Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 38e année, nº 3-4, 1969, pp. 96-100

SUR UN THÉORÈME DE LYAPOUNOV

par MARC DE WILDE (*)

SUMMARY

We give a simple proof of the theorem of Lyapounov on the range of a vector valued measure. This proof is purely measure-theoretic and avoids any use of the Krein-Milman theorem. It is inspired by that of Kingman and Robertson ([2]).

1. — Soient $\mu_1, \ldots, \mu_n$ des mesures définies dans un ouvert Ω de E_p.

Nous dirons que la fonction f est $\vec{\mu}$-mesurable (resp. intégrable) si elle est μ_1-, ..., μ_n-mesurable (resp. intégrable). Dans ce dernier cas, nous noterons $\int f\, d\vec{\mu}$ le vecteur $(\int f\, d\mu_1, \ldots, \int f\, d\mu_n)$.

Le théorème de Lyapounov s'énonce comme suit.

a) *Si* $\mu_1, \ldots, \mu_n$ *sont des mesures diffuses et si e est* $\vec{\mu}$*-intégrable, l'ensemble*

$$K = \{\vec{\mu}(e') : e' \ \vec{\mu}\text{-intégrable},\ e' \subset e\}$$

est compact et convexe dans $\mathbb{C}_n$.

Les démonstrations connues de ce théorème sont généralement longues et compliquées et s'appuyent sur la théorie des ensembles convexes dans l'espace euclidien (cf. par exemple [1] ou [3]). La démonstration de Kingman et Robertson ([2]) est particulièrement courte et élégante, mais elle s'appuie de manière essentielle sur l'analyse fonctionnelle.

Nous donnons ici une démonstration élémentaire qui repose sur le même principe que celle de [2] mais qui n'utilise que la théorie de la mesure et de l'intégration.

Nous allons établir la proposition équivalente suivante.

b) *Si* $\mu_1, \ldots, \mu_n$ *sont des mesures diffuses et si e est* $\vec{\mu}$*-intégrable, on a*

$$\{\vec{\mu}(e') : e' \ \vec{\mu}\text{-intégrable},\ e' \subset e\}$$

$$= \{ \int_e f\, d\vec{\mu} : f \ \vec{\mu}\text{-mesurable} \ ;\ f(x) \in [0, 1]\ \vec{\mu}\text{-}pp\}.$$

Vérifions l'équivalence de a) et b).

Si a) est vrai, on note que

$$K = \{ \int_e \varphi\, d\vec{\mu} : \varphi \in \Phi\},$$

(*) Présenté par H. G. Garnir, le 20 mars 1969.
Institut de Mathématique, 15, avenue des Tilleuls, Liège.

où Φ est l'ensemble des fonctions étagées sur les ensembles $\vec{\mu}$-mesurables $e' \subset e$, comprises entre 0 et 1 $\vec{\mu}$-*pp*. En effet, une fonction $\varphi \in \Phi$ s'écrit

$$\varphi = \sum_{i=1}^{q} \theta_i \delta_{e_i}, \; 0 < \theta_1 < \ldots < \theta_q \leqslant 1,$$

d'où, si les e_i sont deux à deux disjoints,

$$\varphi = \theta_1 \delta_{\bigcup\limits_{i=1}^{q} e_i} + (\theta_2 - \theta_1)\delta_{\bigcup\limits_{i=2}^{q} e_i} + \ldots + (\theta_q - \theta_{q-1})\delta_{e_q},$$

où on peut supposer $\theta_q = 1$, quitte à ajouter $1\delta_\Phi$ dans la somme qui définit φ. De là,

$$\int \varphi \, d\vec{\mu} = \theta_1 \vec{\mu} \, (\bigcup_{i=1}^{q} e_i) + \ldots + (\theta_q - \theta_{q-1})\vec{\mu}(e_q) \in \mathrm{K}$$

puisque K est convexe.

Or

$$\{ \int_e \varphi \, d\vec{\mu} : \varphi \in \Phi \}$$

est dense dans

$$\{ \int_e f \, d\vec{\mu} : f \; \vec{\mu}\text{-mesurable} \; ; \; f(x) \in [0, 1] \; \vec{\mu}\text{-}pp \}$$

d'où, comme il est fermé, il est égal à cet ensemble.

Inversement, il est immédiat que a) découle de b).

2. — Soient μ une mesure définie dans un ouvert Ω de E_p et e un ensemble μ-intégrable. Nous désignons par μ-$\mathrm{L}_1(e)$ [resp. μ-$\mathrm{L}_\infty(e)$] l'ensemble des fonctions définies μ-*pp* dans e qui y sont μ-intégrables [resp. μ-mesurables et bornées μ-*pp*].

Une suite f_m converge faiblement vers f dans μ-$\mathrm{L}_1(e)$ si, pour tout $\varphi \in \mu$-$\mathrm{L}_\infty(e)$,

$$\int_e \varphi \, f_m \, d\mu \rightarrow \int_e \varphi \, f \, d\mu.$$

Avant d'aborder la démonstration, établissons un lemme. C'est un corollaire d'un critère de compacité faible dans μ-$\mathrm{L}_1(e)$ ou encore du fait que la boule unité de μ-$\mathrm{L}_\infty(e)$ est simplement extractable. Pour rendre l'exposé autonome, nous en donnons toutefois une démonstration élémentaire.

Lemme. — *Soient μ une mesure et e un ensemble μ-intégrable.*

De toute suite f_m de fonctions μ-mesurables, réelles et comprises entre 0 *et* 1 *μ-pp, on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement dans μ-$\mathrm{L}_1(e)$ vers une fonction de même type.*

En particulier, l'ensemble des fonctions μ-mesurables, réelles et comprises entre 0 *et* 1 *μ-pp est faiblement fermé dans μ-$\mathrm{L}_1(e)$.*

On sait que μ-$\mathrm{L}_1(e)$ est séparable : soit $\{\varphi_i : i = 1, 2, \ldots\}$ un ensemble dénombrable dense dans μ-$\mathrm{L}_1(e)$. Pour tout i, la suite

$$\int_e \varphi_i \, f_m \, d\mu, \; m = 1, 2, \ldots,$$

est bornée. On détermine une sous-suite $f_{m'}$ de f_m telle que $\int_e \varphi_1 f_{m'}\, d\mu$ converge ; une sous-suite $f_{m''}$ de celle-ci telle que $\int_e \varphi_2 f_{m''}\, d\mu$ converge et ainsi de suite. La suite f_{m_k} formée en prenant le premier élément de la suite $f_{m'}$, le second de la suite $f_{m''}$, ... est telle que

$$\int_e \varphi_i f_{m_k}\, d\mu$$

converge quand $k \to \infty$, quel que soit i.

Or, quel que soit $\varphi \in \mu\text{-L}_1(e)$, on a

$$\left| \int_e \varphi(f_{m_r} - f_{m_s}) d\mu \right| \leqslant 2 \int_e |\varphi - \varphi_i| \, dV\mu + \left| \int_e \varphi_i (f_{m_r} - f_{m_s}) d\mu \right|,$$

pour tout i. Pour $\varepsilon > 0$ arbitraire, on peut alors choisir i pour que le premier terme du second membre soit majoré par $\varepsilon/2$. Pour cet i, le second terme est majoré par $\varepsilon/2$ pour r, s assez grands.

Donc la suite f_{m_k} est faiblement de Cauchy dans $\mu\text{-L}_1(e)$. Cet espace étant faiblement complet, elle converge donc faiblement vers $f \in \mu\text{-L}_1(e)$.

On voit sans difficulté que f est réel et compris entre 0 et 1 μ-*pp*.

3. — Démontrons à présent le théorème b).

On peut sans restriction supposer les mesures μ_i positives.

En effet, si ce n'est pas le cas, on les décompose en combinaison linéaire de mesures positives et on travaille avec les $4n$ mesures ainsi obtenues.

Posons

$$\mu_0 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i.$$

Par le théorème de Radon-Nikodym, pour tout i, il existe J_i μ_0-mesurable et compris entre 0 et 1 μ_0-*pp*, tel que

$$\mu_i = \int J_i \, d\mu_0.$$

Déterminons une suite d'ensembles μ_0-mesurables $e^{(m)} \subset e$ de la manière suivante.

Notons d'abord que, comme μ_0 est une mesure diffuse, on peut partitionner tout ensemble μ_0-intégrable en un nombre fini d'ensembles de μ_0-mesure arbitrairement petite.

On partitionne alors e en un nombre fini d'ensembles non μ_0-négligeables e_{n_1} de μ_0-mesure inférieure à 1. Chaque e_{n_1} est à son tour partitionné en un nombre fini d'ensembles e_{n_1, n_2} non μ_0-négligeables et de μ_0-mesure inférieure à $1/2$ et ainsi de suite. On renumérote les ensembles $e_{n_1, \dots, n_k}$ ainsi obtenus par un seul indice m, dans l'ordre où ils se présentent dans la construction :

$$m(n_1, \dots, n_k) \leqslant m(n'_1, \dots, n'_{k'})$$

si et seulement si $k \leqslant k'$ et le premier n'_i différent du n_i correspondant est plus grand que ce dernier. Appelons $e^{(m)}$ les ensembles ainsi numérotés.

Soit f_0 μ_0-mesurable et tel que $f_0(x) \in [0, 1]$ μ_0-pp.

Appelons $\mathscr{E}_0$ l'ensemble des f μ_0-mesurables, tels que $f(x) \in [0, 1]$ μ_0-pp et que

$$\int_e f \, d\mu_i = \int_e f_0 \, d\mu_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Pour $m \geqslant 1$, définissons les $\mathscr{E}_m$ de proche en proche par la relation

$$\mathscr{E}_m = \{f \in \mathscr{E}_{m-1} : \int_{e^{(m)}} f \, d\mu_0 = \sup_{f \in \mathscr{E}_{m-1}} \int_{e^{(m)}} f \, d\mu_0\}.$$

Ils sont visiblement faiblement fermés dans μ_0-$L_1(e)$. On démontre de proche en proche qu'ils ne sont pas vides. Pour $\mathscr{E}_0$, c'est trivial.

De plus, si $\mathscr{E}_{m-1}$ n'est pas vide, il existe une suite $f_k \in \mathscr{E}_{m-1}$ telle que

$$\int_{e_m} f_k \, d\mu_0 \to \sup_{f \in \mathscr{E}_{m-1}} \int_{e^{(m)}} f \, d\mu_0.$$

En vertu du lemme, on peut en extraire une sous-suite $f_{k'}$ qui converge faiblement dans μ_0-L_1. Soit f sa limite. Elle appartient à $\mathscr{E}_{m-1}$ et

$$\int_{e_m} f \, d\mu_0 = \sup_{f \in \mathscr{E}_{m-1}} \int_{e_m} f \, d\mu_0,$$

donc $\mathscr{E}_m$ n'est pas vide.

Cela étant, soit $f_m \in \mathscr{E}_m$ pour tout m. Une nouvelle application du lemme montre qu'une sous-suite $f_{m'}$ de f_m converge faiblement dans μ_0-L_1. Soit f sa limite. On a cette fois $f \in \mathscr{E}_m$ pour tout m, c'est-à-dire

$$\int_e f \, d\mu_i = \int_e f_0 \, d\mu_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

et

$$\int_{e_m} f \, d\mu_0 = \sup_{f \in \mathscr{E}_{m-1}} \int_{e_m} f \, d\mu_0, \quad \forall m \geqslant 1.$$

On va établir que f est égal μ_0-pp à 0 ou 1. Ce sera donc la fonction caractéristique d'un ensemble μ_0-mesurable $e' \subset e$ et la proposition sera ainsi établie.

S'il n'en est pas ainsi, il existe $\varepsilon \in]0, 1/2[$ et $e_0 \subset e$ non μ_0-négligeable et tel que $f(x) \in]\varepsilon, 1 - \varepsilon[$ pour tout $x \in e_0$.

Parmi les $e^{(m)}$, on sélectionne $n + 2$ ensembles de la manière suivante.

On note d'abord que, si $e_0 \cap e_{n_1, \ldots, n_k}$ n'est pas μ_0-négligeable, il existe $i > k$, $n_{k+1}, \ldots, n_{k+i}$, ν et $\nu' \neq \nu$ tels que $e_0 \cap e_{n_1, \ldots, n_i, \nu}$ et $e_0 \cap e_{n_1, \ldots, n_i, \nu'}$ ne soient pas μ_0-négligeables. De fait, si ce n'était pas le cas, $e_0 \cap e_{n_1, \ldots, n_k}$ serait égal μ_0-pp à un ensemble de μ_0-mesure arbitrairement petite, donc il serait μ_0-négligeable.

On détermine alors successivement des ensembles

$$e_{n_1, \ldots, n_{k_1}, n_{k_1}+1}, \quad e_{n_1, \ldots, n_{k_1}, n'_{k_1}+1}, \quad n_{k_1}+1 > n'_{k_1}+1,$$

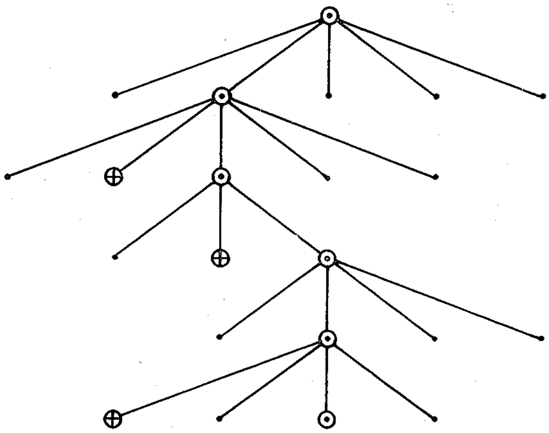
$$e_{n_1, \ldots, n_{k_2}, n_{k_2}+1}, \quad e_{n_1, \ldots, n_{k_2}, n'_{k_2}+1}, \quad n_{k_2}+1 > n'_{k_2}+1, \quad k_2 > k_1,$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots,$$

dont l'intersection avec e_0 n'est pas μ_0-négligeable et on retient les $n + 2$ premiers qui se présentent dans la colonne de droite, qu'on appelle $e^{(m_1)}, \ldots, e^{(m_{n+2})}$.

Le schéma ci-dessous indique le mécanisme de sélection des $e^{(m_i)}$.

Les · représentent les ensembles qui apparaissent dans les partitions successives, ceux qui sont entourés d'un cercle ont leur intersection avec e_0 non μ_0-négligeable. Parmi ceux-ci, les $\oplus$ sont les $e^{(m_i)}$ retenus.



Il existe $\theta_1, \ldots, \theta_{n+2}$ réels et non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^{n+2} \theta_i \, \mu_j(e_0 \cap e^{(m_i)}) = 0, \; j = 0, \ldots, n.$$

On peut même supposer que le premier θ_i non nul, que nous notons θ_{i_0}, soit positif et que $|\theta_i| \leqslant \varepsilon$ pour tout i. Posons

$$f' = f + \sum_{i=i_0}^{n+2} \theta_i \, \delta_{e_0 \cap e^{(m_i)}}.$$

Il est trivial que $f' \in \mathscr{E}_0$. De même, on voit de proche en proche qu'il appartient à $\mathscr{E}_m$ pour tout $m < m_{i_0}$, puisque les $e^{(m)}$ correspondants contiennent tous les $e^{(m_{i_0})}, \ldots, e^{(m_{n+2})}$ ou n'en recontrent aucun. Enfin, on a

$$\int_{e^{(m_{i_0})}} f' \, d\mu_0 = \int_{e^{(m_{i_0})}} f \, d\mu_0 + \theta_{i_0} \, \mu_0(e_0 \cap e^{(m_{i_0})})$$

$$> \sup_{f \in \mathscr{E}_{m_{k_0}-1}} \int_{e^{(m_{i_0})}} f \, d\mu_0,$$

ce qui est absurde.

Donc f est bien du type $\delta_{e'}$, $e' \subset e$.

Nous remercions Monsieur le Professeur H. G. Garnir et Monsieur J. Schmets qui ont discuté ce travail avec nous.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. R. Halmos, The range of a vector measure, *Bull. Am. Math. Soc.*, **54**, (1948), 416-421.

[2] J. F. C. Kingman et A. P. Robertson, On a theorem of Lyapounov, *J. London Math. Soc.*, **43**, 1968, pp. 347-351.

[3] J. Schmets, Sur une généralisation d'un théorème de Lyapounov, *Bull. Soc. Royale Sc. de Liège*, **35**, 1966, pp. 185-194.