Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, Vol. 1, n° 1, 1932, p. 7 - 9

Sur des transcendantes relatives au développement en séries de Fourier de fonctions périodiques de la solution de l'équation de Gauss,

par R.-H.-J. GERMAY,
Professeur à l'Université de Liége

§ 1. — La solution u de l'équation de Gauss

$$u = \zeta + \operatorname{arc\,sin}(\varepsilon \sin^4 u) \tag{1}$$

a pour développement en série

$$u = \zeta + \frac{\varepsilon}{1!} \sin \zeta + \frac{\varepsilon^2}{2!} \cdot \frac{d}{d\zeta}[\sin^8 \zeta] + \cdots \text{[1]}. \tag{2}$$

Cette formule montre que u augmente de 2π quand sa valeur initiale ζ augmente elle-même de 2π. La convergence de la série (2) n'est pas altérée par la variation du paramètre ζ, car celle-ci est sans effet sur la valeur du terme général de la série majorante de la série (2) [2].

Les fonctions $\cos hu$, $\sin hu$, où h est un nombre entier positif, sont des fonctions périodiques, de période 2π, du paramètre ζ. Elles sont développables en séries de Fourier. La fonction u définie par l'équation (1) n'est ni paire, ni impaire par rapport au paramètre ζ.

Par conséquent, les développements de $\cos hu$ et $\sin hu$ sont de la forme

$$\left.\begin{aligned}\cos hu &= \alpha_0^{(h)} + \{\alpha_1^{(h)}\cos\zeta + \beta_1^{(h)}\sin\zeta\} + \cdots + \{\alpha_k^{(h)}\cos k\zeta + \beta_k^{(h)}\sin k\zeta\} + \cdots \\ \sin hu &= \gamma_0^{(h)} + \{\gamma_1^{(h)}\cos\zeta + \delta_1^{(h)}\sin\zeta\} + \cdots + \{\gamma_k^{(h)}\cos k\zeta + \delta_k^{(h)}\sin k\zeta\} + \cdots\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

§ 2. — Les valeurs de u qui correspondent à $\zeta = 0$, $\zeta = 2\pi$ sont 0 et 2π.

Nous avons d'abord

$$2\pi\alpha_0^{(h)} = \int_0^{2\pi} \cos hu\, d\zeta. \tag{4}$$

---

(1) Sur une extension de la formule de Lagrange et son application à la résolution de l'équation de Gauss (*Bull. de l'Acad. roy. de Belg.*, Cl. des Sc., 5e série, t. XV, n° 3, p. 186).

(2) Sur l'équation de Gauss (*idem*, n° 10, pp. 809 et 810).

Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, Vol. 1, n° 1, 1932, p. 7 - 9

En transformant l'intégrale (4) en une intégrale en u, il vient

$$\pi\alpha_0^{(h)} = 2\varepsilon \int_0^{2\pi} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^8 u}}\right] \cos hu \sin^3 u \cos u du. \qquad (5)$$

Nous mentionnons cette formule pour mémoire, les transcendantes annoncées intervenant dans les coefficients $\alpha_k^{(h)}$, $\beta_k^{(h)}$, où $k > 0$.

La formule d'intégration par parties donne

$$\left.\begin{aligned} \pi\alpha_k^{(h)} &= \int_0^{2\pi} \cos hu \cos k\zeta d\zeta \\ &= \left[\frac{1}{k} \cos hu \sin k\zeta\right]_{\zeta=0}^{\zeta=2\pi} + \frac{h}{k}\int_0^{2\pi} \sin hu \sin k\zeta \cdot \frac{du}{d\zeta} \cdot d\zeta. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Le terme intégré est nul. En prenant u comme variable d'intégration, il vient

$$\pi\alpha_k^{(h)} = \frac{h}{k}\int_0^{2\pi} \sin hu \sin k\zeta du. \qquad (7)$$

Remplaçons le produit des deux sinus par la demi-différence de deux cosinus; tenons compte de la valeur de ζ fournie par l'équation (1) elle-même et observons enfin que le cosinus est une fonction paire; nous obtenons

$$\alpha_k^{(h)} = \frac{h}{k}\left[\Phi_{k-h}(k, \varepsilon) - \Phi_{k+h}(k, \varepsilon)\right], \qquad (8)$$

moyennant l'abréviation

$$\Phi_s(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\left[s\theta - x \arcsin(y \sin^4 \theta)\right] d\theta. \qquad (9)$$

On trouve de même

$$\beta_k^{(h)} = \frac{h}{k}\ \Psi_{k-h}(k, \varepsilon) - \Psi_{k+h}(k, \varepsilon)], \qquad (10)$$

moyennant l'abréviation

$$\Psi_s(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin\left[s\theta - x \arcsin(y \sin^4 \theta)\right] d\theta. \qquad (11)$$

Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, Vol. 1, n° 1, 1932, p. 7 - 9

§ 3. — Des considérations analogues montrent que $\gamma_0^{(h)}$ est donné par la formule

$$\pi\gamma_0^{(h)} = 2\varepsilon \int_0^{2\pi} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^8 u}}\right] \sin hu \sin^3 u \cos u\, du, \quad (12)$$

que nous mentionnons pour mémoire, et elles fournissent pour les coefficients

$$\gamma_k^{(h)}, \quad \delta_k^{(h)}, \quad (k > 0),$$

les expressions

$$\gamma_k^{(h)} = -\frac{h}{k}\left[\Psi_{k-h}(k, \varepsilon) + \Psi_{k+h}(k, \varepsilon)\right], \quad (13)$$

$$\delta_k^{(h)} = \frac{h}{k}\left[\Phi_{k-h}(k, \varepsilon) + \Phi_{k+h}(k, \varepsilon)\right]. \quad (14)$$

§ 4. — En résumé, *les coefficients de Fourier des développements en séries trigonométriques des fonctions cos* hu *et sin* hu, *où* h *représente un nombre entier positif et* u *la solution de l'équation de Gauss, sont donnés, pour* k > 0, *par les formules* (8), (10), (13), (14), *où* Φ (x. y), Ψ (x, y) *désignent les transcendantes définies par les égalités* (9) et (11).

Liége, le 21 janvier 1932.