Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 51e année, 1-2, 1982, pp. 68-73

# COMPLEXES SATELLITES DES CONGRUENCES D'UN COUPLE θ

par COLETTE READ-DERCHAIN

SUMMARY

The essential properties of the pairs of rectilinear congruences in $P^3$-space are collected in the work of FINIKOFF « Théorie des couples de congruences » [1].

In the present work pertaining to θ-pairs, we study how the main class of θ-pairs are linked to the particularities of the satellite complexes relative to the two congruences of the pair under study. (A similar study relative to T-pairs has been made elsewhere [6]).

## 1. INTRODUCTION

Soient dans l'espace projectif $P^3$ deux congruences hyperboliques de droites (L) et (L') engendrées par les rayons $A_1A_2$ et $A_3A_4$ où les points $A_1$, $A_2$ (resp. $A_3$, $A_4$) désignent les foyers de (L) (resp. (L')).

Comme on le sait, le couple (L)(L') est un couple θ s'il existe entre les rayons L et L' une bijection telle que le plan focal relatif à $A_1$ (resp. $A_2$) contient le foyer $A_3$ (resp. $A_4$) et que le plan focal relatif à $A_4$ (resp. $A_3$) contient le foyer $A_1$ (resp. $A_2$).

Supposons les nappes focales non dégénérées et introduisons les données du couple θ en utilisant les notations de Finikoff [1].

Soit $A_1A_2A_3A_4$ le tétraèdre du premier ordre attaché au couple θ. Ses déplacements vérifient

$$dA_i = \omega_i^j A_j, \; i = 1, 2, 3, 4, \tag{1}$$

avec

$$\omega_1^4 = 0, \; \omega_2^3 = 0, \; \omega_3^1 = 0, \; \omega_4^2 = 0 \tag{2}$$

où $\omega_i^j$, $i, j = 1, 2$, désignent des formes différentielles à deux variables.

Si on prend comme formes de base $\omega_1^3$ et $\omega_2^4$, on obtient par différentiation extérieure

$$\begin{aligned} &\omega_3^4 = \alpha\omega_1^3 - \beta\omega_2^4, \; \omega_4^3 = -\beta'\omega_1^3 + \alpha'\omega_2^4, \\ &\omega_1^2 = \beta\omega_1^3 + \gamma\omega_2^4, \; \omega_2^1 = \gamma'\omega_1^3 + \beta'\omega_2^4, \\ &\omega_3^2 = a\omega_1^3 + b\omega_2^4, \; \omega_4^1 = b'\omega_1^3 + c\omega_2^4, \end{aligned} \tag{3}$$

et les deux conditions d'intégrabilité

$$\begin{aligned} &a\beta' - b\gamma' + b'\beta + c\alpha = 0, \\ &a\alpha' + b\beta - b'\gamma + c\beta = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Présenté le 18 février 1982 par J. Gobert.

Finikoff a démontré l'existence des couples $\theta$ : ceux-ci dépendent soit de deux fonctions arbitraires de deux arguments, soit de cinq fonctions arbitraires d'un argument (couple $\theta$ spécial).

On sait que (L) est W (de Weingarten) si et seulement si $\alpha\alpha' - \gamma\gamma' = 0$ et que (L') est W si et seulement si $\alpha\alpha' + \gamma\gamma' - 2\beta\beta' = 0$.

Notons que les surfaces focales $(A_1), (A_2), (A_3), (A_4)$ n'étant pas dégénérées, on a $\alpha\alpha'\beta\beta' \neq 0$.

Désignons par $[ik]$, $i, k = 1, 2, 3, 4$, l'image de la droite $A_iA_k$ sur l'hyperquadrique de Klein d'un espace projectif $P^5$. Au tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ de $P^3$ correspond dans $P^5$ le repère mobile $[12]\,[13]\,[14]\,[42]\,[23]\,[34]$ dont on peut calculer les déplacements $d[ij]$.

## 2. COMPLEXES LINÉAIRES — COMPLEXES LINÉAIRES TANGENTS — COMPLEXES SATELLITES

On sait que si $p^{ik}$, $i, k = 1, 2, 3, 4$ sont les coordonnées de Plücker d'une droite de $P^3$, un complexe linéaire est l'ensemble des droites vérifiant

$$a_{ik}p^{ik} = 0.$$

Les images de ces droites dans $P^5$ appartiennent à un hyperplan dont le pôle, appelé « seconde image du complexe » s'écrit

$$\Omega = a_{ik}[ik].$$

Les complexes linéaires tangents à (L) contiennent le voisinage du premier ordre des surfaces réglées de (L) et leur seconde image s'écrit

$$\Omega = x[12] + y[13] + z[42];$$

ces points remplissent un plan $\pi$ de $P^5$.

Les complexes satellites (ou complexes de Waelsch) attachés à (L) sont deux complexes linéaires tangents particuliers : ils contiennent le voisinage du second ordre des surfaces développables de (L), chacune comptée deux fois.

Par une méthode analogue à celle développée par V. Horak [3] et O. Rozet [7], on peut calculer leurs secondes images; on trouve facilement

$$\begin{aligned} W_1 &= (\alpha'\beta + \gamma\beta')[12] + \alpha'[13] + \gamma[42], \\ W_2 &= (\gamma'\beta + \alpha\beta')[12] + \gamma'[13] + \alpha[42]. \end{aligned} \tag{5}$$

On montre de même que les complexes linéaires tangents à (L') remplissent le plan $\pi'$ $[34]\,[14]\,[23]$ de $P^5$ et que les deux complexes satellites attachés à (L') ont pour seconde image

$$\begin{aligned} W_1' &= (\beta^2 + \alpha\gamma)[34] + (b\alpha + a\beta)[14] + (a\gamma - b\beta)[23], \\ W_2' &= (\beta'^2 + \alpha'\gamma')[34] + (c\gamma' - b'\beta)[14] + (b'\alpha' + c\beta)[23]. \end{aligned} \tag{6}$$

3. On peut remarquer facilement que le plan tangent à la surface ([34]) au point [34] rencontre dans $P^5$ le plan $\pi$ suivant la droite $[13]\,[42]$.

Il existe donc une famille à un paramètre $(\mathscr{F}_1)$ de complexes linéaires tangents à la congruence (L) qui contiennent la génératrice $A_3A_4$ correspondante de l'autre congruence (L') du couple $\theta$.

De même, il existe une famille à un paramètre $(\mathscr{F}_2)$ de complexes linéaires tangents à (L′) qui contiennent la génératrice $A_1A_2$ correspondante de (L).

Nous nous proposons de montrer de quelle façon les principales classes de couples $\theta$ sont liées aux particularités des complexes des deux familles $(\mathscr{F}_1)$ et $(\mathscr{F}_2)$.

### 4. UNE DES CONGRUENCES DU COUPLE $\theta$ EST W

Plaçons-nous dans le cas où la congruence (L) est W; les asymptotiques se correspondent sur les deux nappes focales $(A_1)$ et $(A_2)$ et on a

$$\alpha\alpha' - \gamma\gamma' = 0. \tag{7}$$

Les deux complexes satellites de (L) sont alors confondus avec le complexe linéaire osculateur à (L) et leurs secondes images coïncident.

En particulier le complexe linéaire osculateur à (L) appartient à la famille $(\mathscr{F}_1)$ lorsque sa seconde image est sur la droite [13] [42], ce qui arrive si et seulement si

$$\alpha'\beta + \gamma\beta' = 0 \tag{8}$$

comme le montre l'examen des deux points $W_1$ et $W_2$.

Nous allons montrer qu'alors, *la congruence* (L′) *est elle aussi une congruence* W, *que le complexe linéaire osculateur à* (L′) *appartient à la famille* $(\mathscr{F}_2)$ et enfin *que les deux couples de congruences auxiliaires du couple* $\theta$, $(A_2A_3)$ *et* $(A_1A_4)$, $(A_1A_3)$ *et* $(A_2A_4)$, *sont des couples paraboliques stratifiables.*

Les relations (7) et (8) sont équivalentes à

$$\alpha'\beta + \gamma\beta' = 0 \ (8), \quad \gamma'\beta + \alpha\beta' = 0, \tag{9}$$

ou encore à

$$\frac{\alpha'}{\gamma} = \frac{\gamma'}{\alpha} = -\frac{\beta'}{\beta} \ (= k). \tag{10}$$

a) Les deux congruences auxiliaires $(A_2A_3)$ et $(A_1A_4)$ ont respectivement pour foyers les points

$$A_3 \text{ et } \gamma' A_3 + (\alpha\beta' + \gamma'\beta)A_2,$$
$$A_4 \text{ et } \gamma A_4 + (\gamma\beta' + \alpha'\beta)A_1,$$

et compte tenu des relations (8) et (9), ces foyers sont confondus en $A_3$ et $A_4$ et les congruences sont paraboliques.

Sous les conditions (10), le système (4) se transforme en

$$\begin{aligned} \beta(b' - ak) + \alpha(c - bk) &= 0, \\ \gamma(b' - ak) - \beta(c - bk) &= 0. \end{aligned} \tag{4'}$$

Deux cas se présentent :

. $\beta^2 + \alpha\gamma \neq 0$, alors $\dfrac{b'}{a} = \dfrac{c}{b}$ qui s'écrit aussi $\omega_3^2 \wedge \omega_4^1 = 0$; ceci ne peut se présenter que si les développables de la congruence $A_3A_4$ sont confondues; les points $A_3$ et $A_4$ seraient alors confondus, ce qui n'a jamais lieu si (L′) est hyperbolique.

. $\beta^2 + \alpha\gamma = 0$ (11), entraînant dans les conditions actuelles $\beta'^2 + \alpha'\gamma' = 0$ (12).

Les foyers des congruences auxiliaires $(A_1A_3)$ et $(A_2A_4)$ sont donnés respectivement par

$$A_1 \text{ et } (a\beta + b\alpha)A_1 - (\alpha\gamma + \beta^2)A_3,$$
$$A_2 \text{ et } (b'\alpha' + c\beta')A_2 - (\alpha'\gamma' + \beta'^2)A_4;$$

compte tenu des relations (11) et (12), ces foyers sont confondus en $A_1$ et $A_2$ et les deux congruences sont paraboliques.

b) Les conditions (8), (9), (11), (12) s'écrivent aussi

$$\omega_4^3 \wedge \omega_1^2 = 0, \ \omega_3^4 \wedge \omega_2^1 = 0, \ \omega_3^4 \wedge \omega_1^2 = 0, \ \omega_4^3 \wedge \omega_2^1 = 0, \tag{13}$$

de sorte que la relation $\omega_1^2 = 0$ entraîne les trois suivantes

$$\omega_4^3 = 0, \ \omega_3^4 = 0, \ \omega_2^1 = 0.$$

Or, $\omega_1^2 = 0$ est l'équation différentielle d'une des asymptotiques de la surface $(A_1)$; en effet, $\omega_1^2 = 0$ entraîne

$$dA_1 = \omega_1^1 A_1 + \omega_1^3 A_3 \text{ et } d^2A_1 = \{A_1, A_2, A_3\},$$

où l'expression entre accolades est une relation linéaire entre les points qui y figurent. On constate que le plan osculateur à la courbe $\omega_1^2 = 0$ de $(A_1)$ au point $A_1$ est confondu avec le plan tangent à cette surface en ce point.

On sait d'autre part que les asymptotiques des surfaces $(A_i)$ sont données par

$$\begin{aligned} (A_1) &: \omega_1^3\omega_3^4 + \omega_1^2\omega_2^4 = 0,\\ (A_2) &: \omega_1^3\omega_2^1 + \omega_4^3\omega_2^4 = 0,\\ (A_3) &: \omega_3^2\omega_2^1 + \omega_3^4\omega_4^1 = 0,\\ (A_4) &: \omega_3^2\omega_4^3 + \omega_1^2\omega_4^1 = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

d'où, dans les conditions présentes,

$$(A_1) : \omega_1^2 = 0, \ \omega_3^4 = 0, \ (A_3) : \omega_2^1 = 0, \ \omega_3^4 = 0,$$
$$(A_2) : \omega_2^1 = 0, \ \omega_4^3 = 0, \ (A_4) : \omega_4^3 = 0, \ \omega_1^2 = 0.$$

On déduit alors de (13) que les asymptotiques se correspondent sur les nappes focales de (L′) qui est elle aussi une congruence W. On a dans ce cas

$$\alpha\alpha' + \gamma\gamma' - 2\beta\beta' = 0 \text{ d'où } \alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma'. \tag{15}$$

Le couple $\theta$ est donc constitué de deux congruences W hyperboliques et le complexe linéaire osculateur à (L′) contient la génératrice $A_1A_2$ correspondante de (L) : il appartient donc à la famille $(\mathscr{F}_2)$.

c) Dans une note précédente [5], nous avons mis en évidence de façon fort simple une propriété déjà connue par ailleurs et relative aux couples stratifiables, à savoir : la condition nécessaire et suffisante pour qu'un couple, parabolique ou non, de congruences de droites soit stratifiable est que la droite qui, dans $P^5$, joint leurs points images engendre une congruence de droites dont les foyers séparent harmoniquement le couple des points images.

On peut montrer facilement que le couple auxiliaire parabolique $(A_1A_3)$ et $(A_2A_4)$ satisfait aux conditions requises pour être stratifiable.

De fait, la droite [13] [24] de $P^5$ engendre une congruence de droites dont les foyers sont de la forme

$$F = \lambda[13] + \mu[24]$$

avec

$$\begin{aligned}
&\omega_1^3(\lambda a - \mu b') + \omega_2^4(\lambda b - \mu c) = 0,\\
&\omega_1^3(\lambda a + \mu\gamma') + \omega_2^4(-\lambda\beta + \mu\beta') = 0,\\
&\omega_1^3(\lambda\beta - \mu\beta') + \omega_2^4(\lambda\gamma + \mu\alpha') = 0,
\end{aligned}$$

système compatible en $\omega_1^3$, $\omega_2^4$ si et seulement si la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda a - \mu b' & \lambda b - \mu c \\ \lambda a + \mu\gamma' & -\lambda\beta + \mu\beta' \\ \lambda\beta - \mu\beta' & \lambda\gamma + \mu\alpha' \end{pmatrix}$$

est de rang un ce qui arrive lorsque $\lambda$ et $\mu$ sont solutions de l'équation

$$\lambda^2(a\beta + b\alpha) + \mu^2(b\beta' - c\gamma') = 0. \tag{16}$$

Les foyers sont alors

$$F_1 = \lambda_1[13] + \mu_1[24], \quad F_2 = \lambda_2[13] + \mu_2[24],$$

$(\lambda_1, \mu_1)$ et $(\lambda_2, \mu_2)$ désignant les solutions de l'équation (16). On remarque immédiatement que

$$\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1 = 0$$

et les foyers $F_1$ et $F_2$ séparent harmoniquement le couple [13], [24].

Un raisonnement analogue permet de montrer que le couple de congruences auxiliaires paraboliques $(A_2A_3)$ et $(A_1A_4)$ est stratifiable.

*Remarque.* Les quatre surfaces focales $(A_1)$, $(A_2)$, $(A_3)$, $(A_4)$ forment alors une configuration remarquable étudiée par Finikoff [2]. Les quatre congruences $(A_1A_3)$, $(A_3A_2)$, $(A_2A_4)$, $(A_4A_1)$ qui constituent les deux couples auxiliaires associés au couple $\theta$ sont paraboliques et se succèdent en tant que tangentes aux asymptotiques de $(A_1)$, $(A_3)$, $(A_2)$, $(A_4)$ respectivement, les asymptotiques sur ces quatre surfaces étant celles qui se correspondent sur les deux nappes focales des congruences W du couple $\theta$ donné.

Ces nappes focales sont des surfaces $R_0$, les seules surfaces qui soient projectivement déformables et dont le réseau de déformation dégénère en une famille de lignes asymptotiques.

## 5. UNE DES CONGRUENCES DU COUPLE $\theta$ EST NON W

Supposons la congruence (L) non W.

Les complexes satellites de (L) appartiennent à la famille $(\mathscr{F}_1)$ lorsque $W_1$ et $W_2$ sont sur la droite [13] [42], ce qui arrive si et seulement si

$$\alpha'\beta + \gamma\beta' = 0, \tag{8}$$

$$\gamma'\beta + \alpha\beta' = 0, \tag{9}$$

entraînant

$$\beta = \beta' = 0. \tag{17}$$

— Les congruences $(A_2A_1)$, $(A_1A_3)$, $(A_3A_4)$ appartiennent à une même suite de Laplace; dans ce cas aussi on remarque que les congruences auxiliaires $(A_1A_4)$ et $(A_2A_3)$ sont encore paraboliques; elles ont pour surface focale unique respectivement $(A_4)$ et $(A_3)$. Les configurations obtenues entrent dans la catégorie des couples $\theta$ admettant un couple T associé [1].

— Si de plus la congruence (L′) est W, on a

$$\alpha\alpha' + \gamma\gamma' - 2\beta\beta' = 0, \text{ d'où } \alpha\alpha' + \gamma\gamma' = 0.$$

La congruence (L) est une congruence de Waelsch et les secondes images des complexes satellites, $W_1$ et $W_2$, sont en involution.

On peut développer des considérations analogues si on exprime que les complexes satellites de (L′) (supposée non W) appartiennent à la famille $(\mathscr{F}_2)$.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] S. Finikoff, *Théorie des couples de congruences*. Moscou, 1956 (en russe); traduction française de Marcel Decuyper, Université des Sciences et Techniques, Lille I.

[2] S. Finikoff, Congruences stratifiables paraboliques. *Mathematische Zeitschrift*, t. **36**, 1933, pp. 344-357.

[3] V. Horak, Les complexes linéaires tangents des congruences de droites. *Czech. Math. Journ.*, T. **13** (88), 1963, pp. 166-188.

[4] C. Read-Derchain, Sur les complexes d'accompagnement des congruences de droites. *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège*, 1968, nº 9-10, pp. 390-398.

[5] C. Read-Derchain, Congruences stratifiables paraboliques. *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège*, 1969, nº 5-6, pp. 171-175.

[6] C. Read-Derchain et B. Rouxel, Sur les complexes de Waelsch des congruences d'un couple T. *Glasnik Matematički* (accepté pour publication).

[7] O. Rozet, Sur les complexes d'accompagnement de Waelsch. *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège*, 1941, nº 11, pp. 559-561.



*Université de Liège*
*Institut de Mathématique*
*15, avenue des Tilleuls*
*4000 Liège (Belgique)*