Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 38e année, n° 3-4, 1969, pp. 101-115

FERMETURES MULTIPLICATIVES

par J. C. VARLET (*)

SUMMARY

A closure (operator) φ of a partially ordered groupoid G is multiplicative if and only if it satisfies the condition :

$$(ab)\varphi = (a\varphi)\,(b\varphi),\ \forall a, b \in G.$$

When G has a zero, φ is said to be normalized if and only if $0\varphi = 0$.

We designate by F_φ the set of all elements of G invariant under φ. $\Phi(G)$, $\Phi_m(G)$ and $\Phi_m^0(G)$ are respectively the sets of all closures, multiplicative closures and normalized multiplicative closures definable on G.

We characterize the multiplicative closures by means of F_φ. If φ_S denotes the closure defined by the relatively $\wedge$-complete subsemilattice S of the $\wedge$-semilattice L (resp. distributive $\wedge$-semilattice L), $\varphi_S \in \Phi_m(L)$ if and only if $\forall x, y \in L$ and $\forall z \in S$ such that $x \wedge y \leqslant z$ (resp. $x \wedge y = z$), there exists $x_1 \in S$ such that $x_1 \geqslant x$ and $x_1 \wedge y \leqslant z$ (resp. $x_1 \wedge y = z$).

In a modular lattice, $\forall \varphi \in \Phi_m$, F_φ is semiconvex, i. e., it contains x and y whenever it contains $x \wedge y$ and $x \vee y$.

In a negatively ordered semigroup G with zero element, $\forall \varphi \in \Phi_m^0(G)$, the set-complement of a maximal d-ideal is φ-closed (i. e., it contains $x\varphi$ whenever it contains x).

In a lattice L with 0, $\forall \varphi \in \Phi_m(L)$ and $\forall x \in L$, $x\varphi = x \vee 0\varphi$ if L is either section complemented, or relatively semicomplemented, or simple.

If L is a complete lattice, $\Phi(L)$ has the same property. Generally, $\Phi_m(L)$ is not a sublattice of $\Phi(L)$ but this becomes true if L is weakly complemented. In such a lattice, $\Phi_m(L)$ is an Abelian semigroup for the composition of mappings.

INTRODUCTION

A notre connaissance, la notion de fermeture multiplicative a été étudiée systématiquement pour la première fois en 1952, par G. Bergmann [1]. Cinq ans plus tard, R. E. Johnson [10] mettait en relief l'intérêt de ce concept en théorie des anneaux. Récemment, R. Cignoli [4] a poursuivi l'étude des fermetures multiplicatives et montré leur utilité dans les algèbres de Lukasiewicz et de Post.

Ces trois auteurs situent délibérément leur recherche sur le plan des lattis. Seul R. Cignoli signale brièvement la possibilité de définir la notion sur un $\wedge$-demi-lattis. Nous avons cru utile de conférer au concept de fermeture multiplicative le maximum de généralité en nous plaçant dans un groupoïde ordonné, imposant évidemment à ce dernier des hypothèses plus ou moins fortes chaque fois que les besoins le réclament.

Après avoir défini les notions de quasi-fermeture et de fermeture multiplicative et montré leur relation avec les quantificateurs introduits par P. R. Halmos [7] et

Présenté par F. Jongmans, le 20 mars 1969.
(*) Institut de Mathématique, 15, avenue des Tilleuls, Liège.

M. F. Janowitz [8], [9], nous motivons notre étude, dans un second chapitre, en livrant un nombre appréciable d'exemples de fermetures multiplicatives.

Nous cherchons ensuite à caractériser ces dernières, notamment en déterminant la structure du sous-ensemble des éléments invariants par la fermeture considérée. Reprenant la notion de sous-ensemble semi-convexe que nous avions introduite précédemment [13], nous donnons une assez jolie propriété du sous-ensemble des invariants d'une fermeture multiplicative sur un lattis modulaire.

Dans le chapitre 4, nous recherchons les éléments invariants par toute fermeture multiplicative (éventuellement normalisée) ainsi que les sous-ensembles « φ-fermés », c'est-à-dire contenant la fermeture $x\varphi$ de x dès qu'ils contiennent x. Nous considérons spécialement le cas des demi-groupes ordonnés quasi-intègres. Nous abordons également la question de savoir quels sont les sous-ensembles que l'on peut se donner a priori comme sous-ensembles des invariants de φ.

Enfin, dans un dernier chapitre, nous précisons les relations liant les trois ensembles : ensemble des fermetures, ensemble des fermetures multiplicatives, ensemble des fermetures multiplicatives normalisées. Nous les considérons d'abord comme ensembles ordonnés puis, recourant à la composition des applications, fournissons un exemple de structure algébrique dont les fermetures multiplicatives forment un demi-groupe abélien. Nous terminons par quelques considérations sur la correspondance congruence-fermeture multiplicative.

1. DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Le cadre le plus général dans lequel les notions de quasi-fermeture et de fermeture peuvent être définies est celui d'*ensemble partiellement ordonné,* c'est-à-dire un couple $(E, \leqslant)$ où E est un ensemble quelconque muni d'une relation d'ordre partiel notée $\leqslant$.

Considérons l'application $\varphi : x \to x\varphi = \bar{x}$ de E dans E.

Si les deux axiomes

$$(F_1) \qquad a \leqslant \bar{a}, \qquad \forall a \in E,$$

$$(F_2) \qquad a \leqslant b \Rightarrow \bar{a} \leqslant \bar{b}, \qquad \forall a, b \in E,$$

sont satisfaits, φ est appelée (*application de*) *quasi-fermeture*.

Si, de plus, φ est idempotente, c'est-à-dire vérifie

$$(F_3) \qquad \bar{\bar{a}} = \bar{a}, \qquad \forall a \in E,$$

φ reçoit le nom de *fermeture*.

On sait que (F_1), (F_2) et (F_3) équivalent à (F_1) et

$$(F_{2,3}) \qquad a \leqslant \bar{b} \Rightarrow \bar{a} \leqslant \bar{b}, \qquad \forall a, b \in E.$$

Notons aussi qu'à toute fermeture φ est associée une équivalence de fermeture $\mathscr{E}_\varphi$ définie comme suit :

$$a \mathscr{E}_\varphi b \Leftrightarrow a\varphi = b\varphi.$$

Dans ce travail, nous serons particulièrement intéressés par les ensembles partiellement ordonnés sur lequels est définie une opération binaire, appelée multiplication, isotone par rapport à la relation d'ordre :

$$a \leqslant b \ (a, b \in E) \Rightarrow ax \leqslant bx \text{ et } ya \leqslant yb, \ \forall x, y \in E.$$

Si la quasi-fermeture (resp. fermeture) φ respecte la multiplication, c'est-à-dire si

$$(F_4) \qquad \overline{ab} = \bar{a}\,\bar{b}, \ \forall a, b \in E,$$

φ est dite *multiplicative*. Ainsi, toute fermeture multiplicative d'un groupoïde ordonné G est un endomorphisme isotone de G, l'image de G par φ étant un sous-groupoïde.

Les exemples de fermetures multiplicatives que l'on peut exhiber montrent à suffisance qu'on ne nuit guère à la généralité en postulant l'existence dans le groupoïde ordonné G d'un élément zéro, noté 0, tel que $0 \leqslant x$ et $0x = x0 = 0$ $(\forall x \in G)$, et en imposant à φ de respecter cet élément, soit

$$(F_5) \qquad \bar{0} = 0.$$

Toute quasi-fermeture (resp. fermeture) satisfaisant à (F_5) sera dite *normalisée*, adjectif que nous empruntons à [7].

Les propriétés des fermetures multiplicatives se manifestent davantage lorsque la multiplication est à la fois associative, commutative et idempotente. On sait qu'alors l'ensemble considéré devient un $\wedge$*-demi-lattis* L dans lequel $a \wedge b = ab$, et $ab = a$ si et seulement si $a \leqslant b$.

L'axiome (F_4) prend ici la forme

$$(F'_4) \qquad \overline{a \wedge b} = \bar{a} \wedge \bar{b}, \ \forall a, b \in L.$$

Si finalement l'on se place dans un lattis $L = \langle L, \wedge, \vee \rangle$, l'axiome (F'_4) ne manque pas de surprendre le topologue qui, d'instinct, eût imposé à la fermeture d'être *additive* ou de Kuratowski, c'est-à-dire de vérifier

$$(F_6) \qquad \overline{a \vee b} = \bar{a} \vee \bar{b}, \ \forall a, b \in L.$$

Observons que (F'_4) ou (F_6) entraîne évidemment (F_2). De plus, l'indépendance de (F_1), (F_3) et (F'_4) dans un demi-lattis (*) se vérifie aisément.

Pour achever ce paragraphe, signalons que Janowitz ([8] et [9]), généralisant une notion de Halmos [7], a appelé *quantificateur* sur un lattis L borné inférieurement, une application $\varphi : x \to x\varphi = \bar{x}$ de L dans L satisfaisant à (F_1), (F_5) et

$$(F_7) \qquad \overline{a \wedge \bar{b}} = \bar{a} \wedge \bar{b}, \ \forall a, b \in L.$$

Un quantificateur peut donc être défini sur un demi-lattis avec élément 0. Il satisfait à (F_2) en toute généralité ([8], théorème 2) et à (F_3), même si L n'a pas d'élément maximum, car est vérifiée identiquement la suite d'égalités

$$\bar{\bar{a}} = \overline{\bar{a} \wedge \bar{a}} = \bar{\bar{a}} \wedge \bar{a} = \bar{a}.$$

Toute fermeture multiplicative normalisée sur un demi-lattis borné inférieurement est un quantificateur puisque

$$\overline{a \wedge b} \leqslant \overline{a \wedge \bar{b}} \leqslant \bar{a} \wedge \bar{b}, \ \forall a, b \in L,$$

et que (F'_4) entraîne l'égalité des membres extrêmes et, conséquemment, (F_7).

Pour toute notion relative aux structures algébriques ordonnées et non définie dans ce travail, nous renvoyons le lecteur à [5].

(*) Dans la suite, un $\wedge$-demi-lattis (resp. un $\wedge$-sous-demi-lattis) sera appelé plus simplement un demi-lattis (resp. un sous-demi-lattis) quand aucune confusion n'est à craindre.

2. EXEMPLES DE FERMETURES MULTIPLICATIVES

Quoique l'axiome (F'_4) ait un caractère assez inusité, la notion de fermeture multiplicative peut être abondamment illustrée.

1. Dans tout groupoïde ordonné (resp. avec élément zéro), l'application identique est trivialement une fermeture multiplicative (resp. normalisée). Si le groupoïde a un élément maximum m, l'application : $x \to x\varphi = m$ est évidemment multiplicative.

2. Soient G un demi-groupe commutatif avec 0 et $\mathscr{I}(G)$ le lattis des idéaux de G. Le radical de tout idéal I de G est défini par

$$R(I) = \{x \in G : x^n \in I \text{ pour un certain entier positif } n\}.$$

C'est un idéal de G qui satisfait à $I \subseteq R(I)$ et $R(R(I)) = R(I)$.

De plus, pour tout couple (I, J) d'idéaux de G, on a : $R(I \cap J) = R(I) \cap R(J)$. L'application $\varphi : I \to I\varphi = R(I)$ de $\mathscr{I}(G)$ dans $\mathscr{I}(G)$ est une fermeture multiplicative. Cette fermeture est normalisée si 0 est le seul élément nilpotent.

3. Soit un anneau A. Appelons φ l'application de $\mathscr{I}(A)$, lattis des idéaux de A, dans $\mathscr{I}(A)$ définie comme suit : pour tout idéal I, $I\varphi$ est le plus petit idéal semi-premier incluant A. Il est prouvé dans [10], p. 512, que φ est une fermeture multiplicative. De plus, φ est normalisée si et seulement si l'anneau A lui-même est semi-premier.

4. Soient L un lattis quelconque et φ une fermeture de L. Considérons l'application ψ de $\mathscr{I}(L)$ dans $\mathscr{I}(L)$ définie comme suit : $I\psi = \{x \in L : \exists\, i \in I, x \leqslant i\varphi\}$ pour tout idéal I de L. En d'autres termes, $I\psi$ est l'ensemble des minorants de $i\varphi$, i parcourant I.

$I\psi$ est un bien un idéal de L car, pour tous $a, b \in I\psi$, il existe $i, j \in I$ tels que $a \leqslant i\varphi$ et $b \leqslant j\varphi$. Il en résulte $a \vee b \leqslant i\varphi \vee j\varphi \leqslant (i \vee j)\varphi$ en vertu de (F_2). Comme $i \vee j \in I$, $a \vee b \in I\psi$.

ψ est visiblement une fermeture. Plus remarquable est le fait que le caractère multiplicatif (ou multiplicatif normalisé) éventuel de φ se transmet à ψ. Supposons donc φ multiplicative et vérifions que $x \in I\psi \wedge J\psi \Rightarrow x \in (I \wedge J)\psi$, l'implication inverse étant vérifiée quelle que soit ψ. L'antécédent de l'implication permet de conclure à l'existence de $i \in I$ et de $j \in J$ tels que $i\varphi$ et $j\varphi$ majorent x. En conséquence, $i\varphi \wedge j\varphi = (i \wedge j)\varphi \geqslant x$ et $x \in (I \wedge J)\psi$.

5. Soit L un demi-lattis pseudo-complémenté. a^* désignant le pseudo-complément de l'élément a, c'est-à-dire le plus grand élément disjoint de a, l'application $a \to a^{**}$ est une fermeture multiplicative normalisée. Il en résulte notamment que, dans le lattis des ouverts d'un espace topologique quelconque, l'application qui envoie tout ouvert sur l'ouvert régulier (*) minimum qui le contient, est une fermeture multiplicative normalisée.

Dans le même ordre d'idées, rappelons que si L est un lattis 0-distributif ($a \wedge b = 0$ et $a \wedge c = 0 \Rightarrow a \wedge (b \vee c) = 0$), $\mathscr{I}(L)$ est pseudo-complémenté et $I \to I^{**}$ est une fermeture multiplicative normalisée.

(*) Un ouvert est dit régulier s'il coïncide avec l'intérieur de son adhérence.

6. Soit L un lattis distributif complet. Pour tout élément a de L, appelons A le sous-ensemble des atomes duaux (c'est-à-dire des éléments couverts par 1) qui suivent a. L'application $\varphi : a \to a\varphi = \bar{a} = \wedge \mathrm{A}$ est une fermeture multiplicative. Seul le caractère multiplicatif de la fermeture fait appel à l'hypothèse de distributivité. Supposons en effet que l'on ait $\bar{a} \wedge \bar{b} > \overline{a \wedge b}$. Cela impliquerait l'existence d'un atome dual x tel que $x \geqslant a \wedge b$, $x \ngeqslant a$ et $x \ngeqslant b$, relations contradictoires puisque les deux dernières entraînent $x \vee a = x \vee b = 1$, d'où $x \vee (a \wedge b) = 1$. φ est normalisée si et seulement si 0 est infimum d'atomes duaux.

7. Considérons à nouveau un lattis distributif L, non nécessairement complet. k étant un élément fixe de L, l'application $\varphi : x \to x\varphi = k \vee x (\forall x \in \mathrm{L})$ est une fermeture à la fois additive et multiplicative dont les invariants sont les éléments du filtre $[k) = \{y \in \mathrm{L} : y \geqslant k\}$.

8. Dans [6], p. 202, L. Fuchs considère un demi-groupe réticulé G avec élément 0 et élément universel u ($0 \leqslant x \leqslant u$, $0x = x0 = 0$, $xu \leqslant x$, $ux \leqslant x$ pour tout $x \in \mathrm{G}$), dans lequel la condition de chaîne ascendante est satisfaite. Il définit l'opérateur P comme suit : à tout élément x de G, P associe l'élément $\mathrm{P}(x)$, supremum de tous les $y \in \mathrm{G}$ tels que $y^k \leqslant x$ pour un entier positif k. Il démontre que P est une fermeture multiplicative.

3. CARACTÉRISATION DES FERMETURES MULTIPLICATIVES

Veillons d'abord à remplacer les égalités des axiomes (F_4) et (F'_4) par des inégalités.

THÉORÈME 1. — *Une fermeture définie sur un groupoïde ordonné* G *est multiplicative si et seulement si*, $\forall x, y \in \mathrm{G}$, *on a*

(1) $$\bar{x}y \leqslant \overline{xy} \leqslant \bar{x}\bar{y} \qquad \textit{et}$$

(2) $$x\bar{y} \leqslant \overline{xy}.$$

Démonstration. — La double condition est évidemment nécessaire : la fermeture étant multiplicative, $\overline{xy} = \bar{x}\bar{y}$ suit $\bar{x}y$ et $x\bar{y}$.

Elle est également suffisante : en appliquant successivement (1) et (2), on obtient

$$\bar{x}\bar{y} \leqslant \overline{x\bar{y}} \leqslant \overline{\overline{xy}} = \overline{xy}.$$

Comme l'hypothèse (1) assure $\overline{xy} \leqslant \bar{x}\bar{y}$, le caractère multiplicatif de la fermeture est établi.

COROLLAIRE 1. — *Une fermeture définie sur un groupoïde ordonné abélien* G *est multiplicative si et seulement si*, $\forall x, y \in \mathrm{G}$, *on a*

$$\bar{x}y \leqslant \overline{xy} \leqslant \bar{x}\bar{y}.$$

COROLLAIRE 2. — *Une fermeture définie sur un demi-lattis* L *est multiplicative si et seulement si*, $\forall x, y \in \mathrm{L}$, *on a*

$$\bar{x} \wedge y \leqslant \overline{x \wedge y}.$$

Démonstration. — L'opération $\wedge$ étant commutative, le corollaire précédent est applicable. Comme elle est également idempotente, la relation $\overline{x \wedge y} \leqslant \bar{x} \wedge \bar{y}$ est assurée pour toute fermeture.

Caractérisons maintenant les fermetures multiplicatives par l'ensemble de leurs *éléments invariants* (ou fermés), entendant par là les éléments x tels que $\bar{x} = x$, ou, ce qui revient au même, les éléments x pour lesquels il existe un y tel que $\bar{y} = x$. Observons au préalable que, pour toute fermeture φ, le sous-ensemble F_φ des éléments φ-invariants d'un ensemble partiellement ordonné E jouit de la propriété suivante : $\forall x \in E$, l'ensemble $Y_x = \{f \in F_\varphi, f \geqslant x\}$ a toujours un plus petit élément qui est évidemment $x\varphi$. Réciproquement, tout sous-ensemble F de E tel que, $\forall x \in E$, $Y_x = \{f \in F, f \geqslant x\}$ ait un plus petit élément m_x, détermine une fermeture φ donnée par $x\varphi = m_x$. Un sous-ensemble de E jouissant de la même propriété que F sera appelé *sous-ensemble relativement* $\wedge$*-complet*.

THÉORÈME 2. — *Dans tout groupoïde ordonné* G, *la fermeture* φ *définie par le sous-groupoïde* S *relativement* $\wedge$*-complet est multiplicative si et seulement si, pour tous* $x, y \in G$ *et tout* $z \in S$ *tels que* $xy \leqslant z$, *il existe* $x_1, y_1 \in S$ *tels que* $x_1 \geqslant x$, $y_1 \geqslant y$ *et* $x_1 y_1 \leqslant z$.

Démonstration. — La condition est nécessaire : si φ est multiplicative, les éléments $x\varphi = \bar{x}$ et $y\varphi = \bar{y}$ satisfont aux conditions imposées puisque $\bar{x} \geqslant x$, $\bar{y} \geqslant y$ et $\bar{x}\bar{y} = \overline{xy} \leqslant \bar{z} = z$.

Elle est suffisante. En effet, l'application de l'hypothèse à l'inégalité $xy \leqslant \overline{xy}$ assure l'existence d'éléments $x_1, y_1 \in S$ tels que $x_1 \geqslant x$, $y_1 \geqslant y$ et $x_1 y_1 \leqslant \overline{xy}$.

Comme $x_1 \geqslant x$ entraîne $(x_1 =) \bar{x}_1 \geqslant \bar{x}$ et que, de même, $y_1 \geqslant \bar{y}$, il s'ensuit $\bar{x}\bar{y} \leqslant \overline{xy}$.

Il reste à montrer que $\overline{xy} \leqslant \bar{x}\bar{y}$. C'est immédiat puisque

$$xy \leqslant \bar{x}\bar{y} \Rightarrow \overline{xy} \leqslant \overline{\bar{x}\bar{y}} = \bar{x}\bar{y},$$

l'égalité trouvant sa justification dans le fait que S est un sous-groupoïde.

Si l'on a affaire à un $\wedge$-demi-lattis, tout sous-ensemble relativement $\wedge$-complet est fermé pour l'infimum et, quelle que soit la fermeture φ, F_φ est un sous-demi-lattis relativement $\wedge$-complet. On obtient alors le résultat que voici.

THÉORÈME 3. — *Dans tout demi-lattis* L, *la fermeture* φ *définie par le sous-demi-lattis* S *relativement* $\wedge$*-complet est multiplicative si et seulement si elle satisfait à la condition*

(A) *pour tous* $x, y \in L$ *et tout* $z \in S$ *tels que* $x \wedge y \leqslant z$, *il existe* $x_1 \in S$ *tel que* $x_1 \geqslant x$ *et* $x_1 \wedge y \leqslant z$.

Démonstration. — La condition est nécessaire : l'élément $\bar{x}$ satisfait aux conditions imposées car $\bar{x} \geqslant x$ et $\bar{x} \wedge y \leqslant \overline{x \wedge y} \leqslant z$.

Elle est aussi suffisante : de l'inégalité $x \wedge y \leqslant \overline{x \wedge y}$, on peut déduire l'existence d'un élément $x_1 \in S$ tel que $x_1 \geqslant x$ et $x_1 \wedge y \leqslant \overline{x \wedge y}$. Comme $x_1 \geqslant x$ entraîne $(x_1 =) \overline{x_1} \geqslant \bar{x}$, il en résulte $\bar{x} \wedge y \leqslant \overline{x \wedge y}$ et φ est multiplicative en vertu du corollaire 2 du théorème 1.

REMARQUE. — Si l'un des éléments du couple (x, y) précède z, la condition (A) est trivialement satisfaite puisque $x \leqslant z \Rightarrow \bar{x} \leqslant z \Rightarrow \bar{x} \wedge y \leqslant z$. La condition suffisante peut donc être affaiblie : on se limitera aux éléments x, y, z tels que $x \nleqslant z$, $y \nleqslant z$ et $x \wedge y \leqslant z$.

Le théorème 3 prend une forme plus alléchante encore lorsque l'on restreint son champ d'application aux demi-lattis distributifs. Rappelons au préalable qu'un $\wedge$*-demi-lattis* L est *distributif* si, pour tous x, y, z tels que $z \geqslant x \wedge y$, il existe x_1 et y_1 vérifiant $x_1 \geqslant x$, $y_1 \geqslant y$ et $x_1 \wedge y_1 = z$.

Théorème 4. — *Dans tout demi-lattis distributif* L, *la fermeture* φ *définie par le sous-demi-lattis* S *relativement* $\wedge$*-complet est multiplicative si et seulement si elle satisfait à la condition*

(B) *pour tous* $x, y \in \mathrm{L}$ *et tout* $z \in \mathrm{S}$ *tels que* $x \wedge y = z$, *il existe* $x_1 \in \mathrm{S}$ *tel que* $x_1 \geqslant x$ *et* $x_1 \wedge y = z$.

Démonstration. — Comme (A) implique (B) dans tout demi-lattis, il suffit de vérifier que, dans un demi-lattis distributif L, (B) entraîne (A). Soient x, y, z tels que $z \in \mathrm{S}$ et $x \wedge y \leqslant z$. L étant distributif, il existe x_0, y_0 tels que $x_0 \geqslant x$, $y_0 \geqslant y$ et $x_0 \wedge y_0 = z$.

Appliquons la condition (B) au terne (x_0, y_0, z) : il existe dans S un élément x_1 tel que $x_1 \geqslant x_0$ et $x_1 \wedge y_0 = z$. Il en résulte immédiatement $x_1 \wedge y \leqslant z$, c.q.f.d.

Corollaire. — *Si* L *est un demi-lattis distributif et* φ *une fermeture multiplicative, tout élément* $\wedge$*-irréductible dans* F_φ *est* $\wedge$*-irréductible dans* L.

Cette proposition évidente fournit une condition qui, vraisemblablement, ne suffit pas à assurer le caractère multiplicatif de φ. Toutefois, nous n'avons pu l'établir.

Les théorèmes 2 à 4 caractérisent également les fermetures multiplicatives normalisées. Il suffit de spécifier que S doit contenir l'élément 0.

Quant au théorème 5 qui clot ce chapitre, s'il ne fournit pas à proprement parler une caractérisation des fermetures multiplicatives, il livre une propriété très intéressante à notre point de vue. Il fait appel à la notion de *sous-ensemble semi-convexe* que nous avons introduite dans [13]. Un sous-ensemble S d'un lattis L est dit semi-convexe s'il contient x et y dès qu'il contient $x \wedge y$ et $x \vee y$.

Théorème 5. — *Dans tout lattis modulaire, le sous-ensemble* F_φ *des invariants d'une fermeture multiplicative* φ *est semi-convexe.*

Démonstration. — Il s'agit d'établir que

$$(x \wedge y \in \mathrm{F}_\varphi \quad \text{et} \quad x \vee y \in \mathrm{F}_\varphi) \Rightarrow (x \in \mathrm{F}_\varphi \text{ et } y \in \mathrm{F}_\varphi).$$

On a : $x \wedge y = \overline{x \wedge y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$ puisque φ est multiplicative.

D'autre part, $x \vee y = \overline{x \vee y} \geqslant \bar{x} \vee \bar{y}$ en vertu de (F_2). Comme $x \vee y \leqslant \bar{x} \vee \bar{y}$ en vertu de (F_1), il vient $x \vee y = \bar{x} \vee \bar{y}$.

Le lattis étant modulaire, les égalités $x \wedge y = \bar{x} \wedge \bar{y}$ et $x \vee y = \bar{x} \vee \bar{y}$ conduisent à $x = \bar{x}$ et $y = \bar{y}$. En effet, l'on a $x \wedge y \leqslant x \wedge \bar{y} \leqslant \bar{x} \wedge \bar{y}$, donc $x \wedge y = x \wedge \bar{y}$. De même, $x \vee y = x \vee \bar{y}$.

Ces deux dernières égalités, jointes à $y \leqslant \bar{y}$, impliquent $y = \bar{y}$. On prouve de la même manière que $x = \bar{x}$.

Corollaire 1. — *Dans un lattis modulaire borné, le sous-ensemble* F_φ *des inva-*

riants d'une fermeture multiplicative normalisée φ contient tous les éléments complémentés.

Corollaire 2. — *Dans un lattis modulaire pseudo-complémenté* L, *le sous-ensemble des pseudo-compléments des éléments de* L *est semi-convexe.*

Corollaire 3. — *Les ouverts réguliers d'un espace topologique forment un sous-ensemble semi-convexe du lattis des ouverts de cet espace.*

Remarque 1. — Dans [13], nous avons établi que les éléments complémentés d'un lattis modulaire borné forment un sous-ensemble semi-convexe. La démonstration, quoique simple, nécessite des calculs assez longs et on pourrait caresser l'espoir d'obtenir cette même propiété en application directe du théorème précédent, c'est-à-dire en définissant sur le lattis une fermeture multiplicative normalisée dont les invariants soient les éléments complémentés. On déchante tout de suite en considérant le lattis L à cinq éléments $0, a, b, c, 1$ tels que $0 < a < c < 1$, $0 < b < c$, a et b non comparables. L est modulaire (et même distributif) et, pour toute fermeture multiplicative normalisée, a et b, quoique non complémentés, sont invariants.

Déception plus amère encore : L prouve que, même dans un lattis distributif, un sous-demi-lattis relativement $\wedge$-complet et semi-convexe ne définit pas nécessairement une fermeture multiplicative.

Remarque 2. — Dans le théorème 5, l'hypothèse de modularité ne peut être remplacée par celle de semi-modularité.

4. sous-ensembles φ-fermés

Quelle que soit la fermeture multiplicative φ du groupoïde ordonné G, les éléments suivants sont nécessairement invariants :

1° $\forall a \in \mathrm{G}$ et $\forall b \in \mathrm{F}_\varphi$, tout élément x_0 maximal de $\mathrm{A} = \{x \in \mathrm{G} : xa \leqslant b\}$.

En effet, $x_0 a \leqslant b \Rightarrow (x_0\varphi)(a\varphi) \leqslant b\varphi = b \Rightarrow (x_0\varphi)a \leqslant b$. Compte tenu du caractère maximal de x_0, on obtient $x_0 = x_0\varphi$.

2° $\forall a \in \mathrm{G}$ et $\forall b \in \mathrm{F}_\varphi$, tout élément maximal de $\mathrm{A}' = \{x \in \mathrm{G} : ax \leqslant b\}$.

Supposons que G ait un élément zéro et que φ soit normalisée. Dans les considérations précentes, faisons $b = 0$. Existe-t-il toujours une fermeture multiplicative normalisée dont les invariants sont exclusivement les éléments du 1° et du 2° (avec $b = 0$) et les produits d'un nombre fini de ces éléments? La réponse est négative, même si la multiplication est associative, commutative et idempotente.

Dans un groupoïde ordonné G avec 0, on appelle *résiduel à gauche de* 0 *par* a (resp. *résiduel à droite de* 0 *par* a) le plus grand élément de $\mathrm{A} = \{x \in \mathrm{G} : xa \leqslant 0\}$ (resp. de $\mathrm{A}' = \{x \in \mathrm{G} : ax \leqslant 0\}$), si un tel élément existe. Si, pour tout élément a de G, les résiduels à gauche et à droite de 0 par a existent, G est dit *pseudo-résidué*. Si, de plus, ces deux résiduels sont égaux, on dit que 0 est *équirésiduel* et le résiduel de 0 par a est noté $0 : a$ ou encore a^*. Nous donnerons la préférence à cette dernière notation, plus concise.

Dans [2], T. S. Blyth a montré que, dans tout demi-groupe G pseudo-résidué avec zéro équirésiduel, l'application $\varphi : x \to x\varphi = 0 : (0 : x) = x^{**}$ de G dans G est une application de fermeture. Nous supposerons que G est *quasi-intègre* (c'est-à-dire que $ab \leqslant a, b$ pour tous $a, b \in G$) et déterminons une condition suffisante pour que cette fermeture soit multiplicative, généralisant ainsi le 5e exemple fourni dans le chapitre 2.

THÉORÈME 6. — *Si* G *est un demi-groupe quasi-intègre, pseudo-résidué avec zéro équirésiduel, l'application* $\varphi : x \to x\varphi = 0 : (0 : x) = x^{**}$ *de* G *dans* G *est une fermeture multiplicative si les invariants sont idempotents.*

Démonstration. — Notons que 0 est nécessairement élément minimum de G puisque G est quasi-intègre.

Montrons au préalable que, $\forall a, b \in G$, $ab = 0 \Rightarrow a^{**}b^{**} = 0$. En effet,

$$\begin{aligned} ab = 0 &\Rightarrow b \leqslant a^* \text{ (par définition du pseudo-résiduel)} \\ &\Rightarrow ba^{**} \leqslant a^*a^{**} = 0 \\ &\Rightarrow a^{**} \leqslant b^* \\ &\Rightarrow a^{**}b^{**} \leqslant b^*b^{**} = 0. \end{aligned}$$

Appliquons deux fois successivement la propriété qui vient d'être établie.

$$\begin{aligned} ab(ab)^* = 0 &\Rightarrow a^{**}b(ab)^* = 0 \\ &\Rightarrow b(ab)^* \leqslant a^{***} = a^* \\ &\Rightarrow b(ab)^*a = 0 \\ &\Rightarrow b^{**}(ab)^*a = 0 \\ &\Rightarrow b^{**}(ab)^* \leqslant a^* \\ &\Rightarrow a^{**}b^{**}(ab)^* = 0 \\ &\Rightarrow a^{**}b^{**} \leqslant (ab)^{**}. \end{aligned}$$

Il reste à établir que $a^{**}b^{**} \geqslant (ab)^{**}$. C'est ici seulement qu'interviennent les hypothèses.

G étant quasi-intègre, $ab \leqslant a$ et $(ab)^{**} \leqslant a^{**}$. De même, $(ab)^{**} \leqslant b^{**}$. Comme $(ab)^{**}$ est un invariant de φ, donc un idempotent, l'isotonie de la multiplication par rapport à la relation d'ordre permet de conclure $(ab)^{**} \leqslant a^{**}b^{**}$ et la démonstration est achevée.

N'abandonnons pas les demi-groupes ordonnés quasi-intègres et rappelons les définitions suivantes.

Un *d-idéal* d'un demi-groupe ordonné G quasi-intègre est un sous-ensemble non vide A de G tel que :

1° $(a_1 \in A$ et $a_2 \in A) \Rightarrow a_1a_2 \in A$;

2° $(a \in A,\ x \in G$ et $x \geqslant a) \Rightarrow x \in A$.

Un d-idéal d'un demi-groupe ordonné G quasi-intègre avec 0 sera dit *maximal* s'il n'est contenu dans aucun d-idéal propre. A condition que le demi-groupe G ait au moins un élément non nilpotent, l'ensemble des d-idéaux de G, ordonné par inclusion, est inductif. En effet, il n'est pas vide puisque, pour tout a non nilpotent, l'ensemble

$$A = \{x \in G : x \geqslant a^n,\ n = 1, 2, 3, \dots\}$$

est un d-idéal propre ; de plus, toute chaîne de d-idéaux est majorée. L'axiome de Zorn assure alors l'existence des d-idéaux maximaux.

Enfin, nous dirons qu'un sous-ensemble S d'un ensemble partiellement ordonné E est fermé pour une fermeture φ (plus simplement *φ-fermé*) si $s \in S \Rightarrow s\varphi \in S$.

THÉORÈME 7. — *Dans une demi-groupe ordonné quasi-intègre G, avec élément zéro, le complémentaire d'un d-idéal maximal A est φ-fermé pour toute quasi-fermeture multiplicative normalisée φ.*

Démonstration. — Soit x un élément quelconque de G n'appartenant pas à A. Considérons le d-idéal B engendré par $A \cup \{x\}$. B inclut évidemment le d-idéal engendré par x, c'est-à-dire

$$\{x_i \in G : x_i \geqslant x^n, \ n = 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Dès lors, si nous notons y_j les éléments de A, tout élément de B suit un élément qui se présente sous la forme d'un produit fini d'éléments x_i et d'éléments y_j.

En vertu du caractère maximal de A, un élément de B est nécessairement égal à zéro. Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'exprime comme suit : $x_1y_1x_2y_2 \ldots x_n$. φ étant multiplicative et normalisée, il en résulte $\bar{x}_1\bar{y}_1\bar{x}_2\bar{y}_2 \ldots \bar{x}_n = 0$.

Comme tous les $\bar{y}_j$ appartiennent à A, il existe au moins un $\bar{x}_i$ n'appartenant pas à A. Notons-le $\bar{x}_{i_0}$.

$$x_{i_0} \geqslant x^p \ (p \text{ entier positif}) \Rightarrow \bar{x}_{i_0} \geqslant \bar{x}^p.$$

Il en résulte $\bar{x}^p \notin A$ et $\bar{x} \notin A$, puisqu'un d-idéal contient toutes les puissances de ses éléments.

COROLLAIRE. — *Dans un lattis distributif avec élément zéro, tout idéal premier-minimal est φ-fermé pour toute quasi-fermeture multiplicative normalisée φ.*

Démonstration. — Pour l'opération $\wedge$, tout lattis L est un demi-groupe ordonné quasi-intègre dont les d-idéaux, définis comme ci-dessus, sont les filtres de L. Dans un lattis distributif, un filtre est maximal si et seulement si son complémentaire est un idéal premier-minimal. Le résultat annoncé est ainsi acquis.

Plaçons-nous cette fois dans un demi-lattis et rappelons deux définitions.

Un demi-lattis borné inférieurement est *semi-complémenté* si, pour tout x distinct de 1 (lorsque ce dernier élément existe), on peut trouver un y distinct de 0 et tel que $x \wedge y = 0$.

Un demi-lattis est *relativement semi-complémenté* lorsque tout intervalle, muni de la relation d'ordre induite, est un demi-lattis semi-complémenté.

THÉORÈME 8. — *Dans tout demi-lattis relativement semi-complémenté, les invariants d'une fermeture multiplicative quelconque forment un filtre.*

Démonstration. — Comme $x, y \in F_\varphi \Rightarrow x \wedge y \in F_\varphi$ dans tout demi-lattis L et quelle que soit la fermeture φ envisagée, il suffit de vérifier que, si L est relativement semi-complémenté et si φ est multiplicative, alors $(a = \bar{a}$ et $x > a) \Rightarrow x = \bar{x}$.

Supposons que l'on ait $\bar{a} < x < \bar{x}$.

Il existerait y tel que (1) $\bar{a} < y < \bar{x}$ et

$$(2) \ x \wedge y = \bar{a}.$$

(1) et (2) impliquent respectivement $\bar{a} < \bar{y} \leqslant \bar{x}$ et $\bar{x} \wedge \bar{y} = \bar{a}$, relations incompatibles.

COROLLAIRE 1. — *Dans tout demi-lattis relativement semi-complémenté avec élément 0, les invariants de toute fermeture multiplicative φ sont les majorants de 0φ. La seule fermeture multiplicative normalisée est l'application identique.*

Corollaire 2. — *Dans un lattis relativement semi-complémenté, toute fermeture multiplicative est additive. Si ce lattis est borné inférieurement, on a* $x\varphi = x \vee 0\varphi$ *pour tout élément* x *de ce lattis.*

La seule explication qu'appelle ce dernier énoncé est la suivante : pour tout $x \in \mathrm{L}$, $x\varphi \geqslant x$ et $x\varphi \geqslant 0\varphi$, d'où $x\varphi \geqslant x \vee 0\varphi$. L'égalité résulte du fait que $x \vee 0\varphi$ est invariant par φ.

Ce corollaire infirme la conjecture de G. Bergmann ([1], p. 171) selon laquelle la classe des lattis avec 0 et dans lesquels tout intervalle $[0, x]$ est complémenté (section complemented lattices), serait la classe la plus grande dans laquelle toutes les fermetures multiplicatives sont de la forme $x\varphi = x \vee 0\varphi$. En effet, on peut aisément construire un lattis qui ne soit pas « section complemented » mais relativement semi-complémenté, les fermetures multiplicatives ayant alors la forme requise. C'est le cas notamment d'un lattis de Boole généralisé, non borné supérieurement et auquel on adjoint un élément maximum. Réciproquement, un lattis « section complemented » n'est pas nécessairement relativement semi-complémenté. La preuve en est fournie par le lattis à six éléments $0, a, b, c, d, 1$ tels que $0 < a < c < 1$, $0 < b < c$, $0 < d < 1$, a et b non comparables, d non comparable à a, b, c. L'intervalle $[b, 1]$ n'est pas complémenté.

La question reste donc ouverte de déterminer la classe la plus étendue de lattis pour lesquels toute fermeture multiplicative φ satisfait à $x\varphi = x \vee 0\varphi$.

Dans un lattis, il n'est pas toujours possible de définir une fermeture dont l'ensemble des invariants soit un filtre donné. Mieux, dans un lattis complet L, un filtre A non principal n'est jamais ensemble des invariants d'une fermeture puisque $\inf_{\mathrm{L}}\mathrm{A}$ existe et ne peut appartenir à A.

Par contre, dans un lattis non $\wedge$-complet, certains filtres non principaux peuvent être ensembles des invariants d'une fermeture multiplicative. C'est notamment le cas de tout filtre complémenté d'un lattis distributif L avec élément 1, ainsi que le montre le théorème suivant.

Théorème 9. — *Dans un lattis distributif* L *avec élément* 1, *à tout filtre complémenté* A *est associée une fermeture multiplicative dont l'ensemble des invariants est* A.

Démonstration. — Ainsi que l'observent C. C. Chen et G. Grätzer dans [3], un filtre complémenté de L est tel que son infimum (dans le lattis $\mathscr{F}(\mathrm{L})$ des filtres de L) avec tout filtre principal est un filtre principal. Dès lors, pour tout filtre complémenté A de L, on peut définir φ comme suit :

$$\forall x \in \mathrm{L},\ x\varphi = \bar{x} = y \Leftrightarrow [y) = \mathrm{A} \wedge [x).$$

Que φ soit une fermeture dont l'ensemble des invariants est A, ne souffre pas le moindre doute. Il reste à établir que φ est multiplicative. C'est tout aussi immédiat si l'on invoque la condition (B) du théorème 4 : $(x \wedge y = z \in \mathrm{A}) \Rightarrow (x, y \in \mathrm{A})$!

5. Les ensembles $\Phi(\mathrm{E})$, $\Phi_m(\mathrm{E})$ et $\Phi_m^0(\mathrm{E})$

Nous désignerons par $\Phi(\mathrm{E})$, $\Phi_m(\mathrm{E})$ et $\Phi_m^0(\mathrm{E})$ respectivement l'ensemble des fermetures, des fermetures multiplicatives et des fermetures multiplicatives normalisées qu'il est possible de définir sur E, ensemble partiellement ordonné que l'on munira d'une multiplication isotone par rapport à la relation d'ordre et que l'on supposera posséder un zéro.

Si l'on ordonne $\Phi(E)$ en définissant la relation

$$\varphi_1 \leqslant \varphi_2 \text{ si et seulement si } x\varphi_1 \leqslant x\varphi_2, \ \forall x \in E,$$

$\Phi(E)$ devient un ensemble partiellement ordonné dont l'élément minimum est l'application identique $\alpha : x\alpha = x$, $\forall x \in E$.

Il est clair que l'on a $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$ si et seulement si $F_{\varphi_2} \subseteq F_{\varphi_1}$.

Si E possède un élément maximum 1, $\Phi(E)$ jouit de la même propriété : le maximum ω de $\Phi(E)$ est donné par $x\omega = 1$, $\forall x \in E$.

Si E est un $\wedge$-demi-lattis, $\Phi(E)$ est aussi un $\wedge$-demi-lattis, dans lequel $x(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = x\varphi_1 \wedge x\varphi_2$. Il en résulte $F_{\varphi_1} \cup F_{\varphi_2} \subseteq F_{\varphi_1 \wedge \varphi_2}$.

Si E est un $\vee$-demi-lattis et même un lattis, le supremum de deux fermetures peut faire défaut. Toutefois, si E est un lattis complet, $\Phi(E)$ est un lattis complet dans lequel $\bigvee_{i \in I} \varphi_i$ est défini par

$$x(\bigvee_{i \in I} \varphi_i) = x \text{ si et seulement si } x\varphi_i = x, \ \forall i \in I,$$

ce qui équivaut à

$$F_{\vee \varphi_i} = \bigcap_{i \in I} F_{\varphi_i}.$$

La position des fermetures multiplicatives dans $\Phi(E)$ est précisée par la proposition suivante.

THÉORÈME 10. — *Si* L *est un* $\wedge$*-demi-lattis,* $\Phi_m(L)$ *est un* $\wedge$*-sous-demi-lattis de* $\Phi(L)$.

Si L *est un lattis complet,* $\Phi_m(L)$ *est un* $\wedge$*-sous-demi-lattis mais non généralement un* $\vee$*-sous-demi-lattis de* $\Phi(L)$.

Démonstration. — Soient φ_1 et φ_2 deux fermetures multiplicatives définies sur le $\wedge$-demi-lattis L. Montrons que

$$(x \wedge y)(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = x(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge y(\varphi_1 \wedge \varphi_2).$$

Le second membre s'écrit

$$\begin{aligned} x\varphi_1 \wedge x\varphi_2 \wedge y\varphi_1 \wedge y\varphi_2 &= (x \wedge y)\varphi_1 \wedge (x \wedge y)\varphi_2 \\ &= (x \wedge y)(\varphi_1 \wedge \varphi_2). \end{aligned}$$

Le supremum dans $\Phi(L)$ de deux fermetures multiplicatives d'un lattis complet L n'est pas nécessairement une fermeture multiplicative, quand bien même L serait distributif, ainsi qu'en témoigne l'exemple suivant. Soit L le produit cardinal de la chaîne $\{x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\}$ (isomorphe à la chaîne des entiers non négatifs) et de la chaîne $\{0 < y_0\}$, complété par l'élément maximum 1. Pour alléger les notations, nous désignerons par x_i les éléments $(x_i, 0)$ et par y_i les éléments (x_i, y_0) $(i = 0, 1, 2, \ldots)$. x_0 est donc l'élément 0 du lattis L.

Les fermetures φ_1 et φ_2 définies par

$$1\varphi_1 = 1, \quad x_i\varphi_1 = \begin{cases} x_i & \text{si } i \text{ est pair} \\ x_{i+1} & \text{si } i \text{ est impair} \end{cases} \qquad (i = 0, 1, \ldots)$$

$$y_i\varphi_1 = \begin{cases} y_i & \text{si } i \text{ est pair} \\ y_{i+1} & \text{si } i \text{ est impair} \end{cases} \qquad (i = 0, 1, \ldots)$$

$$0\varphi_2 = 0,\ 1\varphi_2 = 1,\ y_0\varphi_2 = y_0,\ x_i\varphi_2 = \begin{cases} x_i \text{ si } i \text{ est impair} \\ x_{i+1} \text{ si } i \text{ est pair} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

$$y_i\varphi_2 = \begin{cases} y_i \text{ si } i \text{ est impair} \\ y_{i+1} \text{ si } i \text{ est pair} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

sont multiplicatives et leur supremum ne l'est point puisque $F_{\varphi_1 \vee \varphi_2} = \{0, y_0, 1\}$.

Dans [10], R. E. Johnson a établi que $\Phi_m(L)$ est un sous-lattis de $\Phi(L)$ lorsque L est complet et satisfait à la condition :

pour tout $y \in L$ et toute chaîne $\{x_i\} \subseteq L$, $y \wedge (\bigvee_i x_i) = \bigvee_i (y \wedge x_i)$.

Cette condition n'est évidemment pas satisfaite par notre exemple. Nous montrerons bientôt qu'elle n'est pas nécessaire pour que $\Phi_m(L)$ soit sous-lattis de $\Phi(L)$.

Enfin, il est immédiat que, si L est un lattis complet, $\Phi_m^0(L)$ est un sous-lattis de $\Phi_m(L)$.

En tant qu'applications d'un ensemble en lui-même, les quasi-fermetures et fermetures peuvent être composées. La composition sera notée par simple juxtaposition des lettres. On vérifie aisément que, pour la composition, les quasi-fermetures d'un ensemble partiellement ordonné E forment un demi-groupe ordonné, la relation d'ordre étant celle qui a été définie en début de chapitre. De plus, les quasi-fermetures multiplicatives d'un groupoïde ordonné forment un sous-demi-groupe du demi-groupe des quasi-fermetures.

D'aussi séduisantes propriétés ne peuvent être énoncées des fermetures car, en général, le produit de deux fermetures n'est pas une fermeture, l'axiome (F_3) étant alors en défaut. Les fermetures sont les éléments idempotents du demi-groupe des quasi-fermetures. De plus si deux fermetures commutent toujours, alors $\Phi(E)$ devient un demi-groupe.

Nous allons fournir un exemple d'ensemble ordonné dont les fermetures forment un demi-groupe. Rappelons d'abord qu'un demi-lattis L avec 0 est dit *faiblement complémenté* lorsque, pour tous $a, b \in L$ $(a < b)$, il existe c tel que $a \wedge c = 0$ et $b \wedge c \neq 0$.

THÉORÈME 11. — *Si* L *est un demi-lattis faiblement complémenté, toute quasi-fermeture multiplicative est une fermeture multiplicative.*

Démonstration. — Supposons qu'il existe dans L un élément a tel que $\bar{a} = a\varphi < a\varphi^2 = \bar{\bar{a}}$, φ étant une quasi-fermeture multiplicative. Il existerait b tel que $b \wedge \bar{a} = 0$ et $b \wedge \bar{\bar{a}} > 0$.

De $b \wedge \bar{a} = 0$, on déduit $\bar{b} \wedge \bar{\bar{a}} = \bar{0}$ et $b \wedge \bar{\bar{a}} \leqslant \bar{0}$.

En résumé, l'on a

$$0 < b \wedge \bar{\bar{a}} \leqslant \bar{0} \leqslant \bar{a},$$

une impossibilité puisque

$$b \wedge \bar{\bar{a}} \wedge \bar{a} = 0.$$

COROLLAIRE 1. — *Les fermetures multiplicatives d'un demi-lattis faiblement complémenté forment un demi-groupe ordonné.*

COROLLAIRE 2. — *Si* L *est un lattis faiblement complémenté complet,* $\Phi_m(L)$ *est un sous-lattis de* $\Phi(L)$ *et, pour la composition des applications, un demi-groupe abélien.*

Démonstration. — On sait que deux fermetures φ_1 et φ_2 commutent si et seulement si $\varphi_1\varphi_2$ et $\varphi_2\varphi_1$ sont tous deux des fermetures. Cela nous permet d'affirmer que deux fermetures multiplicatives de L commutent. De plus, si deux fermetures φ_1 et φ_2 commutent, $\varphi_1\varphi_2 = \varphi_1 \vee \varphi_2$ (*).

Nous sommes ainsi en mesure de montrer, comme nous l'avons annoncé, que la condition utilisée par R. E. Johnson n'est pas toujours satisfaite lorsque $\Phi_m(L)$ est sous-lattis de $\Phi(L)$. Il suffit de produire un lattis faiblement complémenté ne répondant pas à cette condition. Adjoignons à un lattis de Boole L complet et sans atomes (par exemple, le lattis des ouverts réguliers de l'intervalle [0, 1] de la droite réelle) un élément x tel que $0 < x < 1$ et x non comparable à tout élément de L distinct de 0 et 1. Le lattis ainsi obtenu est faiblement complémenté et la condition de Johnson est mise en défaut par x et une chaîne infinie adéquatement extraite de L.

Quand $\Phi_m(E)$ s'identifie-t-il à $\Phi(E)$? Dans le cas d'un demi-lattis avec élément 1, le problème se résout aisément.

THÉORÈME 12. — *Pour que toute fermeture définie sur un demi-lattis* L *avec élément* 1 *soit multiplicative, il faut et il suffit que* L *soit une chaîne.*

Démonstration. — La condition est trivialement suffisante. Supposons maintenant que toute fermeture de L soit multiplicative sans que L soit totalement ordonné. Il existerait dans L deux éléments non comparables a et b. Définissons l'application φ de L dans L par :

$$x\varphi = a \wedge b \text{ si } x \leqslant a \wedge b,$$
$$x\varphi = 1 \text{ si } x \nleqslant a \wedge b.$$

On vérifie sans peine que φ est une fermeture. De plus, elle n'est pas multiplicative car $(a \wedge b)\varphi < a\varphi \wedge b\varphi = 1$.

Remarquons que la présence de l'élément 1 est requise. En effet, l'ensemble $\{a, b, c\}$ tel que $a > c$, $b > c$, a et b non comparables, est un demi-lattis non totalement ordonné dans lequel toute fermeture est multiplicative.

Quand, au contraire, $\Phi_m(E)$ ne comprend-il que les fermetures triviales? Cela nous amène à dire quelques mots des liens existant entre les fermetures multiplicatives et les congruences.

Notons d'abord que toute fermeture multiplicative φ d'un groupoïde ordonné G détermine une congruence C_φ définie comme suit :

$$a \equiv b \pmod{C_\varphi} \text{ si et seulement si } a\varphi = b\varphi.$$

Il s'agit bien d'une congruence, c'est-à-dire d'une équivalence

1° régulière pour la multiplication du groupoïde :

$a \equiv b \pmod{C_\varphi} \Rightarrow ax \equiv bx \pmod{C_\varphi}$, $\forall x \in G$ car $a\varphi = b\varphi \Rightarrow a\varphi x\varphi = b\varphi x\varphi$, d'où $(ax)\varphi = (bx)\varphi$. La multiplication à gauche par x se traite de manière analogue.

2° régulière pour la relation d'ordre :

toute classe a évidemment un élément maximum invariant. Avec des notations qui n'appellent aucun commentaire, G/C_φ peut être ordonné de manière que $a \not\equiv b \pmod{C_\varphi}$ et $a < b$ dans G entraînent $A < B$ dans G/C_φ. Il suffit de prendre $A < B$ si et seulement si $\bar{a} < \bar{b}$.

(*) Pour plus de détails, le lecteur consultera utilement [10].

La propriété subsiste évidemment dans un $\wedge$-demi-lattis et, chose remarquable, s'étend même aux lattis (voir [1]). Il en résulte notamment que tout groupoïde ordonné ($\wedge$-demi-lattis ou lattis) simple, c'est-à-dire n'admettant aucune congruence non triviale, ne tolère comme fermetures multiplicatives que l'application identique et l'application $x\varphi = 1, \forall x$, si la structure algébrique est nantie d'un élément maximum 1 (*).

A l'opposé, on ne peut faire correspondre à toute congruence de lattis une fermeture multiplicative que si toutes les classes de cette congruence ont un maximum (ce qui a lieu notamment si la condition de chaîne ascendante est satisfaite) (voir lemme 2, [1]). Cette bijection entre fermetures multiplicatives d'un lattis et congruences à classes maximées ne subsiste pas pour les demi-lattis, ainsi que des exemples simples le prouvent. De même, il est inexact qu'un lattis dans lequel toute fermeture multiplicative est triviale, est un lattis simple.

RÉFÉRENCES

[1] G. BERGMANN, Multiplicative closures. *Portugaliae Math.*, vol. 11, fasc. 4, 1952, 169-172.

[2] T. S. BLYTH, Pseudo-residuals in semigroups. *Journal London Math. Soc.*, 40 (1965), 441-454.

[3] C. C. CHEN et G. GRÄTZER, Stone lattices. I. Construction Theorems. A paraître.

[4] R. CIGNOLI, Boolean Multiplicative Closures. *Proc. Japan Acad.*, 42, 1966, 1168-1174.

[5] M. L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR et R. CROISOT, Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques. Paris, Gauthier-Villars, 1953.

[6] L. FUCHS, Partially ordered algebraic systems. Pergamon Press, 1963.

[7] P. R. HALMOS, Algebraic Logic. Chelsea Publishing Company, 1962.

[8] M. F. JANOWITZ, Quantifiers and orthomodular lattices. *Pacific Journal Math.*, vol. 13, n° 4, 1963, 1241-1249.

[9] M. F. JANOWITZ, Quantifier theory on quasi-orthomodular lattices. *Illinois J. Math.*, vol. 9, n° 4, 660-676.

[10] R. E. JOHNSON, Structure theory of faithful rings. I. Closure operations on lattices. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 84, 1957, 508-522.

[11] J. MORGADO, Some results on closure operators of partially ordered sets. *Portugaliae Math.*, vol. 19, fasc. 1-2, 1960, 101-139.

[12] Y. SAMPEI, On lattice completions and closure operations. *Comm. Math. Univ. St Paul*, vol. 2, 1953, 55-70.

[13] J. VARLET, Contribution à l'étude des treillis pseudo-complémentés et des treillis de Stone. *Mémoires Soc. Roy. Sc. Liège*, t. 8, fasc. 4, 1963.

(*) Cette dernière observation permet de préciser la remarque énoncée à la suite du théorème 8, corollaire 2. Parmi les lattis L avec 0 dans lequels, $\forall\varphi \in \Phi_m$, F_φ est un filtre principal (ce qui équivaut à : $\forall x \in L$, $\forall \varphi \in \Phi_m$, $x\varphi = x \vee 0\varphi$), nous avons déjà rencontré les lattis dans lesquels tout intervalle $[0, a]$ est complémenté et les lattis relativement semi-complémentés. Une troisième classe, distincte des deux précédentes, peut y être adjointe : la classe des lattis simples. Le dénominateur commun convenable serait-il dès lors la notion de « complémentation très faible » introduite par G. Grätzer et E. T. Schmidt (cf. Ideals and congruence relations in lattices, *Acta Math. Acad. Sc. Hung.*, 9 (1958), p. 152) : $\forall a, b$ $(a \neq b$; $a, b \in L)$, $\exists\, c \neq 0$: a, b est faiblement projectif dans c, 0, condition équivalente à : l'idéal $\{0\}$ est le noyau de la congruence identique uniquement.