Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 38e année, nº 3-4, 1969, pp. 116-124

NOTE SUR LE « WREATH PRODUCT » DE DEUX DEMI-GROUPES

par R. MOORS, Dr. Sc.
Assistant à l'Université de Liège (*)

SUMMARY

Let us call W and W_1 the wreath product and the restricted wreath product of two semi-groups respectively. The paper gives among others necessary and sufficient conditions under which either $W = W_1$, W is commutative or W_1 is commutative.

INTRODUCTION

On trouve dans [II], une étude des « wreath products » W et W_1 de deux demi-groupes A et B. Hunter y donne notamment des conditions suffisantes d'appartenance à Z(W) et $Z(W_1)$. Notre étude trouve son origine dans une recherche de conditions nécessaires et suffisantes d'appartenance à Z(W) et $Z(W_1)$ (§ 3).

D'autre part, il est trivial que

$$(\text{B fini ou } A = \{1\}) \text{ entraîne } W = W_1.$$

Nous avons montré que, chose étonnante, la condition est également nécessaire (2.3).

On trouvera aussi dans notre note les conditions dans lesquelles $A^{(B)} \times B = W_1$, $A^{(B)} \times B = W$, $W = Z(W)$, $W_1 = Z(W_1)$.

1. *Définition du* W-*produit*

1.1. *Notations*.

A et B désigneront des demi-groupes. Le centre d'un demi-groupe A sera noté Z(A). Nous noterons 0 et 1 les neutre et zéro bilatères éventuels des demi-groupes que nous considérerons.

Si a appartient à A, $\bar{a}$ sera l'application $B \to A$ définie par $\bar{a}(x) = a$. (Nous voulons dire $(\forall x)\,(x \in B \Rightarrow \bar{a}(x) = a)$; lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, nous conviendrons de sous-entendre le quantificateur universel lorsqu'il se rapporte aux lettres $x, y, z, u, v, \varphi, \psi$).

Si f est une application $B \to A$ ($f \in A^B$), si b appartient à B, nous noterons ${}^bf$ l'application $B \to A$ définie par $({}^bf)(x) = f(xb)$.

Si A possède un neutre, pour toute application $f : B \to A$, nous poserons $\delta(f) = \{b \in B \mid f(b) \neq 1\}$. Toujours dans le cas où A possède un neutre, $A^{(B)}$ sera l'ensemble des applications $f : B \to A$ pour lesquelles $\delta(f)$ est fini.

(*) Service du Professeur L. Nollet, Institut de Mathématique, 15, Av. des Tilleuls, Liège.

Présenté par L. Nollet, le 20 mars 1969.

Nous appellerons « équivalence E_b associée à l'élément b de B » l'équivalence sur B définie par $xE_by \Leftrightarrow xb = yb$.

1.2. W-*produit*.

On appellera W-produit W de A par B l'ensemble $A^B \times B$ muni de la multiplication suivante : $(\varphi, x)(\psi, y) = (\varphi \,.\, {}^x\psi, xy)$ où $(\varphi \,.\, {}^x\psi)(z) = \varphi(z) \,.\, {}^x\psi(z)$.

On constate que W est un demi-groupe [II].

Si A possède un neutre, nous appellerons W-produit restreint de A par B le sous-demi-groupe W_1 de W engendré par $A^{(B)} \times B$.

Dans la suite, nous supposerons implicitement que A possède un neutre chaque fois que nous considérerons W_1.

2. *Étude de* W_1

2.1. *Remarque*.

Si (f, b) *appartient à* W_1, f *ne prend qu'un nombre fini de valeurs*.

Démonstration.

Puisque $A^{(B)} \times B$ engendre W_1, il existe une famille finie (f_i, b_i) $(i = 1, \ldots, n)$ d'éléments de $A^{(B)} \times B$ tels que

$$(f, b) = (f_1, b_1) \ldots (f_n, b_n).$$

On a $f(x) = f_1(x)f_2(xb_1) \ldots f_n(xb_1 \ldots b_{n-1})$.

Chacune des applications f_i ne prend qu'un nombre fini de valeurs ; il en est de même pour les applications ${}^{b_1}f_2, \ldots, {}^{b_1 \ldots b_{n-1}}f_n$. En effet, si $i = 2, \ldots, n$, les valeurs de ${}^{b_1 \ldots b_{i-1}}f_i$ sont parmi celles de f_i. Finalement, f ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

2.2. *Lemme*.

Soient les éléments $a \neq 1$ *de* A *et* b *de* B, $(\tilde{a}, b)$ *appartient à* W_1 *si et seulement s'il existe des éléments* c *et* d *de* B *tels que* $cd = b$ *et que* Bc *soit fini*.

Démonstration.

A. *Condition suffisante*.

Supposons que B contienne des éléments c et d tels que $b = cd$ et que Bc soit fini. Définissons comme suit une application $g : B \to A$:

$$\begin{cases} g(x) = a \text{ si } x \in Bc, \\ g(x) = 1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Puisque Bc est fini, g appartient à $A^{(B)}$. $(\bar{1}, c)$ et (g, d) appartiennent à $A^{(B)} \times B$, donc $(\bar{1}, c)\,(g, d) = ({}^cg, cd) = (\tilde{a}, b)$ appartient à W_1.

B. *Condition nécessaire*.

Supposons que $(\tilde{a}, b)$ appartienne à W_1. Il existe des éléments $b_1, \ldots, b_n$ de B et des applications $f_1, \ldots, f_n$ de $A^{(B)}$ tels que

$(\tilde{a}, b) = (f_1, b_1) \ldots (f_n, b_n)$. On a

$b = b_1 \ldots b_n$ et

$a = f_1(x)f_2(xb_1) \ldots f_n(xb_1 \ldots b_{n-1})$.

Posons $c = b_1 \ldots b_{n-1}$; supposons que Bc est infini. L'équivalence E_c possède alors une infinité de classes. Appelons C_1 une partie infinie de B contenant au plus un élément par classe de E_c.

Puisque $\delta(f_n)$ est fini, on peut trouver une partie infinie C_2 de C_1 pour tout élément y de laquelle, $yc = yb_1 \ldots b_{n-1} \notin \delta(f_n)$. Si y_1 et y_2 appartiennent à C_2, $y_1b_1 \ldots b_{n-2} \neq y_2b_1 \ldots b_{n-2}$. Puisque $\delta(f_{n-1})$ est fini, on peut trouver une partie infinie C_3 de C_2 pour tout élément y de laquelle $yb_1 \ldots b_{n-2} \notin \delta(f_{n-1})$. En persévérant, on trouve un élément z (et même une infinité d'éléments) de B tel que

$$zb_1 \ldots b_{n-1} \notin \delta(f_n),\ zb_1 \ldots b_{n-2} \notin \delta(f_{n-1}),\ \ldots,\ z \notin \delta(f_1).$$

On a $a = f_1(z)f_2(zb_1) \ldots f(zb_1 \ldots b_{n-1}) = 1$. C'est impossible. Ainsi Bc est fini, on a $b = cb_n$, d'où le lemme.

2.3. *Théorème.*

$W = W_1$ *si et seulement si se présente l'une des éventualités suivantes* :

1) B *est fini.*

2) A *est réduit à son neutre.*

Démonstration.

Si l'une des conditions est vérifiée, on a $A^{(B)} = A^B$, d'où $W = W_1$.

Nous allons démontrer par l'absurde la condition nécessaire. Supposons donc $W = W_1$, B infini et A non réduit à son neutre. Appelons a_1 et a_2 deux éléments distincts de A.

Montrons que, si b appartient à B, Bb est fini. $(\bar{a}_1, b)$ appartient à W, donc à W_1. Il existe alors des éléments c et d de B tels que $cd = b$ et que Bc soit fini (2.2). On en déduit que $Bcd = Bb$ est fini.

Si B_1 est une partie de B, définissons comme suit une application $f : B \to A$:

$$\begin{cases} f(x) = a_1 \text{ si } x \in B_1, \\ f(x) = a_2 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Soit b un élément de B. (f, b) appartient à W, donc à W_1. Ainsi, il existe des éléments $b_1, \ldots, b_n$ de B et des applications $f_1, \ldots, f_n$ de $A^{(B)}$ tels que

$(f, b) = (f_1, b_1) \ldots (f_n, b_n)$. On a

$b = b_1 \ldots b_n$ et

$$f(x) = f_1(x)f_2(xb_1) \ldots f_n(xb_1 \ldots b_{n-1}). \tag{1}$$

Bb_1 est fini, donc l'équivalence E_{b_1} possède un nombre fini de classes $A_1, \ldots, A_m$. Montrons que ces classes ont une intersection infinie avec au plus l'un des ensembles B_1 ou $B \setminus B_1$. Supposons que A_1, par exemple, a une intersection infinie avec, par exemple, B_1. f_1 ne diffère de $\bar{1}$ que pour un nombre fini d'éléments de B, il existe donc un élément c de $A_1 \cap B_1$ tel que $f_1(c) = 1$. On a alors, en vertu de (1),

$$a_1 = f_2(cb_1) \ldots f_n(cb_1 \ldots b_{n-1}).$$

Si on suppose que A_1 a une intersection infinie avec $B \setminus B_1$, on démontre de façon similaire qu'il existe un élément d de A_1 tel que

$$a_2 = f_2(db_1) \ldots f_n(db_1 \ldots b_{n-1}).$$

Or, sur A_1, l'expression $f_2(xb_1) \ldots f_n(xb_1 \ldots b_{n-1})$ est constante ; ainsi $a_1 = a_2$, ce qui est contradictoire avec les hypothèses faites.

Les classes de E_{b_1} peuvent donc être réparties en trois ensembles disjoints deux à deux : L'ensemble X des classes finies, l'ensemble Y des classes dont l'intersection avec B_1 est infinie, l'ensemble Z des classes dont l'intersection avec $B \setminus B_1$ est infinie.

Pour tout $i = 1, \ldots, m$, posons
$F_i = A_i \cap B_1$ lorsque $A_i \in X \cup Z$,
$F_i = A_i \cap (B \setminus B_1)$ lorsque $A_i \in Y$.

Les ensembles F_i appartiennent à l'ensemble $\mathscr{F}(B)$ des parties finies de B. On a

$$B_1 = \cup \{F_i \mid A_i \in X \cup Z\} \cup (\cup \{A_i \setminus F_i \mid A_i \in Y\}).$$

Résumons-nous : Toute partie B_1 de B peut s'obtenir comme suit : On considère un élément (convenable) b_1 de B. E_{b_1} possède un nombre fini de classes $A_1, \ldots, A_m$. On détermine (convenablement) des parties finies $F_1, \ldots, F_m$ de B. On appelle Y une partie (convenable) de B / E_{b_1}. On a alors

$$B_1 = \cup \{F_i \mid A_i \notin Y\} \cup (\cup \{A_i \setminus F_i \mid A_i \in Y\}).$$

Si nous montrons que le paragraphe précédent est absurde, c'est-à-dire qu'il est impossible d'obtenir de cette façon toutes les parties B_1 de B, la démonstration de 2.3 sera terminée.

A partir d'un élément fixé b de B ($m = m_b$ sera le nombre de classes de E_b ou le nombre d'éléments de Bb), le procédé ci-dessus permet d'obtenir un ensemble $\mathscr{B}_b$ de parties de B tel que

$$\operatorname{card}(\mathscr{B}_b) \leqslant \operatorname{card}((\mathscr{F}(B))^m \times 2^m) \quad (\text{I, § 3, n° 2, prop. 3, p. 41}).$$

Puisque $\operatorname{card}(\mathscr{F}(B)) = \operatorname{card}(B)$ (I, § 6, n° 4, prop. 5, p. 74) et que $\operatorname{card}(B) > 2$, on a

$$\operatorname{card}((\mathscr{F}(B))^m \times 2^m) = \operatorname{card}(B) \quad (\text{I, § 6, n° 3, coroll. 2, p. 72}).$$

Ainsi $\operatorname{card}(\mathscr{B}_b) \leqslant \operatorname{card}(B)$.

Si on suppose $\mathscr{P}(B) = \cup \{\mathscr{B}_b \mid b \in B\}$, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{card}(\mathscr{P}(B)) &\leqslant \sum_{b \in B} \operatorname{card}(\mathscr{B}_b) \quad && (\text{I, § 3, n° 3, coroll., p. 42}) \\ &\leqslant \operatorname{card}(B) && (\text{I, § 6, n° 3, coroll. 3, p. 72}) \end{aligned}$$

Ceci est impossible (I, § 3, n° 6, th. 2, p. 47).

2.4. *Théorème.*

$A^{(B)} \times B = W_1$ *si et seulement si l'on se trouve dans l'une des situations suivantes :*

1) A *est réduit à son neutre.*

2) *Quels que soient les éléments* b *et* c *de* B, *la division* $xc = b$ *possède au plus un nombre fini de solutions.*

Démonstration.

A. *Condition nécessaire.*

Supposons que A contienne un élément $a \neq 1$; montrons que, si b et c appartiennent à B, l'équation $xb = c$ possède au plus un nombre fini de solutions. Définissons comme suit une application $f : B \to A$.

$$\begin{cases} f(x) = a \text{ si } x = b, \\ f(x) = 1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

$(\bar{1}, c)$ et (f, c) appartiennent à $A^{(B)} \times B$, il en est donc de même pour leur produit $({}^c f, c^2)$. L'application ${}^c f$ appartient à $A^{(B)}$. En $x \in B$, ${}^c f$ vaut $f(xc)$; cette valeur ne peut être différente de 1 que pour un nombre fini de x dans B. Ainsi l'équation $xc = b$ possède au plus un nombre fini de solutions.

B. *Condition suffisante.*

Il est clair que $A^{(B)} \times B = W_1$ lorsque A est réduit à son neutre. Il reste à montrer que si on suppose la condition 2) réalisée, un élément quelconque (f, b) de W_1 appartient à $A^{(B)} \times B$. Il existe des éléments $b_1, \ldots, b_n$ de B et des applications $f_1, \ldots, f_n$ de $A^{(B)}$ tels que $(f, b) = (f_1, b_1) \ldots (f_n, b_n)$. On a

$$f(x) = f_1(x)\, f_2(xb_1) \ldots f_n(xb_1 \ldots b_{n-1}).$$

Pour tout i, f_i ne diffère de $\bar{1}$ que pour un nombre fini d'éléments $c_1^i, \ldots, c_{n_i}^i$ de B. Pour que $f(x)$ soit différent de 1, il faut que x vérifie l'une des équations

$$c_{j_1}^1 = x,\ c_{j_2}^2 = xb_1, \ldots, c_{j_n}^n = xb_1 \ldots b_{n-1}.$$

Ces équations en nombre fini possèdent chacune au plus un nombre fini de solutions. Ainsi f diffère de $\bar{1}$, pour au plus un nombre fini d'éléments de B. On a $f \in A^{(B)}$, d'où $(f, b) \in A^{(B)} \times B$.

2.5. *Remarque.*

La condition 2) de 2.4 est vérifiée si B est fini ou encore si, dans B, on peut simplifier à droite.

2.6. *Théorème.*

$A^{(B)} \times B = W$ si et seulement si se présente l'une des éventualités suivantes :

1) B est fini.

2) A est réduit à son neutre.

Démonstration.

Si $A^{(B)} \times B = W$, on a $W_1 = W$, donc 1) ou 2), par 2.3.

Si 1) ou 2) est vérifié, par 2.4, on a $A^{(B)} \times B = W_1$ et, par 2.3, $W_1 = W$. Ainsi $A^{(B)} \times B = W$.

3. *Étude des centres de* W *et* W_1

3.1. *Lemme.*

Un demi-groupe A *possède un zéro si et seulement s'il contient des éléments a et b tels que*

$$ua = bv \quad (\forall u, v \in A).$$

Démonstration.

Pour voir que la condition est nécessaire, il suffit de poser $a = b = 0$.

Supposons la condition vérifiée et montrons que ba est un zéro. On a

$$u(ba) = (ub)a = ba$$

et

$$(ba)u = b(au) = ba.$$

3.2. *Théorème.*

L'élément (f, b) *de* W *appartient à* Z(W) *si et seulement si les trois conditions suivantes sont réalisées :*

1) $b \in Z(B)$.

2) *Si* b *n'est pas neutre,* A *possède un zéro,* $f(x)u = 0$ *et* $x \in B^2 \Rightarrow uf(x) = 0$.

3) *Si* b *est neutre,* $f(x) \in Z(A)$ *et* $uf(x) = uf(b)$.

Démonstration.

I. *Condition nécessaire.*

Soit l'élément (f, b) de Z(W). On a $(f, b)(\varphi, x) = (\varphi, x)(f, b)$.

D'une part $bx = xb$, d'où $b \in Z(B)$. D'autre part, $f(y)\varphi(yb) = \varphi(y)f(yx)$. (1)

Si a appartient à A et c à B, il existe une application $g \in A^B$ telle que $g(cb) = g(c) = a$. On a alors $f(c)a = a\,f(cx)$, par (1). D'où $f(y)u = u\,f(yx)$ (2).

a) Si b n'est pas neutre, il n'est pas neutre à droite ($b \in Z(B)$) et B contient un élément c tel que $cb \neq c$. Si a_1 et a_2 sont des éléments de A, A^B contient une application g telle que $g(cb) = a_1$ et $g(c) = a_2$; on a alors, par (1),

$$f(c)a_1 = a_2 f(cx).$$

Ainsi $f(c)u = vf(cx)$. D'où, par 3.1, A possède un zéro et $f(c)u = vf(cx) = 0$. Si d appartient à B, on a successivement

$$\begin{aligned} 0 = uf(cb) &= uf(bc) && (b \in Z(B)) \\ &= f(b)u && (\text{par } (2)) \\ &= uf(bd) && (\text{par } (2)) \\ &= uf(db) && (b \in Z(B)) \\ &= f(d)u && (\text{par } (2)) \end{aligned}$$

Ainsi $f(x)u = 0$.

Si on suppose que l'élément d de B peut s'écrire $d = d_1d_2$, on a

$$uf(d) = uf(d_1d_2) = f(d_1)u = 0.$$

Ce qui achève la démonstration de la condition 2).

b) Si b est neutre, (2) donne

$$f(y)u = uf(yb) = uf(y). \text{ Donc } f(y) \in Z(A).$$

D'autre part $uf(x) = uf(xb) = uf(bx) = f(b)u = uf(b)$.

II. *Condition suffisante.*

Supposons que l'élément (f, b) de W vérifie les conditions de l'énoncé. Il faut montrer que $(f, b)(\varphi, x) = (\varphi, x)(f, b)$, ce qui équivaut à

$$bx = xb \text{ et } f(y)\varphi(yb) = \varphi(y)f(yx).$$

La première égalité est acquise car $b \in Z(B)$.

a) Si b n'est pas neutre, $f(y)\varphi(yb) = 0$ et $\varphi(y)f(yx) = 0$, d'où l'égalité cherchée.

b) Si b est neutre,

$$f(y)\varphi(yb) = f(y)\varphi(y) = \varphi(y)f(y) = \varphi(y)f(b) = \varphi(y)f(yx).$$

3.3. *Corollaires.*

1) Si Z(W) n'est pas vide, alors Z(A) et Z(B) ne sont pas vides.

2) Si Z(W) contient un élément (f, b) tel que b ne soit pas neutre, alors A possède un zéro.

3.4. *Théorème.*

Dans 3.2, *on peut substituer* W_1 *à* W.

La démonstration de 3.2 s'adapte en effet sans difficulté.

3.5. *Théorème.*

$$Z(W) \cap W_1 = Z(W_1).$$

Démonstration.

Tout d'abord $Z(W) \cap W_1 \subset Z(W_1)$. D'autre part, si (f, b) appartient à $Z(W_1)$, c'est un élément de W_1 qui, par 3.4, vérifie les conditions de 3.2 et appartient donc à Z(W).

3.6. *Théorème.*

Supposons que A contienne un neutre à droite ρ.

L'élément (f, b) *de* W *appartient à* Z(W) *si et seulement si les quatre conditions suivantes sont vérifiées* :

1) $b \in Z(B)$.

2) $\exists\, a \in A,\ f = \bar{a}$.

3) Si b n'est pas neutre, a est un zéro de A.

4) Si b est neutre, $a \in Z(A)$.

Démonstration.

Les conditions de 3.6 sont suffisantes car elles entraînent celles de 3.2. Moyennant l'existence de ρ, les conditions de 3.2 entraînent celles de 3.6, ces dernières sont donc nécessaires.

3.7. *Théorème.*

L'élément (f, b) *de* W *appartient à* $Z(W_1)$ *si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées* :

1) $b \in Z(B)$.

2) $\exists\, a \in A,\ f = \bar{a}$.

3) $a \neq 1 \Rightarrow \exists\, c, d \in B,\ b = cd$ et Bc fini.

4) Si b n'est pas neutre, a est un zéro de A.

5) Si b est neutre, $a \in Z(A)$.

Démonstration.

I. *Condition nécessaire.*

Supposons que (f, b) appartienne à $Z(W_1)$. Par 3.6, les conditions 1, 2, 4 et 5 sont acquises. Si a est différent de 1, la condition 3 résulte de 2.2.

II. *Condition suffisante.*

Supposons que l'élément (f, b) de W vérifie les conditions de l'énoncé. Par 3.6, on a $(f, b) \in Z(W)$. Par 2.2, on a $(f, b) \in W_1$. Ainsi, par 3.5, $(f, b) \in Z(W_1)$.

3.8. *Théorème.*

W *est commutatif si et seulement si l'on est dans l'une des situations suivantes :*

1) B *n'est pas réduit à un élément, il est commutatif,* A *possède un zéro et, dans* A, $uv = 0$.

2) B *est réduit à un élément,* A *est commutatif.*

Démonstration.

Condition nécessaire.

Supposons que W soit commutatif.

a) Soit l'élément b de B. Si f appartient à A^B, (f, b) appartient à W, donc à Z(W) et b appartient à Z(B), en vertu de 3.2. Ainsi B est commutatif.

b) Soient l'élément b de B et les éléments a et a' de A. Considérons des applications f et g de A^B telles que $f(b) = f(bb) = a$ et $g(b) = g(bb) = a'$.

De $(f, b)(g, b) = (g, b)(f, b)$, on tire $f(x)g(xb) = g(x)f(xb)$. D'où $aa' = a'a$, en posant $x = b$.

c) Supposons que B n'est pas réduit à un élément. B contient alors des éléments $b \neq 1$ et c tels que $c \neq bc$ $(= cb)$. Soient les éléments a_1, a_2, a_3, a_4 de A et les applications f et g de A^B telles que $f(c) = a_1$, $f(bc) = a_2$, $g(c) = a_3$, $g(cb) = a_4$. De $(f, b)(g, c) = (g, c)(f, b)$, on tire $f(x)g(xb) = g(x)f(xc)$. D'où, en posant $x = c$, $a_1a_4 = a_3a_2$. Le produit de deux éléments de A est donc constant ; c'est un zéro de A.

Condition suffisante.

Supposons réalisée l'une des conditions de 3.8. Soient les éléments (f, b) et (g, c) de W.

1) Si B est réduit à un élément d, on a

$$f(x)g(xb) = f(d)g(d) = g(d)f(d) = g(x)f(xc).$$

Ainsi $(f, b)(g, c) = (g, c)(f, b)$.

2) Si b n'est pas réduit à un élément, on a $bc = cb$ et

$$f(x)g(xb) = 0 = g(x)f(xc).$$

Ainsi $(f, b)(g, c) = (g, c)(f, b)$.

3.9. *Théorème.*

W_1 *est commutatif si et seulement si l'on est dans l'une des situations suivantes :*

1) B *n'est pas réduit à un élément, il est commutatif et* A *est réduit à son neutre.*

2) B *est réduit à un élément,* A *est commutatif.*

Démonstration.

Si l'une des conditions est réalisée, par 3.8, on a $W = Z(W)$. D'où $W_1 = Z(W_1)$, par 3.5.

Supposons à présent W_1 commutatif.

a) Soit l'élément b de B, $(\bar{1}, b)$ appartient à W_1, donc à $Z(W_1)$. Ainsi, par 3.7, $b \in Z(B)$ et B est commutatif.

b) Supposons que B ne soit pas réduit à un élément ; soient les éléments b de B et a de A. Définissons comme suit une application $B \to A$:

$$f(b) = a, \; f(x) = 1 \text{ si } x \neq b.$$

(f, b) appartient à W_1, donc à $Z(W_1)$ et, par 3.7, f est constant ; on a alors $a = 1$.

c) Supposons que B soit réduit à un élément b ; b est neutre. Si a est un élément de A, $(\bar{a}, b)$ appartient à W_1, donc à $Z(W_1)$ et, par 3.7, $a \in Z(A)$. Ainsi A est commutatif.

RÉFÉRENCES

[I] N. Bourbaki, Théorie des ensembles, Chapitre 3. *Act. Sc. et Ind.*, 1243.

[II] R. P. Hunter, Some Results on wreath Products of semigroups. *Bull. Soc. Math. Belgique*, t. XVIII, 1966, pp. 3 à 16.