Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 51e année, 1-2, 1982, pp. 31-41

SUR LES ONDES DE SURFACE ANALYTIQUES DE NATURE NON DIFFRACTIVE

par P. LOUSBERG

SUMMARY

In [5], J. Sjöstrand has developed a general theory of the propagation of analytic singularities in boundary value problems. In the present paper, we use this theory to investigate problems which give rise to a propagation in the boundary of non diffractive type. More precisely, we prove the existence of a supersonic boundary wave in the oblique derivative problem and also of the Rayleigh wave in the study of the propagation of elastic waves in an isotropic medium.

I. — INTRODUCTION

Soit $\Omega = \mathbb{R} \times \omega$ un ouvert de l'espace-temps $\mathbb{R}^{n+1}$ de frontière $\dot{\Omega}$ analytique. Nous notons les points de $\mathbb{R}^{n+1}$ par

$$X = (t, x) = (t, x', x_n) = (X', x_n), t \in \mathbb{R}, x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n \in \mathbb{R}.$$

Dans Ω, on considère un problème aux limites [3], posé pour l'opérateur de dérivation $P(X, D_X)$ à coefficients analytiques dans $\mathbb{R}^{n+1}$, d'ordre m, lorsqu'on impose sur $\dot{\Omega}$ des conditions aux limites représentées par l'opérateur $B(X, D_X)$ à coefficients analytiques dans $\dot{\Omega}$ et d'ordre inférieur à m. On suppose en outre que $\dot{\Omega}$ est non caractéristique pour P.

Afin d'étudier le comportement des singularités de la distribution $\vec{\mathcal{C}}$ solution de ce problème au voisinage de $(Y_0, H_0) \in T^*(\dot{\Omega})$, on introduit un système de coordonnées aplanissantes $X = (X', x_n) \in U' \times]-T, T[$ tel que $x_n > 0$ sur Ω et $x_n = 0$ sur $\dot{\Omega}$ dans un voisinage de Y_0. Dans les applications, ce système sera celui des coordonnées aplanissantes standard introduit dans [2].

Dans les coordonnées X, le problème aux limites se transforme en

$$(\mathrm{I.1}) \begin{cases} \vec{\mathcal{C}} . P^*(X, D_X)\vec{\varphi} = \displaystyle\int \vec{f}(X) . \vec{\varphi}(X) dX, \forall \vec{\varphi} \in D(U' \times]0, T[), \vec{f} \in A(U' \times]-T, T[), \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} D^k_{x_n} \vec{\mathcal{C}}_{x_n} \mid_{x_n=0} . B^*_k(X', D_{X'})\vec{\varphi}' = \int \vec{g}(X') . \vec{\varphi}'(X') dX', \forall \vec{\varphi}' \in D(U'), \vec{g} \in A(U'), \end{cases}$$

si $\vec{\mathcal{C}}$, $P(X, D_X)$, $B(X', D_X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} B_k(X', D_{X'}) D^k_{x_n}$ représentent l'expression de la

Présenté par H. G. Garnir, le 19 novembre 1981.

distribution $\vec{\mathcal{C}}$ et des opérateurs P, B dans ces coordonnées. Signalons que la première relation et l'hypothèse de frontière non caractéristique assurent que $\vec{\mathcal{C}}$ est à trace dans $U' \times]0, T[$, c'est-à-dire

$$\vec{\mathcal{C}}.\vec{\varphi} = \int \vec{\mathcal{C}}_{x_n}.\vec{\varphi}(X)dx_n,\ \vec{\mathcal{C}}_{x_n} \in C_\infty([0, T[, D^*(U')).$$

Posons

$$WF_{ab}\vec{\mathcal{C}} = \bigcup_{k=0}^{m-1} WF_a\, D^k_{x_n} \vec{\mathcal{C}}_{x_n} |_{x_n=0}$$

et notons

$$WF_a(\vec{\mathcal{C}}\,|_{U' \times]0,T[})$$

le wave front set analytique de la restriction de la distribution $\vec{\mathcal{C}}$ à l'ouvert $U' \times]0, T[$.

Dans cet article, nous considérons les problèmes aux limites de la dérivée oblique et de la tension élastique et nous montrons que ces problèmes donnent lieu à des phénomènes de propagation dans la surface de nature non diffractive.

II. — PROBLÈME DE LA DÉRIVÉE OBLIQUE

1. — Ce problème est posé pour l'opérateur des ondes

$$P(D_X) = aD_t^2 + bD_t + c - \Delta_x,\ a > 0,\ b, c \in \mathbb{R},$$

et est caractérisé par l'opérateur frontière

$$B(x, D_x) = \vec{\nu}(x).D_x + \vec{t}(x).D_x + h(x)$$

où $\vec{\nu}(x)$ désigne la normale unitaire à $\dot{\omega}$ au point x dirigée vers l'intérieur de ω, $\vec{t}(x)$ un champ de vecteurs tangents analytiques de $\dot{\omega}$ et $h(x)$ une fonction de $A(\dot{\omega})$.

Étudions le comportement des singularités au voisinage d'une singularité (Y_0, H_0) hyperbolique pour l'opérateur P, c'est-à-dire telle que $a\eta_{0t}^2 > |\eta_0|^2$. Soit (X'_0, Ξ'_0) la forme locale de (Y_0, H_0) dans les coordonnées aplanissantes standard [2]. On a $\xi_{0t} = \eta_{0t}$ et $|\xi'_0| = |\eta_0|$ de sorte que $a\xi_{ot}^2 > |\xi'_0|^2$.

Les opérateurs P, B se transforment en [2], [3],

$$P(X', D_X) = -(1 + g^2)D_{x_n}^2 + [2(g.D_{x'}) + \Delta_{x'} f]D_{x_n} - \Delta_{x'} + aD_t^2 + bD_t + c,$$

$$B(X', D_X) = \sqrt{1 + g^2}\, D_{x_n} + \left[t'(x') - \frac{g}{\sqrt{1 + g^2}}\right].D_{x'} + h'(x'),\ (*)$$

où f, $g = D_{x'}f$ sont des fonctions analytiques dans U' s'annulant en X'_0, $t'(x')$ représente la forme locale de $\vec{t}(x)$ dans les coordonnées X' et $h' \in A(U')$. On désigne respectivement par $p(X', \Xi)$, $b(X', \Xi)$ les parties principales de ces opérateurs.

2. — Le polynôme $p(X', \Xi', z)$ admet pour (X', Ξ') dans un voisinage V de (X'_0, Ξ'_0) deux racines réelles distinctes,

(*) On pose $g^2 = g.g = |g|^2$.

$$z_j(X', \Xi') = \frac{g\,.\,\xi' - (-1)^j (\operatorname{sign} \xi_t) \sqrt{(a\xi_t^2 - |\,\xi'\,|^2)(1+g^2) - (g\,.\,\xi')^2}}{1+g^2}, j = 1, 2.$$

Soit γ_j la restriction à $(U' \times [0, T[) \times (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$ de la bicaractéristique de $\xi_n - z_j(X', \Xi')$ issue de $(X'_0, 0, \Xi'_0, z_j(X'_0, \Xi'_0))$. On a

$$\gamma_j = \{(X'(s), s, \Xi(s)) : D_s X' = - D_{\Xi'} z_j, D_s \Xi = D_X z_j, s \in [0, S[\},$$

d'où, en particulier,

$$D_s t = - D_{\xi_t} z_j = \frac{(-1)^j a \,|\, \xi_t \,|}{\sqrt{(a\xi_t^2 - |\,\xi'\,|^2)(1+g^2) - (g\,.\,\xi')^2}}.$$

La courbe γ_j est donc montante si $j = 2$ et descendante si $j = 1$.

Posons

$$r(X', \Xi') = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_{z_2}} \frac{b(X', \Xi', z)}{p(X', \Xi', z)} dz$$

où C_{z_2} représente un contour fermé n'entourant que le seul zéro z_2 du dénominateur. Cette expression est appelée Lopatinsky. Par la méthode des résidus, on obtient

$$r(X', \Xi') = - \frac{1}{2\sqrt{1+g^2}} \left(1 - \frac{\sqrt{1+g^2}\, t'(x').\, \xi'}{(\operatorname{sign} \xi_t) \sqrt{(a\xi_t^2 - |\,\xi'\,|^2)(1+g^2) - (g\,.\,\xi')^2}} \right).$$

Le Lopatinsky s'annule dès lors en (X'_0, Ξ'_0) lorsque

$$t'(x'_0).\xi'_0 = (\operatorname{sign} \xi_{0t}) \sqrt{a\xi_{0t}^2 - |\,\xi'_0\,|^2}.$$

Si $r(x'_0, \Xi'_0) \neq 0$, on a le résultat suivant.

Théorème II.1. *Si* $\gamma_1 \cap \mathrm{WF}_a(\mathcal{T} \,|_{U' \times]0,T[}) = \varnothing$, *alors* $(X'_0, \Xi'_0) \notin \mathrm{WF}_{ab}\mathcal{T}$.

Preuve. On vérifie comme dans [5] que le problème aux limites (P, B) est microhyperbolique en (X'_0, Ξ'_0) dans la multidirection $(-H_{\psi_1}(X'_0, 0, \Xi'_0), -H_{\psi_2}(X'_0, 0, \Xi'_0))$ avec $\psi_1 = x_n$ et $\psi_2 = -x_n$.

3. — Envisageons à présent le cas où $r(X_0, \Xi'_0) = 0$. Soit γ_r la courbe intégrale de H_r passant par (X'_0, Ξ'_0); on a

$$\gamma_r = \{(X'(s), \Xi'(s)) : D_s X' = D_{\Xi'} r, D_s \Xi' = - D_{X'} r, s \in]-S', S'[\},$$

avec $D_s t(s) \neq 0$ puisque $D_{\xi_t} r$ a le signe contraire de ξ_t lorsque $r(X', \Xi') = 0$. Posons $\gamma_r^- = \gamma_r \cap \{(X', \Xi') : t < t_0\}$.

Théorème II.2. *Si* $\gamma_r^- \cap \mathrm{WF}_{ab}\mathcal{T} = \varnothing$ *et si* $\gamma_1 \cap \mathrm{WF}_a(\mathcal{T} \,|_{U' \times]0,T[}) = \varnothing$, *alors* $(X'_0, \Xi'_0) \notin \mathrm{WF}_{ab}\mathcal{T}$.

Avant de démontrer ce théorème, opérons une étude préliminaire des conditions de microhyperbolicité.

Lemme II.1. *Soient* $\psi_1(X, \Xi'), \psi_2(X, \Xi')$ *des fonctions analytiques réelles dans un voisinage* $\mathscr{V}$ *de* $(X'_0, 0, \Xi'_0)$ *et telles que* $\psi_1(X', 0, \Xi') = \psi_2(X', 0, \Xi') = \psi(X', \Xi')$. *Si on a*

(i) $H_{z_1}\psi_1 - D_{x_n}\psi_1 < 0$, (*)

(ii) $H_{z_2}\psi_2 - D_{x_n}\psi_2 > 0, \forall(X, \Xi') \in \mathscr{V}$,

(iii) $H_r\psi \neq 0, \forall(X', \Xi') \in \mathscr{V}_0$,

$\mathscr{V}_0$ *désignant la section de* $\mathscr{V}$ *par* $x_n = 0$, *alors*

a) $p(X, \Xi)$ *est microhyperbolique dans la direction* $- H_{\psi_j}$ *en tout point* $(X, \Xi', z_j(X', \Xi'))$ *tel que* $(X, \Xi') \in \mathscr{V}$,

b) *le problème aux limites* (P, B) *est microhyperbolique en tout point* (X', Ξ') *de* $\mathscr{V}_0$ *dans la multidirection* $(-H_{\psi_1}, -H_{\psi_2})$ [5].

Preuve. Soit $(\bar{X}, \bar{\Xi}') \in \mathscr{V}$; posons

$$\chi_j(X', \Xi', s) = (X' - is\, D_{\Xi'}\psi_j(\bar{X}, \bar{\Xi}'), \Xi' + is\, D_{X'}\psi_j(\bar{X}, \bar{\Xi}')).$$

Sous les conditions (i), (ii), il existe un voisinage V de $(\bar{X}', \bar{\Xi}')$ et un nombre $\varepsilon > 0$ tels que

$$\mathrm{Im}\, z_j(\chi_j(X', \Xi', s)) - s D_{x_n}\psi_j(\bar{X}, \bar{\Xi}') \left\{ \lessgtr \right\} 0 \text{ si } j = \begin{Bmatrix}1\\2\end{Bmatrix}, \quad (1)$$

lorsque $(X', \Xi') \in V$ et $s \in]0, \varepsilon]$.

En effet, de

$$z_j(\chi_j(X', \Xi', s)) = z_j(X', \Xi') + is(-D_{\Xi'}\psi_j, D_{X'}\psi_j)_{\bar{X}, \bar{\Xi}'} \cdot \left(\int_0^1 (D_{X', \Xi'} z_j)(\chi_j(X', \Xi', us))du\right)$$

on tire

$$\mathrm{Im}\, z_j(\chi_j(X', \Xi', s)) - s D_{x_n}\psi_j(\bar{X}, \bar{\Xi}')$$
$$= s\left[(-D_{\Xi'}\psi_j, D_{X'}\psi_j)_{\bar{X}, \bar{\Xi}'} \cdot \mathrm{Re}\left(\int_0^1 (D_{X', \Xi'} z_j)(\chi_j(X', \Xi', us)du\right) - D_{x_n}\psi_j(\bar{X}, \bar{\Xi}')\right],$$

l'expression entre crochets se réduisant en $(X', \Xi', s) = (\bar{X}', \bar{\Xi}', 0)$ à $(H_{z_j}\psi_j - D_{x_n}\psi_j)_{\bar{X}, \bar{\Xi}'}$. Par continuité, elle conserve donc son signe dans un voisinage de ce point.

De la relation (1), on déduit

$\xi_n + is\, D_{x_n}\psi_j(\bar{X}, \bar{\Xi}') - z_j(\chi_j(X', \Xi', s) \neq 0, \forall(X', \Xi') \in V, \forall \xi_n \in \mathbb{R}, \forall s \in]0, \varepsilon]$,
ce qui entraîne en particulier la microhyperbolicité de $\xi_n - z_j(X', \Xi')$ dans la direction $- H_{\psi_j}$ au point $(\bar{X}, \bar{\Xi}', z_j(\bar{X}', \bar{\Xi}'))$ et de là le résultat a) puisque l'autre facteur de $p(X', \Xi)$ ne s'annule pas en ce point.

Établissons le point b). Si $\bar{x}_n = 0$, on a

$\chi_j(X', \Xi', s) = \chi(X', \Xi', s) = (X' - is\, D_{\Xi'}\psi(\bar{X}', \bar{\Xi}'), \Xi' + is\, D_{X'}\psi(\bar{X}', \bar{\Xi}'))$.
Soit $\mathscr{C}_{X', \Xi', s}$ un contour entourant le zéro $z_2(\chi(X', \Xi', s))$; le tableau

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathscr{C}} \frac{b(\chi(X', \Xi', s), z)}{p(\chi(X', \Xi', s), z)}(1, z)dz = r(\chi(X', \Xi', s))(1, z_2(\chi(X', \Xi', s)))$$

est de rang maximum puisque $r(\chi(X', \Xi', s))$ ne s'annule pas pour (X', Ξ') dans un voisinage de $(\bar{X}', \bar{\Xi}')$ et $s \in]0, \varepsilon']$. De fait, on a

(*) $H_{z_1}\psi_1 = D_{\Xi'} z_1 \cdot D_{X'}\psi_1 - D_{X'} z_1 \cdot D_{\Xi'}\psi_1$.

$$\frac{Im\, r(\chi(X', \Xi', s)}{s} = (-D_{\Xi'}\psi, D_{X'}\psi)_{\overline{X}',\overline{\Xi}} \cdot \left(\int_0^1 (D_{X',\Xi'}r)(\chi(X', \Xi', us))du\right),$$

et il suffit dès lors de remarquer que le second membre est différent de 0 au point $(\overline{X}', \overline{\Xi}', 0)$ où il vaut $(H_r\psi)_{\overline{X}',\overline{\Xi}'}$.

4. — Construisons des fonctions $\psi_j(X, \Xi')$ répondant aux conditions du lemme II.1.

Choisissons un changement de variables analytiques dans un voisinage $\mathscr{V}'$ de (X'_0, Ξ'_0),

$$\begin{cases} u = u(X', \Xi') \\ \tau = \tau(X', \Xi') \\ (X', \Xi') \in \mathscr{V}' \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} X' = X'(u, \tau) \\ \Xi' = \Xi'(u, \tau) \\ (u, \tau) \in W \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n-1}, \end{cases}$$

qui transforme (X'_0, Ξ'_0) en $(0, 0)$, H_r en D_u et la courbe γ_r^- en le segment $\{(u, 0) : u \in]-\delta, 0[, \delta > 0\}$.

Introduisons les familles de fonctions

$$\psi_{j\alpha}(X, \Xi') = \psi_\alpha(X', \Xi') + (-1)^{j+1}\frac{x_n}{\varepsilon}, j = 1, 2,$$

avec

$$\psi_\alpha(X', \Xi') = \overline{\psi}_\alpha(u(X', \Xi'), \tau(X', \Xi')), \overline{\psi}_\alpha(u, \tau) = (\alpha - u) - (\alpha - \theta)\frac{|\tau|^2}{\varepsilon^2},$$

α représentant un paramètre réel et θ, ε des constantes qui seront fixées ultérieurement.

La condition (iii) du lemme II.1 est satisfaite dans $\mathscr{V}'$ puisque

$$(H_r\psi_\alpha)(X'(u, \tau), \Xi'(u, \tau)) = D_u\overline{\psi}_\alpha(u, \tau) = -1.$$

Pour les autres conditions, on a le résultat suivant.

Lemme II.2. *Pour tout ouvert* V' *d'adhérence compacte dans* $\mathscr{V}'$, *il existe* $\varepsilon_0 > 0$ *tel que les conditions* (i), (ii) *du Lemme* II.1 *sont satisfaites par les fonctions* $\psi_{j\alpha}$ *dans*

$$\{(X, \Xi') : (X', \Xi') \in V', |\tau(X', \Xi')| \leqslant \varepsilon\}$$

si

$$\alpha \in]\theta, 0], \theta \in [-\varepsilon_0, 0[, \varepsilon \in]0, \varepsilon_0].$$

Preuve. L'expression

$H_{z_j}\psi_{j\alpha}$

$$= \begin{pmatrix} D_{\Xi'} \\ -D_{X'} \end{pmatrix} z_j \cdot \begin{pmatrix} D_{X'} \\ D_{\Xi'} \end{pmatrix} \psi_\alpha$$

$$= \begin{pmatrix} D_{\Xi'} \\ -D_{X'} \end{pmatrix} z_j \cdot \left(\frac{\partial(X', \Xi')}{\partial(u, \tau)}\right)^{\sim -1} (u(X', \Xi'), \tau(X', \Xi')) \begin{pmatrix} -1 \\ -\dfrac{2(\alpha - \theta)\tau(X', \Xi')}{\varepsilon^2} \end{pmatrix}$$

est majorée en module par

$$c\left(1+2\frac{(\alpha-\theta)\,|\,\tau(X',\Xi')\,|}{\varepsilon^2}\right)\leqslant c\left(1+\frac{2\,|\,\theta\,|}{\varepsilon}\right)$$

où

$$c=\sup_j\sup_{V'}\left\|\left(\frac{\partial(X',\Xi')}{\partial(u,\tau)}\right)^{-1}_{(u(X',\Xi'),\,\tau(X',\Xi'))}\right\|\,|\,D_{X',\Xi'}\,z_j\,|.$$

De là,

$$H_{z_1}\psi_{1\alpha}-D_{x_n}\psi_{1\alpha}\leqslant c+\frac{2c\,|\,\theta\,|-1}{\varepsilon}\leqslant c-\frac{1}{2\varepsilon}\leqslant -c<0$$

si $|\,\theta\,|, \varepsilon\leqslant\frac{1}{4c}$. On obtient de manière analogue

$$H_{z_2}\psi_{2\alpha}-D_{x_n}\psi_{2\alpha}\geqslant c>0,$$

pour les mêmes valeurs de θ et ε.

5. — La démonstration du théorème II.2 comporte trois étapes.

A. Les quelques considérations préliminaires qui vont suivre vont permettre entre autre de fixer ε et θ.

Comme la bicaractéristique γ_1 est transverse et telle que

$$\gamma_1\cap WF_a(\mathcal{T}\,|\,_{]U'\times]0,T[})=\varnothing,$$

il existe des boules $b_{X'_0}, b_{\Xi'_0}$, un nombre $T'>0$ et un voisinage I_1 de $z_1(X'_0,\Xi'_0)$ tels que

$$[(b_{X'_0}\times]0,T'[)\times(b_{\Xi'_0}\times I_1)]\cap WF_a\mathcal{T}=\varnothing.$$

On peut toujours supposer que $z_1(X',\Xi')\in I_1$ si $(X',\Xi')\in b_{X'_0}\times b_{\Xi'_0}$ et que ce dernier ensemble est d'adhérence compacte dans $\mathscr{V}'$. Soit W' son image par la fonction $(u(X',\Xi'),\tau(X',\Xi'))$. Il existe ε,θ tels que $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0, -\varepsilon_0\leqslant\theta<0$ et $[\theta,0]\times\{\tau:|\,\tau\,|\leqslant\varepsilon\}\subset W'$.

Comme $\gamma_r^-\cap WF_{ab}\mathcal{T}=\varnothing$, le point $(X'(\theta,0),\Xi'(\theta,0))$ n'appartient pas au $WF_{ab}\mathcal{T}$; il existe dès lors un nombre $\delta>0$ tel que

$$\{(X'(u,\tau),\Xi'(u,\tau)) : u\in[\theta,\theta+\delta[,\,|\,\tau\,|\leqslant\varepsilon\}\cap WF_{ab}\mathcal{T}=\varnothing$$

et

$$\{(X'(u,\tau),x_n,\Xi'(u,\tau),\xi_n) : u\in[\theta,\theta+\delta[,\,|\,\tau\,|\leqslant\varepsilon, x_n\in]0,T'[\}\cap WF_a\mathcal{T}=\varnothing,$$

quitte à réduire ε, T'. On prendra enfin ε tel que $-\varepsilon\theta<T'$.

Remarquons d'autre part que

$$\begin{gathered}\{(X',\Xi') : u(X',\Xi')>\theta, \psi_\alpha(X',\Xi')>0\}\\ \subset\{(X',\Xi') : \theta<u(X',\Xi')<\alpha, |\,\tau(X',\Xi')\,|<\varepsilon\}\end{gathered}$$

tandis que

$$\begin{gathered}\{(X,\Xi') : u(X',\Xi')>\theta, \psi_{2\alpha}(X,\Xi')>0\}\\ \subset\{(X,\Xi') : \theta<u(X',\Xi')<\alpha, |\,\tau(X',\Xi')\,|<\varepsilon, 0<x_n<-\varepsilon\theta\}.\end{gathered}$$

B. Montrons que

$$\{(X', \Xi') \in b_{X'_0} \times b_{\Xi'_0} : u(X', \Xi') > \theta, \psi_0(X', \Xi') > 0\} \cap WF_{ab}\mathcal{C} = \varnothing$$

et

$$\{(X, \Xi) \in b_{X'_0} \times]0, T'[\times b_{\Xi'_0} \times \mathbb{R} : u(X', \Xi') > \theta, \psi_{20}(X, \Xi') > 0\} \cap WF_a\mathcal{C} = \varnothing.$$

Désignons par α_0 la borne supérieure des $\alpha \in [\theta, 0]$ pour lesquels les intersections ci-dessus, où les fonctions ψ_0, ψ_{20} ont été remplacées par $\psi_\alpha, \psi_{2\alpha}$, sont vides.

Des tels α existent puisque tout $\alpha \in [\theta, \theta + \delta[$ convient. En outre, la borne supérieure α_0 est réalisée.

Montrons que $\alpha_0 = 0$ en procédant par l'absurde. Si $\alpha_0 < 0$, soit α_m une suite de $]\alpha_0, 0]$ convergeant vers α_0. Il existe dès lors une suite $(X_m, \Xi_m) \in b_{X'_0} \times [0, T'[\times b_{\Xi'_0} \times \mathbb{R}$ telle que

i) $(X_m, \Xi_m) \in WF_a\mathcal{C}$ si $x_{nm} > 0$

ou

$$(X'_m, \xi'_m) \in WF_{ab}\mathcal{C} \text{ et } \xi_{nm} = z_2(X'_m, \Xi'_m) \text{ si } x_{nm} = 0,$$

ce qui entraîne dans les deux cas $p(X'_m, \Xi_m) = 0$,

ii) $u(X'_m, \Xi'_m) > \theta, \psi_{2\alpha_m}(X_m, \Xi'_m) > 0$.

La suite (X_m, Ξ_m) est bornée; d'une part, de ii), on déduit

$$x_{nm} \in [0, -\varepsilon\theta[, (u(X'_m, \Xi'_m), \tau(X'_m, \Xi'_m)) \in]\theta, \alpha_m[\times \{\tau : |\tau| < \varepsilon\},$$

ce qui montre que (X_m, Ξ'_m) est borné. Pour ξ_{nm}, on note qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $|\xi_n| < c|\Xi'|$ lorsque $X' \in b_{X'_0}$ et $p(X', \Xi) = 0$.

Quitte à en extraire une sous-suite, on peut supposer que $(X_m, \Xi_m) \to (X_1, \Xi_1) \in b_{X'_0} \times [0, T'[\times b_{\Xi'_0} \times \mathbb{R}$. On a $(X'_1, \Xi'_1) \in WF_{ab}\,\mathcal{C}$ si $x_{1n} = 0$ ou $(X_1, \Xi_1) \in WF_a\mathcal{C}$ si $x_{1n} > 0$ avec $\xi_{1n} = z_2(X'_1, \Xi'_1)$. De là, $\psi_{2\alpha_0}(X_1, \Xi'_1) = 0$ et $u(X'_1, \Xi'_1) > \theta$ car

$$\{(X'(\theta, \tau), \Xi'(\theta, \tau)) : |\tau| \leqslant \varepsilon\} \cap WF_{ab}\mathcal{C} = \varnothing$$

et

$$\{(X'(\theta, \tau), x_n, \Xi'(\theta, \tau), \xi_n) : |\tau| \leqslant \varepsilon, 0 < x_n < T'\} \cap WF_a\mathcal{C} = \varnothing.$$

Dans ces conditions, le théorème 7.4 de [5] assure que $(X'_1, \Xi'_1) \notin WF_{ab}\mathcal{C}$ si $x_{1n} = 0$ et l'on déduit du théorème de Kashiwara-Kawai [1], [5] que $(X_1, \Xi_1) \notin WF_a\mathcal{C}$ si $x_{1n} > 0$.

En effet, (P, B) [resp. p] est microhyperbolique en (X'_1, Ξ'_1) [resp. $(X_1, \Xi_1]$ dans la multidirection $(-H_{\psi_{1\alpha_0}}, -H_{\psi_{2\alpha_0}})$ [resp. dans la direction $-H_{\psi_{2\alpha_0}}$] et si l'on pose $I_2 = \mathbb{R}$,

$$\{(X', \Xi') \in b_{X'_0} \times b_{\Xi'_0} : u(X', \Xi') > \theta, \psi_{\alpha_0}(X', \Xi') > 0\} \cap WF_{ab}\mathcal{C} = \varnothing.$$

$$\{(X, \Xi) \in b_{X'_0} \times]0, T'[\times b_{\Xi'_0} \times I_j : u(X', \Xi') > \theta, \psi_{j\alpha_0}(X, \Xi') > 0\} \cap WF_a\mathcal{C} = \varnothing,$$

l'ensemble $\{(X', \Xi') \in b_{X'_0} \times b_{\Xi'_0} : u(X', \Xi') > \theta\}$ étant un voisinage de (X'_1, Ξ'_1).

On arrive ainsi à une contradiction.

C. En utilisant le résultat établi dans B et en remarquant que le problème aux limites (P, B) est microhyperbolique en (X'_0, Ξ'_0) dans la multidirection $(-H_{\psi_{10}}, -H_{\psi_{20}})$ avec $\psi_0(X'_0, \Xi'_0) = 0$, on déduit du théorème 7.4 de [5] que $(X'_0, \Xi'_0) \notin WF_{ab}\mathcal{C}$.

6. — Étudions la courbe γ_r suivant laquelle les singularités se propagent dans la frontière.

La courbe γ_r est contenue dans la région hyperbolique. En outre, comme

$$r(X', \Xi') = (\xi_t - \mu(x', \xi'))v(X', \Xi')$$

où

$$\mu(x', \xi') = (\operatorname{sign} \xi_t)\sqrt{\frac{1}{a}[\,|\,\xi'\,|^2 + (t'(x')\,.\,\xi')^2 - \frac{(g\,.\,\xi')^2}{1+g^2}]}$$

et $v(X', \Xi')$ diffère de 0 dans un voisinage de (X'_0, Ξ'_0), γ_r est donc dans ce voisinage la bicaractéristique de $\xi_t - \mu(x', \xi')$ passant par (X'_0, Ξ'_0). On peut dès lors la rapporter au temps t,

$$\gamma_r = \{(t, x'(t), \xi_{0t}, \xi'(t)) : D_t x' = -D_{\xi'}\mu(x', \xi'),\ D_t\xi' = D_{x'}\mu(x', \xi')\}.$$

Soit $(y(t), \eta(t))$ la courbe de $T^*(\dot\omega)$ dont la forme locale est $(x'(t), \xi'(t))$; $y(t)$ représente la courbe suivant laquelle la perturbation se propage dans la frontière $\dot\omega$ à partir de y_0 à la vitesse [3],

$$|\,D_t y(t)\,| = \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2\,\xi_{0t}^2}(1 + |\,\vec{t}(y(t))\,|^2)\,(\vec{t}(y(t))\,.\,\eta(t))^2}.$$

Celle-ci est donc strictement supérieure à $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ qui représente la vitesse de propagation des ondes dans le milieu.

III. PROBLÈME DE LA TENSION ÉLASTIQUE

1. — Étudions la propagation des ondes élastiques dans un milieu isotrope. On ramène cette étude à celle du problème de la tension élastique posé pour le système de l'élasticité

$$P(D_X) = (-D_t^2 + a_2^2\Delta_x)I_n + (a_1^2 - a_2^2) < D_x, D_x >,\ a_1 > \sqrt{2}\,a_2 > 0,$$

lorsqu'on impose les conditions aux limites

$$B(x, D_x) = a_2^2(\vec{\nu}(x)\,.\,D_x)I_n + (a_1^2 - 2a_2^2)\langle\vec{\nu}(x), D_x\rangle + a_2^2\langle\vec{\nu}(x), D_x\rangle^{`}, \text{(*)}$$

$\langle\,,\,\rangle$ représentant le produit dyadique.

Examinons le comportement des singularités, au voisinage d'une singularité elliptique (Y_0, H_0), telle que $\eta_{0t}^2 < a_2^2\,|\,\eta_0\,|^2$. Dans les coordonnées aplanissantes standard, les opérateurs P, B se transforment en, [3],

(*) L'application de B au vecteur déplacement fournit la tension élastique, c'est-à-dire la composante normale du tenseur des contraintes.

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}', \mathrm{D_X}) = \mathrm{UP}'(\mathrm{X}', \mathrm{D_X})\tilde{\mathrm{U}}, \mathrm{B}(\mathrm{X}', \mathrm{D_X}) = \mathrm{UB}'(\mathrm{X}', \mathrm{D_X})\tilde{\mathrm{U}}$$

où U représente une matrice orthogonale et, en reprenant les notations de II § 1,

$$\begin{aligned}\mathrm{B}'(\mathrm{X}', \mathrm{D_X}) &= [a_2^2(1 + g^2)\mathrm{I}_n + (a_1^2 - a_2^2) \langle {}^{-g}_{1}, {}^{-g}_{1}\rangle]\mathrm{D}_{x_n} \\ &+ (a_1^2 - 2a_2^2) \langle {}^{-g}_{1}, {}^{\mathrm{D}_{x'}}_{0}\rangle + a_2^2 \langle {}^{-g}_{1}, {}^{\mathrm{D}_{x'}}_{0}\rangle - a_2^2 g \,.\, \mathrm{D}_{x'} \mathrm{I}_n\end{aligned}$$

Nous ne mentionnerons pas la forme explicite de $\mathrm{P}'(\mathrm{X}', \mathrm{D_X})$; signalons cependant que, [3],

$$[p'(\mathrm{X}', \Xi)]^{-1} = \frac{\mathrm{A}(\mathrm{X}', \Xi)}{m(\mathrm{X}', \Xi)}$$

où

$$m(\mathrm{X}', \Xi) = \prod_{j=1}^{2} (a_j^2(1 + g^2)\xi_n^2 - 2a_j^2 g \,.\, \xi'\xi_n + a_j^2 \mid \xi' \mid^2 - \xi_t^2)$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{A}(\mathrm{X}', \Xi) &= [a_1^2(1 + g^2)\mathrm{I}_n - (a_1^2 - a_2^2) \langle {}^{-g}_{1}, {}^{-g}_{1}\rangle]\xi_n^2 \\ &+ [- 2a_1^2 g \,.\, \xi'\mathrm{I}_n - (a_1^2 - a_2^2) (\langle {}^{-g}_{1}, {}^{\xi'}_{0}\rangle + \langle {}^{\xi'}_{0}, {}^{-g}_{1}\rangle)]\xi_n \\ &+ [(a_1 \mid \xi' \mid^2 - \xi_t^2)\mathrm{I}_n - (a_1^2 - a_2^2) \langle {}^{\xi'}_{0}, {}^{\xi'}_{0}\rangle]\end{aligned}$$

2. — Soit (X_0', Ξ_0') la forme locale de $(\mathrm{Y}_0, \mathrm{H}_0)$. On a $\xi_{ot}^2 < a_2^2 \mid \xi_0' \mid^2$ et le polynôme $m(\mathrm{X}', \Xi', z)$ admet pour (X', Ξ') dans un voisinage V de (X_0', Ξ_0') quatre racines complexes distinctes conjuguées deux à deux et dont celles à partie imaginaire positive sont données par

$$z_j(\mathrm{X}', \Xi') = \frac{g \,.\, \xi' + i\sqrt{(1 + g^2)\left(\mid \xi' \mid^2 - \dfrac{\xi_t^2}{a_j^2}\right) - (g \,.\, \xi')^2}}{1 + g^2}, j = 1, 2.$$

La matrice de Lopatinsky est définie par

$$\begin{aligned}\mathrm{R}(\mathrm{X}', \Xi') &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathrm{C}^+} b(\mathrm{X}', \Xi', z)p^{-1}(\mathrm{X}', \Xi', z)dz \\ &= \mathrm{U}\left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathrm{C}^+} \frac{b(\mathrm{X}', \Xi', z)\mathrm{A}(\mathrm{X}', \Xi', z)}{m(\mathrm{X}', \Xi', z)} dz\right) \tilde{\mathrm{U}},\end{aligned}$$

où C^+ désigne un contour fermé n'entourant que les zéros z_1, z_2 de $m(\mathrm{X}', \Xi', z)$. Son déterminant vaut, [3],

$$r(\mathrm{X}', \Xi') = [\xi_t^2 - s_0 \, a_2^2 \left(\mid \xi' \mid^2 - \frac{(g \,.\, \xi')^2}{1 + g^2}\right)]s(\mathrm{X}', \Xi')$$

où $s(\mathrm{X}', \Xi') \neq 0$ dans V et s_0 représente l'unique zéro dans $]0, 1[$ du polynôme de Rayleigh [4]. On a donc $r(\mathrm{X}_0', \Xi_0') = 0$ lorsque $\xi_{ot}^2 = s_0 \, a_2^2 \mid \xi_0' \mid^2$.

3. — Étudions la propagation des singularités pour l'équation (I.1).

Théorème III.1. *Si* $\xi_{ot}^2 \neq s_0 a_2^2 \mid \xi_0' \mid^2$, *on a* $(\mathrm{X}_0', \Xi_0') \notin \mathrm{WF}_{ab}\vec{\mathcal{C}}$.

Preuve. Le problème aux limites (P, B) est microhyperbolique en (X'_0, Ξ'_0) dans la direction $-H_\psi$ si $\psi(X, \Xi') = 0$. On conclut par le théorème 0.4 de [5].

Envisageons le cas où $r(X'_0, \Xi'_0) = 0$. Soit γ_r la courbe intégrale de H_r passant par (X'_0, Ξ'_0). Comme

$$r(X', \Xi') = 0, \Xi' \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \Rightarrow D_{\xi_t} r(X', \Xi') \neq 0,$$

la composante temporelle varie monotonément le long de γ_r. Posons $\gamma_r^- = \gamma_r \cap \{(X', \Xi') : t < t_0\}$. On a le résultat suivant.

Théorème III.2. *Si* $\xi_{ot}^2 = s_0 a_2^2 |\xi'_0|^2$ *et si* $\gamma_r^- \cap WF_{ab}\vec{\mathcal{C}} = \varnothing$, *alors* $(X'_0, \Xi'_0) \notin WF_{ab}\vec{\mathcal{C}}$.

4. — Avant de démontrer ce théorème, étudions au préalable les conditions de microhyperbolicité.

Lemme III.1. *Soit* $\psi(X', \Xi')$ *une fonction analytique réelle dans un voisinage* V' *de* (X'_0, Ξ'_0) *contenu dans* V. *Le problème aux limites* (P, B) *est microhyperbolique en tout point de* V' *dans la direction* $-H_\psi$ *si* $H_r\psi \neq 0$.

Preuve. Soit $(\overline{X}', \overline{\Xi}') \in V'$, posons

$$\chi(X', \Xi', s) = (X' - is\, D_{\Xi'}\psi(\overline{X}', \overline{\Xi}'), \Xi' + is\, D_{X'}\psi(\overline{X}', \overline{\Xi}'))$$

On a $\mathrm{I}m\, z_j(\chi(X', \Xi', s)) > 0$ pour (X', Ξ') dans un voisinage de $(\overline{X}', \overline{\Xi}')$ et $s \in]0, \varepsilon']$. Soit $\mathscr{C}$ un contour entourant ces zéros. Le tableau $(n \times 2n)$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathscr{C}} b(\chi(X', \Xi', s), z)p^{-1}(\chi(X', \Xi', z), z)(I_n, zI_n)dz = (R(\chi(X', \Xi', s)), ^*)$$

est de rang maximum pour (X', Ξ', s) dans un voisinage de $(\overline{X}', \overline{\Xi}', 0)$ et $s > 0$. De fait, en procédant comme dans le lemme II.1, il vient

$$\frac{\mathrm{I}m\, dtm\, R(\chi(X', \Xi', s))}{s} = (-D_{\Xi'}\psi, D_{X'}\psi)_{\overline{X}', \overline{\Xi}'} \cdot \left(\int_0^1 (D_{X', \Xi'} r)(\chi(X', \Xi', us))du\right),$$

le second membre se réduisant à $(H_r\psi)_{\overline{X}', \overline{\Xi}'}$ en $(X', \Xi', s) = (\overline{X}', \overline{\Xi}', 0)$. D'où le résultat.

Dès lors, les fonctions

$$\psi_\alpha(X', \Xi') = \overline{\psi}_\alpha(u(X', \Xi'), \tau(X', \Xi')),$$

avec

$$\overline{\psi}_\alpha(u, \tau) = (\alpha - u) - (\alpha - \theta)\frac{|\tau|^2}{\varepsilon^2},$$

introduites dans II, § 4 satisfont aux hypothèses du lemme III.1. Soit V' le voisinage de (X'_0, Ξ'_0) où ces fonctions sont analytiques.

5. — La démonstration du théorème III.2 est à quelques modifications près une version simplifiée de celle du théorème II.2. Donnons-en les étapes essentielles.

Il existe $\varepsilon > 0$ et $\theta < 0$ tels que l'ensemble $[\theta, 0] \times \{\tau : |\tau| \leqslant \varepsilon\}$ est contenu dans le voisinage W' de l'origine en correspondance biunivoque avec V'. Comme $(X'(\theta, 0), \Xi'(\theta, 0)) \notin WF_{ab}\vec{\mathcal{C}}$, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que

$$\{(X'(u,\tau), \Xi'(u,\tau)) : u \in [\theta, \theta + \delta[, |\tau| \leqslant \varepsilon\} \cap WF_{ab}\vec{\mathcal{C}} = \varnothing,$$

quitte à réduire ε.

On montre ensuite que 0 est la borne supérieure des $\alpha \in]\theta, 0]$ tels que

$$\{(X', \Xi') \in V' : u(X', \Xi') > \theta, \psi_\alpha(X', \Xi') > 0\} \cap WF_{ab}\vec{\mathcal{C}} = \varnothing,$$

en procédant comme dans II, § 5B et en utilisant cette fois le théorème 0.4 de [5].

En utilisant le même théorème, on déduit de là que $(X'_0, \Xi'_0) \notin WF_{ab}\vec{\mathcal{C}}$.

6. — La courbe γ_r est contenue dans la région elliptique. On peut en outre la rapporter au temps t puisque γ_r est également la bicaractéristique de

$$\xi_t - (\operatorname{sign} \xi_t) \sqrt{s_0}\, a_2 \sqrt{|\xi'|^2 - \frac{(g.\xi')^2}{1+g^2}}.$$

En reprenant les notations de II, § 6, on a cette fois $|D_t y(t)| = \sqrt{s_0}\, a_2$, [3]. La perturbation se propage donc dans la frontière à une vitesse inférieure à celles des ondes de volume. Ces perturbations de surface engendrent l'onde de Rayleigh [4].

Nous tenons à remercier le Professeur H. G. Garnir qui nous a proposé ce travail et nous a encouragé lors de sa réalisation.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Kashiwara, T. Kawai, Microhyperbolic pseudodifferential operators I. *J. Math. Soc. Japan*, **27**, 359-404 (1975).

[2] P. Lousberg, Paramétrices microlocales pour le problème de transmission. *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège*, nº 3-4, pp. 161-170 (1981).

[3] P. Lousberg, Propagation des singularités dans les problèmes aux limites non diffractifs avec ondes de surface. Doctorat, Liège, (1980).

[4] Lord Rayleigh, On waves propagated along the plane surface of an elastic solid. *Proc. London Math. Soc.*, **17**, pp. 4-11 (1885).

[5] J. Sjöstrand, Analytic singularities and microhyperbolic boundary value problems. *Math. Annalen*, **254**, pp. 211-256 (1980).

Université de Liège
Institut de Mathématique
15, avenue des Tilleuls
B-4000 Liège (Belgique)