est-à-dire au carré d'un entier puisqu'il est situé dans $]-\infty, 1[$. Par conséquent, sous les hypothèses cor-

respondant aux 9 cas considérés, l'équation caractéristique n'admet jamais de racine de la forme $\pm iN$, N entier positif ou nul.

Des inégalités obtenues dans les paragraphes 6-2 et 6-3, du corollaire 4-1 et du corollaire 4-3, nous déduisons alors le

Théorème 6-1 : *Soit l'équation différentielle du type d'Aïzerman*

$$\dddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = p(t) + q(\ddot{x}) + r(\dot{x}) + s(x) \tag{6.3.2}$$

où a, b, c sont des constantes réelles, $c \neq 0$, $p(t) \in C^0\,[0, 2\pi]$ et est périodique de période 2π, $q(\ddot{x})$, $r(\dot{x})$ et $s(x)$ sont définies et localement lipschitziennes dans E^1. Q, R, S, S'' étant des constantes positives, si l'une des hypothèses supplémentaires suivantes est réalisée pour tout $x \in E^1$, $\dot{x} \in E^1$, $\ddot{x} \in E^1$:

1	$b < 1$		$\lvert r(\dot{x}) \rvert \leqslant R$	$\lvert s(x) \rvert \leqslant S$
2	$b < 1$		$r(\dot{x}) \in C^1(E^1)$, $r'(\dot{x}) > 0$	$\lvert s(x) \rvert \leqslant S$
3	$b < 0$	$\lvert q(\ddot{x}) \rvert \leqslant Q$	$\lvert r(\dot{x}) \rvert \leqslant R$	$cs(x)x \leqslant 0$
4	$\frac{a}{c} \notin [0, 1]$	$\lvert q(\ddot{x}) \rvert \leqslant Q$		$\lvert s(x) \rvert \leqslant S$
5	$\frac{a}{c} \notin [0, 1]$	$\lvert q(\ddot{x}) \rvert \leqslant Q$		$s(x) \in C^1(E^1)$, $as'(x) \geqslant 0$ $cs(x)x \leqslant 0$
6	$\frac{a}{c} \notin [0, 1]$	$aq(\ddot{x})\ddot{x} \leqslant 0$		$\lvert s(x) \rvert \leqslant S$
7	$\frac{a}{c} \notin [0, 1]$	$aq(\ddot{x})\ddot{x} \leqslant 0$		$s(x) \in C^2(E^1)$, $\lvert s''(x) \rvert \leqslant S''$ $as'(x) \geqslant 0$, $cs(x)x \leqslant 0$
8	$\frac{a}{c} \leqslant 0$	$\lvert q(\ddot{x}) \rvert \leqslant 0$	$\lvert r(\dot{x}) \rvert \leqslant R$	$\lvert s(x) \rvert \leqslant S$
9	$\frac{a}{c} \leqslant 0$	$\lvert q(\ddot{x}) \rvert \leqslant Q$	$\lvert r(\dot{x}) \rvert \leqslant R$	$cs(x)x \leqslant 0$

l'équation différentielle (6.3.2) *possède au moins une solution périodique de période* 2π.

En guise de comparaison avec les critères de G. Villari [90], nous signalerons que ceux-ci sont relatifs :

1) aux hypothèses 1 et 2 sauf $b < 0$ au lieu de $b < 1$;

2) aux hypothèses 6 et 7 sauf $a/c < 0$ au lieu de $a/c \notin [0, 1]$.

Du théorème 6-1, on peut déduire quelques corollaires très simples qui généralisent des résultats de G. Villari [94] :

Corollaire 6-1 : *Si* $p(t) \in C^0 [0, 2\pi]$ *et est périodique de période* 2π, *et si* $q(\ddot{x})$ *est définie et localement lipschitzienne dans* E^1, *l'équation différentielle*

$$\dddot{x} + q(\ddot{x}) + b\dot{x} + cx = p(t)$$

où $b < 1$ *et* $c \neq 0$ *sont des constantes réelles, possède au moins une solution périodique de période* 2π.

C'est une conséquence immédiate des hypothèses 1 ou 2.

Corollaire 6-2 : *Si* $p(t) \in C^0 [0, 2\pi]$ *et est périodique de période* 2π, *et si* $r(\dot{x})$ *est définie et localement lipschitzienne dans* E^1, *l'équation différentielle*

$$\dddot{x} + a\ddot{x} + r(\dot{x}) + cx = p(t)$$

où a *et* c *sont des constantes réelles telles que* $c \neq 0$ *et* $a/c \notin [0, 1]$, *possède au moins une solution périodique de période* 2π.

C'est une conséquence immédiate des hypothèses 4 à 7.

6-4. *Solutions périodiques de l'équation différentielle*

$$\dddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} = p(t) + q(\ddot{x}) + r(\dot{x}) + s(x).$$

En vue d'étudier les solutions périodiques de période 2π de l'équation différentielle

$$\dddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} = p(t) + q(\ddot{x}) + r(\dot{x}) + s(x),$$

où a et b sont des constantes réelles, $p(t) \in C^0 [0, 2\pi]$ est périodique de période 2π, $q(\ddot{x})$, $r(\dot{x})$ et $s(x)$ sont définies et lipschitziennes dans E^1, nous considérerons l'équation différentielle (6.2.2) avec $c = 0$.

Supposons que, outre les hypothèses que nous venons d'énoncer,

$$| s(x) | \to \infty \quad \text{si} \quad | x | \to \infty \tag{6.4.1}$$

et que l'une des deux conditions suivantes soit réalisée :

$$\lim_{|x| \to \infty} xs(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{|x| \to \infty} xs(x) = -\infty. \tag{6.4.2}$$

Ces hypothèses, jointes à $c = 0$, entraînent que, parmi les 7 cas étudiés au paragraphe 6-2, seuls :

1) le 3^0 : $b < 0$, $| q(\ddot{x}) | \leqslant Q$, $| r(\dot{x}) | \leqslant R$;
2) le 5^0 : $a \neq 0$, $| q(\ddot{x}) | \leqslant Q$, $as'(x) \geqslant 0$;
3) le 7^0 : $a \neq 0$, $aq(\ddot{x})\ddot{x} \leqslant 0$, $as'(x) \geqslant 0$, $| s''(x) | \leqslant S''$,

sont compatibles avec les conditions supplémentaires imposées à $s(x)$.

$x(t)$ étant une solution périodique éventuelle de période 2π de (6.2.2) avec $c = 0$, si nous posons

$$x(t) = a_0 + u(t), \; a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t)dt,$$

il résulte de la discussion du paragraphe 6-2 que, dans les cas que nous venons d'énumérer,

$$\sup_{t \in [0, 2\pi]} | u(t) |$$

est borné indépendamment de λ. Il reste donc à démontrer qu'il en est de même pour $| a_0 |$.

En intégrant (6.2.2) de 0 à 2π après multiplication par $(2\pi)^{-1}$, il vient, pour toute solution périodique correspondant à $\lambda \in]0, 1]$ et sa limite en $\lambda = 0$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [p(t) + q(\ddot{x}(t)) + r(\dot{x}(t)) + s(a_0 + u(t))]\, dt = 0. \tag{6.4.3}$$

En vertu du théorème de la moyenne [35], il existe un $t_u \in [0, 2\pi]$ tel que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} s(a_0 + u(t))dt = s(a_0 + u(t_u)),$$

d'où, par suite de (6.4.3) et des résultats du paragraphe 6-2

1) dans le 3e cas :

$$| s(a_0 + u(t_u) | \leqslant P + Q + R \quad \text{et} \quad | u(t_u) | \leqslant \frac{\pi(P + Q + R)}{\sqrt{3} \, | b |}$$

2) dans le 5e cas :

$$| s(a_0 + u(t_u)) | \leqslant P + Q + R_5 \quad \text{et} \quad | u(t_u) | \leqslant \frac{\pi(P + Q)}{\sqrt{3} \, | a | \, c_1}$$

3) dans le 7e cas :

$$| s(a_0 + u(t_u)) | \leqslant P + Q_4 + R_2 \quad \text{et} \quad | u(t_u) | \leqslant \frac{\pi P}{\sqrt{3} \, | a | \, c_1}$$

Ces inégalités et l'hypothèse (6.4.1) entraînent immédiatement dans les 3 cas considérés l'existence d'une constante $C' > 0$ indépendante de λ et telle que

$$| a_0 | \leqslant C',$$

ce qui, par suite des bornes pour $u(t)$ démontrées au paragraphe 6-2 fournit, pour toute solution périodique éventuelle de période 2π de (6.2.2) l'inégalité

$$\sup_{t \in [0, 2\pi]} | x(t) | \leqslant C, \; C > 0,$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2(t)dt \leqslant C^2.$$

L'équation (6.2.2) étant du type (4.9.1), il reste maintenant, en vertu du corollaire 4-4, à démontrer que

$$d\,\{F_0(a_0),]-R, R[, 0\} \neq 0,$$

$F_0(a_0)$ étant définie par

$$a_0 \to -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [p(t) + q(0) + r(0) + s(a_0)]\, dt$$

$$= -[K_0 + s(a_0)],$$

$$K_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(t)dt + q(0) + r(0)$$

et $R > 0$ étant suffisamment grand. Or, par suite des hypothèses (6.4.1) et (6.4.2), il résulte du théorème 2-10-2 que cette condition est réalisée lorsque R est suffisamment grand. Dès lors, si on remarque pour terminer que l'hypothèse $as'(x) \geqslant 0$ entraîne automatiquement la réalisation d'une des deux conditions

$$\lim_{|x| \to \infty} xs(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{|x| \to \infty} xs(x) = -\infty,$$

puisque $s(x)$ est alors une fonction monotone, nous obtenons le

Théorème 6-2 : *Soit l'équation différentielle du type d'Aizerman*

$$\dddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} = p(t) + q(\ddot{x}) + r(\dot{x}) + s(x) \tag{6.4.4}$$

où a et b sont des constantes réelles, $p(t) \in C^0\,[0, 2\pi]$ est périodique de période 2π, $q(\ddot{x})$, $r(\dot{x})$ et $s(x)$ sont définies et localement lipschitzienne dans E^1 et

$$|s(x)| \to \infty \quad \text{si} \quad |x| \to \infty.$$

Q, R, S'' *étant des constantes positives, si l'une des hypothèses supplémentaires suivantes est réalisée pour tout $x \in E^1$, $\dot{x} \in E^1$, $\ddot{x} \in E^1$:*

1	$b < 0$	$\lvert q(\ddot{x}) \rvert \leqslant Q$	$\lvert r(\dot{x}) \rvert \leqslant R$	$\lim_{\lvert x\rvert \to \infty} sx(x) = +\infty$ ou $-\infty$
2	$a \neq 0$	$\lvert q(\ddot{x}) \rvert \leqslant Q$		$s(x) \in C^1(E^1)$, $as'(x) \geqslant 0$
3	$a \neq 0$	$aq(\ddot{x})\ddot{x} \leqslant 0$		$s(x) \in C^2(E^1)$, $as'(x) \geqslant 0$, $\lvert s''(x) \rvert \leqslant S''$

l'équation différentielle (6.4.4) *possède au moins une solution périodique de période* 2π.

On déduit immédiatement de ce théorème le corollaire suivant :

Corollaire 6-3 : *Considérons l'équation différentielle*

$$\dddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} + s(x) = p(t) \tag{6.4.5}$$

où a et b sont des constantes, $p(t) \in C^0\,[0, 2\pi]$ et est périodique de période 2π, $s(x)$ est définie et lipschitzienne dans E^1 et telle que

$$|s(x)| \to \infty \quad \textit{lorsque} \quad |x| \to \infty.$$

Si l'une des deux hypothèses supplémentaires suivantes est réalisée :

1) $b < 0$, $\lim_{|x| \to \infty} xs(x) = +\infty$ ou $-\infty$;

2) $a \neq 0$, $s(x) \in C^1(E^1)$, $as'(x) \leqslant 0$,

l'équation différentielle (6.4.5) *possède au moins une solution périodique de période* 2π.

Ce corollaire généralise un théorème de G. Villari [94] qui suppose $s(0) = 0$ et l'existence d'une constante c telle que

$$ac < 0, \; s'(u)/c \geqslant 1,$$

hypothèses qui sont évidemment contenues dans la condition 2) du corollaire 6-3.

6-5. *Solutions périodiques de l'équation différentielle*

$\dddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} + F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0$

Nous allons, dans ce paragraphe, étudier les solutions périodiques de l'équation différentielle

$$\dddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} + F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0$$

où a et b sont des constantes et où $F(t, x, \dot{x}, \ddot{x})$ est définie pour $t \in [0, 2\pi]$, $x \in E^1$, $\dot{x} \in E^1$, $\ddot{x} \in E^1$, continue et périodique en t de période 2π, localement lipschitzienne dans E^3 par rapport à $(x, \dot{x}, \ddot{x})$. Une équation de cette forme a été étudiée au moyen de la méthode de Leray-Schauder par G. VILLARI [96], et, sous une forme moins générale $[F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) \equiv f(x) - p(t)]$ par J. O. C. EZEILO [32] et S. SEDSIWY [90]. Nous supposerons que, pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $x \in E^1$, $\dot{x} \in E^1$, $\ddot{x} \in E^1$,

$$| F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) | \leqslant M$$

M étant une constante positive, et que, pour tout $x(t) \in C^3 [0, 2\pi]$ tel que $| x(t) | \geqslant k$, k constante positive,

$$\operatorname{sgn} x \int_0^{2\pi} F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) dt > 0. \tag{6.5.1}$$

Considérons l'équation différentielle

$$\dddot{x} + \lambda a\ddot{x} + \lambda b\dot{x} + \lambda F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0, \ \lambda \in [0, 1] \tag{6.5.2}$$

et soit $x(t) \in C^3 [0, 2\pi]$ une solution périodique éventuelle de période 2π de (6.5.2). Introduisons-là dans (6.5.2) et intégrons de 0 à 2π après multiplication, respectivement, par $(2\pi)^{-1}\dddot{x}(t)$, $(2\pi)^{-1}\ddot{x}(t)$ et $(2\pi)^{-1}\dot{x}(t)$; il vient :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dddot{x}^2(t)dt - \frac{\lambda b}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ddot{x}^2(t)dt + \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t, x, \dot{x}, \ddot{x})\dddot{x}(t)dt = 0 \tag{6.5.3}$$

$$\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ddot{x}^2(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t, x, \dot{x}, \ddot{x})\ddot{x}(t)dt = 0 \tag{6.5.4}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ddot{x}^2(t)dt + \frac{\lambda b}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dot{x}^2(t)dt + \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t, x, \dot{x}, \ddot{x})\dot{x}(t)dt = 0. \tag{6.5.5}$$

Si $b \leqslant 0$, on déduit de (6.5.3), par l'inégalité de Schwarz :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dddot{x}^2(t)dt \leqslant M^2,$$

ce qui entraîne, en posant $x(t) = a_0 + u(t)$, $a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} x(t)dt$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ddot{x}^2(t)dt \leqslant M^2, \ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dot{x}^2(t)dt \leqslant M^2, \ \sup_{t\in[0, 2\pi]} | \ddot{x}(t) | \leqslant \frac{\pi M}{\sqrt{3}},$$

$$\sup_{t\in[0, 2\pi]} | \dot{x}(t) | \leqslant \frac{\pi M}{\sqrt{3}}, \ \sup_{t\in[0, 2\pi]} | u(t) | \leqslant \frac{\pi M}{\sqrt{3}}$$

De même, si $b \in]0, 1[$, on déduit de (6.5.3)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dddot{x}^2(t)dt \leqslant (1-b)^{-2}M^2 = M'^2,$$

d'où

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ddot{x}^2(t)dt \leqslant M'^2, \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dot{x}^2(t)dt \leqslant M'^2, \quad \sup_{t\in[0,2\pi]} |\ddot{x}(t)| \leqslant \frac{\pi M'}{\sqrt{3}}$$

$$\sup_{t\in[0,2\pi]} |\dot{x}(t)| \leqslant \frac{\pi M'}{\sqrt{3}}, \quad \sup_{t\in[0,2\pi]} |u(t)| \leqslant \frac{\pi M'}{\sqrt{3}}$$

Enfin, si $a \neq 0$, (6.5.4) entraîne

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ddot{x}^2(t)dt \leqslant \frac{M^2}{a^2}$$

d'où

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dot{x}^2(t)dt \leqslant \frac{M^2}{a^2}.$$

Par conséquent, en vertu de (6.5.3)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dddot{x}^2(t)dt \leqslant M''^2,$$

où M'' est la racine positive unique de l'équation

$$z^2 - Mz - \frac{|b|}{a^2}M^2 = 0$$

On en déduit

$$\sup_{t\in[0,2\pi]} |\ddot{x}(t)| \leqslant \frac{\pi M''}{\sqrt{3}}, \quad \sup_{t\in[0,2\pi]} |\dot{x}(t)| \leqslant \frac{\pi M}{\sqrt{3}\,|a|}, \quad \sup_{t\in[0,2\pi]} |u(t)| \leqslant \frac{\pi M}{\sqrt{3}\,|a|}$$

Intégrons maintenant (6.5.2) de 0 à 2π après multiplication par $(2\pi)^{-1}$; il vient

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t, a_0 + u(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t))\, dt = 0 \tag{6.5.6}$$

Par le théorème de la moyenne, il existe une valeur $t_u \in [0, 2\pi]$ telle que la relation (6.5.6) puisse s'écrire

$$F(t_u, a_0 + u(t_u), \dot{x}(t_u), \ddot{x}(t_u)) = 0 \tag{6.5.7}$$

Par suite des inégalités obtenues pour $\sup_{t\in[0,2\pi]} |u(t)|$, $\sup_{t\in[0,2\pi]} |\dot{x}(t)|$ et $\sup_{t\in[0,2\pi]} \ddot{x}(t)$, (6.5.7) et la relation (6.5.1) entraînent alors

$$|a_0| \leqslant |a_0 + u(t)| + |u(t)| \leqslant k + \frac{\pi M'''}{\sqrt{3}}, \quad M''' = M, M' \text{ ou } \frac{M}{|a|}$$

selon le cas considéré.

On a donc, pour toute solution périodique éventuelle de période 2π de (6.5.2), lorsque $b < 1$ ou $a \neq 0$:

$$\sup_{t \in [0, 2\pi]} \mid x(t) \mid \leqslant k + \frac{2\pi M'''}{\sqrt{3}} = C$$

d'où

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2(t)dt \leqslant C^2$$

En vertu du corollaire 4-4 et de la forme de (6.5.2), il reste alors à démontrer que

$$d \{F_0(a_0),]-R, R[, 0\} \neq 0,$$

où $F_0(a_0) : a_0 \to -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t, a_0, 0, 0)dt$ et où $R > 0$ est suffisamment grand. Or, par suite de (6.5.1), le théorème 2-10-2 est une nouvelle fois applicable et fournit la relation

$$d \{F_0(a_0),]-R, R[, 0\} \neq 0$$

lorsque $R > k$. Nous avons donc démontré le

Théorème 6-3 : *Considérons l'équation différentielle*

$$\dddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} + F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0 \tag{6.5.8}$$

où a et b sont des constantes, $F(t, x, \dot{x}, \ddot{x})$ *est continue par rapport à t et périodique de période* 2π, *définie et localement lipschitzienne par rapport à* $x \in E^1$, $\dot{x} \in E^1$ et $\ddot{x} \in E^1$. *On supposera en outre que, pour tout* $t \in [0, 2\pi]$, $x \in E^1$, $\dot{x} \in E^1$, $\ddot{x} \in E^1$,

$$\mid F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) \mid \leqslant M,$$

M *étant une constante positive, et que, pour tout* $x(t) \in C^3 [0, 2\pi]$ *et tel que* $\mid x(t) \mid \geqslant k$, $k > 0$, *on a*

$$\operatorname{sgn} x \int_0^{2\pi} F(t, x, \dot{x}, \ddot{x})dt > 0.$$

Si $b < 1$ *ou si* $a \neq 0$, *l'équation différentielle* (6.5.8) *possède au moins une solution périodique de période* 2π.

Ce théorème généralise le résultat de G. Villari [96] qui suppose $b < 0$ ou $ab \neq 0$, et ce dernier résultat était lui-même une extension des théorèmes de J. O. C. Ezeilo [32] et S. Sedsiwy [90].

BIBLIOGRAPHIE

[1] Aizerman, M. A., The theory of automatic control, Pergamon Press, Oxford, 1963.

[2] Alexandroff, P. et H. Hopf, Topologie, Springer Verlag, Berlin, 1935.

[3] Bancroft, S., J. K. Hale et D. Sweet, Alternative problems for nonlinear functional equations. *J. Diff. Equ.*, 4 (1968), 40-56.

[4] Barbalat, I., Applications du principe topologique de T. Wazewski aux équations différentielles du second ordre. *Ann. Polon. Math.*, 5 (1958), 303-317.

[5] BASS, R. W., Equivalent linearization, nonlinear circuit synthesis and the stabilization and optimization of control systems, Proc. Symp. Nonlinear Circuit Analysis, New York, april 1956, Polytech. Press of the Polytechn. Inst. of Brooklyn, 1957, 163-198.

[6] BASS, R. W., Mathematical legitimacy of equivalent linearization by describing functions, Automatic and Remote Control, Proc. First Congr. IFAC, Moscou 1960, II, Butterworths, London, 1961, 895-905.

[7] BOGOLIOUBOV, N. et YU. A. MITROPOLSKY, Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations, Gordon and Breach Sc. Publ., New York, 1961.

[8] BROUWER, L. E. J., Uber Abbildungen von Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.*, 71 (1912), 97-115.

[9] CACCIOPOLI, R., et A. GHIZZETTI, Ricerche asintotiche per una particolare equazione differenziali non lineare. *Mem. Rend. Acc. d'Italia*, (7), 3 (1942), 427-440.

[10] CARTWRIGHT, M. L., Forced oscillations in nonlinear systems, Contr. to the theory of nonlin. oscill., 1. *Ann. of Math. Stud.*, nº 20, Princeton Univ. Press, 1950, 149-241.

[11] CESARI, L., Sulla stabilità delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti periodici. *Atti Accad. Mem. Classe Fis. Mat. e Nat.*, (6), 11 (1940), 633-692.

[12] CESARI, L., et J. K. HALE, A new sufficient condition for periodic solutions of weakly nonlinear differential systems. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8 (1957), 757-764.

[13] CESARI, L., Existence theorems for periodic solutions of nonlinear lipschitzian differential systems and fixed point theorems. Contr. to the theory of nonlin. oscill., 5., *Ann. of Math. Stud.*, nº 45, Princeton Univ. Press, 1960, 115-172.

[14] CESARI, L., Existence theorems for periodic solutions of nonlinear differential systems, Symp. Ecuac. Difer. Ord. y Appl., Mexico, sept. 1959. *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, (2), 5 (1960), 24-41.

[15] CESARI, L., Periodic solutions of nonlinear differential systems, Proc. Symp. Active Networks and Feedback Syst., Polytechnic Institute of Brooklyn, avril 1960, Polyt. Press of the Polyt. Inst. Brooklyn, 1960, 545-560.

[16] CESARI, L., Functional analysis and periodic solutions of nonlinear differential equations, Contrib. to Diff. Equ., I, Wiley and Sons, New York, 1963, 149-187.

[17] CESARI, L., Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, 1963.

[18] CESARI, L., Functional analysis and Galerkin's method. *Michigan Math. J.*, 11 (1964), 385-414.

[19] CODDINGTON, E. A. et N. LEVINSON, Perturbations of linear systems with constant coefficients possessing periodic solutions, Contrib. to the theory of nonlin. oscill., 2, *Ann. of Math. Stud.*, nº 29, Princeton Univ. Press, 1952, 19-35.

[20] CODDINGTON, E. A. et N. LEVINSON, Theory of ordinary differential equations, Mc Graw-Hill, New York, 1955.

[21] CRONIN, J., Analytical functional mappings. *Ann. of Math.*, 58 (1953), 175-181.

[22] CRONIN, J., Topological degree of some mappings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 5 (1954), 175-178.

[23] CRONIN, J., Note to Poincaré's perturbation method. *Duke Math. J.*, 26 (1959), 251-261.

[24] CRONIN, J., Poincaré's perturbation method and topological degree, Contrib. to the theory of nonlin. oscill., 5. *Ann. of Math. Stud.*, nº 45, Princeton Univ. Press, 1960, 37-54.

[25] CRONIN, J., Families of solutions of a perturbation problem. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 12 (1961), 84-91.

[26] CRONIN, J., An upper bound for the number of periodic solutions of a perturbed system. *J. Math. Anal. Appl.*, 1 (1960), 334-341.

[27] CRONIN, J., A topological method in nonlinear resonance. *J. Math. Anal. Appl.*, 3 (1961), 428-440.

[28] Cronin, J., The number of periodic solutions of nonautonomous systems. *Duke Math. J.*, 27 (1960), 183-194.

[29] Cronin, J., Fixed points and topological degree in nonlinear analysis, Math. Surveys nº 11, Amer. Math. Soc., Providence, Rh. I., 1964.

[30] Cronin, J., Periodic solutions of some nonlinear differential equations. *J. Diff. Equ.*, 3 (1967), 31-46.

[31] Derwidue, L., Sur l'existence de solutions périodiques des équations différentielles quasi-linéaires à coefficients périodiques, I, *Acad. R. Belgique, Bull. Cl. Sciences*, (5), 49 (1963), 346-351 ; II, ibid., 461-469.

[32] Ezeilo, J. O. C., On the existence of periodic solutions of a certain third-order differential equation. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 56 (1960), 381-389.

[33] Faure, R., Solutions périodiques d'équations différentielles et méthode de Leray-Schauder (Cas des vibrations forcées), Structures feuilletées, Coll. Int. du CNRS nº 125, Grenoble 1963. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 14 (1964), 195-204.

[34] Faure, R., Sur l'existence de certaines solutions périodiques et méthode de Leray-Schauder : excitation paramétrique et équations différentielles aux différences, Les vibrations forcées dans les systèmes non linéaires, Coll. Int. du CNRS nº 148, Marseille 1964, Édit. du CNRS, Paris, 1965, 261-266.

[35] Favard, J., Cours d'analyse de l'École Polytechnique, Gauthier-Villars, Paris, 1960-1963.

[36] Friedrichs, K. O., Advanced ordinary differential equations, lecture notes, New York Univ., Inst. of Math. Sciences, 1950 ; Gordon and Breach Science Publ., New York, 1965.

[37] Friedrichs, K. O., Fundamentals of Poincaré's theory, Proc. Symp. Nonlin. Circuit Analysis, New York, avril 1953, Polytechn. Press. of the Polyt. Inst. of Brooklyn, 1953, 56-67.

[38] Friedrichs, K. O., Special topics in analysis, lecture notes, New York Univ., Inst. of Math. Sciences, 1953-1954.

[39] Gantmacher, F. R., Théorie des matrices, Dunod, Paris, 1966.

[40] Gomory, R. E., Critical points at infinity and forced oscillations, Contr. to the theory of nonlin. oscill., 3, *Ann. of Math. Stud.*, nº 36, Princeton Univ. Press, 1956, 85-126.

[41] Gossez, J. P., Existence, unicité et approximation des solutions périodiques de certaines équations non linéaires de la mécanique. *Acad. R. Belgique, Bull. Cl. Sciences*, (5), 54 (1968), 252-257.

[42] Graffi, D., Sulle oscillazioni forzate nella Meccanica non-lineare. *Riv. Mat. Univ. Parma*, 3 (1952), 317-326.

[43] Graffi, D., Sulle oscillazioni forzate nei sistemi non lineari a due gradi di libertà. *Rend. Accad. Naz. Lincei, Cl. Sc. fis., mat. e nat.*, (8), 16 (1954), 176-180.

[44] Gussefeldt, G., Der topologische Abbildungsgrad für vollstetige Vektorfelder zum Nachweis von periodische Lösungen. *Math. Nachr.*, 36 (1968), 231-233.

[45] Haag, J., Les mouvements vibratoires, Presses Univ. de France, Paris, 1952.

[46] Hale, J. K., Periodic solutions of non-linear systems of differential equations. *Riv. Mat. Univ. Parma*, 5 (1954), 281-311.

[47] Hale, J. K., Sufficient conditions for the existence of periodic solutions of systems of weakly nonlinear first and second order differential equations. *J. Math. Mech.*, 7 (1958), 163-171.

[48] Hale, J. K., On differential equations containing a small parameter, Contrib. to diff. equ., 1, Wiley and Sons, New York, 1963, 215-250.

[49] Hale, J. K., Oscillations in nonlinear systems, Mc Graw-Hill, New York, 1963.

[50] Hartman, Ph., Ordinary differential equations, Wiley and Sons, New York, 1964.

[51] HEINZ, E., An elementary analytic theory of the degree of mapping in n-dimensional space. *J. Math. Mech.*, 8 (1959), 231-247.

[52] KANTOROVICH, L. V. et G. P. AKILOV, Functional analysis in normed spaces, Pergamon Press, New York, 1964.

[53] KNOBLOCH, H. W., Remarks on a paper of Cesari on functional analysis and nonlinear differential equations. *Michigan Math. J.*, 10 (1963), 417-430.

[54] KNOBLOCH, H. W., Eine neue Methode zur Approximations periodischer Lösungen nichtlinearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. *Math. Zeits.*, 82 (1963), 177-197.

[55] KNOBLOCH, H. W., Comparaison theorems for nonlinear second order differential equations. *J. Diff. Equ.*, 1 (1965), 1-26.

[56] KRASNOSEL'SKII, M. A., Topological methods in the theory of nonlinear integral equations, Pergamon Press, New York, 1964.

[57] KRASNOSEL'SKII, M. A., A. I. PEROV, A. I. POVOLOTSKIY et P. P. ZABREIKO, Plane vector fields, Academic Press, New York, 1966.

[58] KRASNOSEL'SKII, M. A. The theory of periodic solutions of non-autonomous differential equations. *Russian Math. Surveys* (Usp. Mat. Nauk) 21 (1966), 53-74.

[59] KRASNOSEL'SKII, M. A., The operator of translation along the trajectories of differential equations. Amer. Math. Soc., Providence, Rh. I., 1968.

[60] LEFSCHETZ, S., Existence of periodic solutions of certain differential equations. *Proc. Nat. Acat. Sci. U.S.A.*, 29 (1943), 29-32.

[61] LERAY, J. et J. SCHAUDER, Topologie et équations fonctionnelles. *Ann. Scient. École Norm. Sup.*, (3), 51 (1934), 45-78.

[62] LEVINSON, N., On the existence of periodic solutions for second order differential equations with a forcing term. *J. Math. Phys.* (MIT), 22 (1943), 41-48.

[63] LEVINSON, N., Transformation theory of nonlinear differential equations of the second order. *Ann. of Math.*, (2), 45 (1944), 723-737 ; 49 (1948), 738.

[64] LOCKER, J., An existence analysis for nonlinear equations in Hilbert space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 128 (1967), 403-413.

[65] MALKIN, I. G., Some problems in the theory of nonlinear oscillations, Clearinghouse, U.S. Department of Commerce, Springfield, 1959.

[66] MAWHIN, J., Application directe de la méthode générale de Cesari à l'étude des solutions périodiques de systèmes différentiels faiblement non linéaires. *Bull. Soc. R. Sciences Liège*, 36 (1967), 193-210.

[67] MAWHIN, J., Solutions périodiques de systèmes différentiels faiblement non linéaires lorsque la matrice caractéristique de la partie linéaire possède des diviseurs élémentaires non simples. *Bull. Soc. R. Sciences Liège*, 36 (1967), 491-499.

[68] MAWHIN, J., Familles de solutions périodiques dans les systèmes différentiels faiblement non linéaires. *Bull. Soc. R. Sciences Liège*, 36 (1967), 500-509.

[69] MAWHIN, J., Degré topologique et solutions périodiques des systèmes différentiels de la mécanique non linéaire. Coll. Mécan. non lin. des syst. possédant un nombre fini de degrés de lib., Louvain, novembre 1968, 23-31.

[70] MAWHIN, J., Existence de solutions périodiques dans les systèmes différentiels non autonomes fortement non linéaires, Public. Sémin. Mécanique, Fac. Sc. Appliqu., U.L.B., Bruxelles, 1968-1969, 1-13.

[71] MAWHIN, J., Le problème des solutions périodiques en mécanique non linéaire, Thèse de doctorat, Université de Liège, Février 1969.

[72] MIRANDA, C., Problemi di esistenza in analisi funzionale, Quaderni Matem. n° 3, Scuola Norm. Sup. Pisa, 1948-1949.

[73] NAGUMO, M., A theory of degree of mapping based on infinitesimal analysis. *Amer. J. Math.*, 73 (1951), 485-496.

[74] PLISS, V. A., Nonlocal problems of the theory of oscillations, Academic Press, New York, 1966.

[75] POINCARÉ, H., Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle. *J. de Math.*, (3), 7 (1881), 375-422 ; 8 (1882), 251-296 ; (4), 1 (1885), 167-244 ; 2 (1886), 151-217. Œuvres, t. I, Gauthier-Villars, 1951.

[76] POINCARÉ, H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Gauthier-Villars, Paris, 1892-1899. Dover, New York, 1957.

[77] POL, B. van der, A theory of the amplitude of free ans forced triode vibrations. *Radio Review*, 1 (1920), 701, 754.

[78] POL, B. van der, The nonlinear theory of electric oscillations. *Proc. of the IRE*, 22 (1934), 1051-1086.

[79] REISSIG, R., G. SANSONE et R. CONTI, Qualitative Theorie nichtlinearer Differentialgleichungen, Cremonese, Roma, 1963.

[80] REISSIG, R., Ein funktionalanalytischer Existenbeweis für periodische Lösungen. *Monatsb. Deutschen Akad. Wiss. Berlin*, 6 (1964), 407-413.

[81] REISSIG, R., Funktionalanalytischer Existenzbeweis für periodische Lösungen. *Zeitschr. für Angew. Math. Mech.*, 45 (1965), T 72-T 73.

[82] REISSIG, R., Über die Existenz periodischer Lösungen bei einer nichtlinearen Differentialgleichung dritter Ordnung. *Math. Nachr.*, 32 (1966), 83-88.

[83] REISSIG, R., Periodische Lösungen nichtlinearer Differentialgleichungen. *Monatsb. Deutschen Akad. Wiss. Berlin*, 8 (1966), 779-782.

[84] REUTER, G. E. H., Note on the existence of periodic solutions of certain differential equations (unpublished).

[85] ROSEAU, M., Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité, Springer Verlag, Berlin, 1966.

[86] SAATY, Th. L. et J. BRAM, Nonlinear mathematics, Mc Graw-Hill, New York, 1964.

[87] SAATY, Th. L., Modern nonlinear equations, Mac Graw-Hill, New York, 1967.

[88] SANSONE, G. et R. CONTI, Non-linear differential equations, Pergamon Press, New York, 1964.

[89] SCHMITT, K., Periodic solutions of nonlinear second order differential equations, *Math. Zeitschr.*, 98 (1967), 200-207.

[90] SEDZIWY, S., On periodic solutions of a certain third-order non-linear differential equation. *Ann. Polon. Mathem.*, 17 (1965), 147-154.

[91] SIBUYA, Y., Nonlinear ordinary differential equations with periodic coefficients. *Funkcialaj Ekvacioj* (Ser. Int.) 1 (1958), 77-132.

[92] SIBUYA, Y., On perturbations of periodic solutions. *J. Math. Mech.*, 9 (1960), 771-782.

[93] STOPPELLI, F., Su un'equazione differenziale della meccanica dei fili. *Rend. Accad. Sc. Fiz. Mat. Napoli*, (4), 19 (1952), 109-114.

[94] VILLARI, G., Contributi allo studio dell'esistenza di soluzioni periodiche per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie. *Ann. matem. pura ed appl.*, (4), 69 (1965), 171-190.

[95] VILLARI, G., Soluzioni periodiche di una classe di sistemi di tre equazioni differenziali ordinarie. *Ann. mat. pura ed appl.*, (4), 69 (1965), 191-200.

[96] VILLARI, G., Soluzioni periodiche di una classe di equazioni differenziali del terz'ordine quasi lineari. *Ann. mat. pura ed appl.*, (4), 73 (1966), 103-110.

[97] ZABREIKO, P. P., On the calculation of the Poincaré index. *Soviet Math. Doklady* 3 (1962), 1128-1132 (DAN, 145, 1962, 979-982).