Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 51e année, 1-2, 1982, pp. 74-81

DU BON USAGE DES CÔNES DANS L'AMÉNAGEMENT DE LA TOUR DE BABEL

par J. BAIR et F. JONGMANS

SUMMARY

When a convex set is the intersection of a family of convex cones, it often happens that its recession cone becomes the intersection of the corresponding translated cones whose apex is the origin. By this way, we obtain several descriptions of the asymptotic cone of an algebraically closed convex cell.

I. INTRODUCTION

Dans l'enchevêtrement des cônes qu'on a cru devoir lier au sort d'un ensemble convexe A au sein d'un espace vectoriel, certaines familles se signalent par leur gracieuseté à restituer A (non vide) quand on forme leur intersection : il s'agit par exemple de la famille des demi-espaces fermés contenant A, de celle des demi-espaces tangents à A, ou de la famille des enveloppes coniques $\mathbb{C}(A, a) = a + [0, \infty[\,(A - a)$ relatives à des points a convenables, ou encore de la famille des cônes-supports $\mathbb{S}(A, a)$. Bien que le foisonnement de pareils faits semble devoir être discipliné quelque peu par la pensée que $\mathbb{S}(A, a)$ est d'une part l'enveloppe algébrique de $\mathbb{C}(A, a)$ (pour une cellule convexe A), et d'autre part une intersection de demi-espaces fermés qui contiennent A, ce n'est pas sans appréhension que, s'arrachant à ce spectacle tourmenté, on porte le regard vers la liaison entre le comportement asymptotique de A et certaines intersections de demi-espaces homogènes, ou de cônes-témoins $\mathbb{T}(A, a) = \mathbb{C}(A, a) - a$, ou encore de cônes-supports centralisés $\mathbb{S}_0(A, a) = \mathbb{S}(A, a) - a$. Là, malgré quelques faits déjà connus, l'impression de chaos est d'autant plus poignante que diverses versions de la structure asymptotique se disputent les faveurs du public. Tantôt on brandit le cône de récession $\mathbb{R}(A) = \{0\} \cup \{u \neq 0 : a + [0 : u) \subset A\ \forall a \in A\}$, tantôt le cône d'infinitude $\mathbb{I}(A) = \{0\} \cup \{u \neq 0 : a + [0 : u) \subset A$ pour un $a \in A\}$; le fait que $\mathbb{R}(A) = \mathbb{I}(A)$ pour les convexes algébriquement ouverts ou fermés, ou que $\mathbb{I}(A) = \mathbb{I}({}^iA) = \mathbb{I}({}^bA) = \mathbb{R}({}^iA) = \mathbb{R}({}^bA)$ pour les cellules convexes, favorise certes le passage de l'un à l'autre, mais pousse à l'introduction du cône asymptote $C_A = \mathbb{I}({}^bA)$ dans l'étude de convexes non algébriquement fermés ou d'ensembles assez voisins des convexes. Enfin, pour prendre en charge des ensembles quelconques, on est conduit à la conception générale d'un cône asymptotique $\mathbb{A}(A)$ [cf. V, p. 330], suffisamment en harmonie avec les autres pour donner toujours $\mathbb{R}(A) \subset \mathbb{I}(A) \subset C_A \subset \mathbb{A}(A)$, voire $\mathbb{A}(A) = C_A$ pour une cellule convexe et même $\mathbb{A}(A) = \mathbb{R}(A) = \mathbb{I}(A)$ pour une cellule convexe algébriquement ouverte ou fermée. Les diverses dénominations ici proposées, respectivement d'après Rocka-

Manuscrit reçu le 18 février 1982.

fellar, Coquet, Bair, Jongmans ont déjà le mérite de remettre un peu d'ordre dans l'édifice. En outre, quand il s'agit d'arriver par des intersections au statut asymptotique de A, c'est assez logiquement le cône de récession qui a la préséance; aussi traiterons-nous essentiellement de lui, en indiquant seulement le transfert vers $\mathbb{A}(A)$ quand l'égalité de celui-ci avec $\mathbb{R}(A)$ est garantie. Avec ces prémisses, nous allons tenter de faire émerger du chaos une conception « duale » du comportement asymptotique d'un convexe; compte tenu de $\mathbb{A}(A) = \mathbb{A}({}^bA) = \mathbb{A}({}^fA)$ [V; 5.9, p. 332], nous ne perdons pratiquement rien, sauf des complications formelles, en supposant A algébriquement fermé.

Outre les définitions déjà rappelées, nous reprenons la terminologie et les notations des ouvrages de référence [II], [III], tandis que les conventions relatives aux divers cônes associés à A sont celles de [V]; en particulier, $\mathbb{C}(A, a)$ contient toujours son sommet a, en accord d'ailleurs avec [IV]. Rappelons tout de même que, dans un espace vectoriel réel E de dimension quelconque, ${}^iA$, ${}^bA$, ${}^fA$, ${}^lA$, ${}^mA$, ${}^pA$ désignent respectivement l'internat (relative interior), l'enveloppe algébrique (lina), la fermeture algébrique, l'enveloppe linéaire (linear hull, affine hull), la marge (${}^bA \setminus {}^iA$) et le profil de A. Si ${}^iA$ (resp. $\mathring{A}$) n'est pas vide, le convexe A est appelé une cellule convexe (resp. un corps convexe).

2. DESCRIPTION D'UN CONVEXE ALGÉBRIQUEMENT FERMÉ PAR DES INTERSECTIONS DE CONES

Il est bien connu que toute cellule convexe algébriquement fermée A est l'intersection de tous les demi-espaces fermés qui la contiennent; on peut même ne retenir que les demi-espaces contenant A et associés à un hyperplan d'appui [III; 1.2.3, p. 9]; dans $\mathbb{R}^n$, il suffit de se limiter aux demi-espaces fermés tangents au corps convexe A, c'est-à-dire aux demi-espaces contenant A et dont la marge est l'unique hyperplan d'appui pour A en chaque point de contact [VII; 18.8, p. 169].

Plus généralement, un convexe algébriquement fermé peut être décrit comme l'intersection de certains cônes autres qu'un demi-espace, puisque le cône-support de A en un point a est lui-même l'intersection des demi-espaces fermés contenant A et dont la marge passe en a. De là à mettre en branle les enveloppes coniques de A, il n'y a qu'un pas, vu que $\mathbb{C}(A, a)$ est le cône minimum de sommet a contenant A. Quant aux choix des sommets de ces cônes, il peut se faire de bien des manières.

2.1. *Pour un convexe algébriquement fermé* A *non vide*, $A = \bigcap_{a\in E} \mathbb{C}(A, a) = \bigcap_{a\in {}^lA} \mathbb{C}(A, a) = \bigcap_{a\in A} \mathbb{C}(A, a)$, de même que $A = \bigcap_{a\notin A} \mathbb{C}(A, a) = \bigcap_{a\in {}^lA\setminus A} \mathbb{C}(A, a)$.

Bien entendu, $A \subset \bigcap_{a\in E} \mathbb{C}(A, a) \subset \bigcap_{a\in {}^lA} \mathbb{C}(A, a) \subset \bigcap_{a\in A} \mathbb{C}(A, a)$. Par ailleurs, si x est un point de $(\bigcap_{a\in A} \mathbb{C}(A, a) \setminus A$, pour un point arbitraire y de A, le segment $[x : y]$ rencontre A suivant un segment pointé $[z : y]$, avec $z \in]x : y[$, puisque A est linéairement fermé [II; p. 3]; on aboutit de la sorte à l'absurdité $x \notin \mathbb{C}(A, z)$. Les trois premières expressions de A sont ainsi justifiées. De plus, $A = \bigcap_{a\in E} \mathbb{C}(A, a) \subset \bigcap_{a\notin A} \mathbb{C}(A, a) \subset \bigcap_{a\in {}^lA\setminus A} \mathbb{C}(A, a)$. Si cette dernière intersection contenait un point b de $\complement A$, b ne pourrait éviter d'être dans ${}^lA$ et de livrer, pour un point c choisi arbitrairement dans A, un point $d \in]b : c[\setminus A$; dès lors, $\mathbb{C}(A, d)$ ne contiendrait pas b, contrairement à ce qui est convenu.

Dans l'intersection des enveloppes coniques $\mathbb{C}(A, a)$ donnant A, tous les points a de A ne doivent pas forcément être pris en considération. De fait, la notion de préordre de Klee défini sur A [II; p. 126] permet de supprimer certains de ces cônes, car elle est liée à l'ordre (pour l'inclusion) des enveloppes coniques.

2.2. *Pour deux points distincts x et y d'un convexe* A, *x précède y pour le préordre de Klee défini sur* A *si et seulement si* $\mathbb{C}(A, x)$ *est inclus dans* $\mathbb{C}(A, y)$.

Supposons tout d'abord que x précède y; il existe un point z de A tel que $y \in]x : z[$. Soit u un point de $\mathbb{C}(A, x)$. Si u est un élément de la droite $(x : y)$, il est évidemment situé dans $\mathbb{C}(A, y)$; sinon, il existe un point v de $]x : u[$ tel que $[x : v] \subset A$; le segment épointé $]u : y[$ rencontre le segment pointé $[v : z]$, inclus dans A; cela prouve l'appartenance de u à $\mathbb{C}(A, y)$. On peut ajouter que $(x : y) \subset \mathbb{C}(A, y)$, donc que tout point de $(x : y)$ est un sommet de $\mathbb{C}(A, y)$.

Réciproquement, supposons $\mathbb{C}(A, x)$ inclus dans $\mathbb{C}(A, y)$. Comme $[x : y) \subset \mathbb{C}(A, x)$, il faut donc que $[x : y) \setminus [x : y]$ contienne un point z de A, de sorte que x précède y.

En application de ce dernier résultat, nous allons fournir quelques énoncés dans lesquels nous nous efforcerons de réduire autant que possible l'ensemble des enveloppes coniques dont l'intersection livre A, en tenant compte bien entendu des diverses hypothèses imposées à l'ensemble A lui-même. Nous dirons que A est engendré par B lorsqu'il est l'enveloppe convexe de B.

2.3. *Pour un convexe algébriquement fermé non vide* A *engendré par un ensemble* B, $A = \bigcap_{a \in B} \mathbb{C}(A, a)$.

Un point x de $A \setminus B$ est une combinaison convexe irréductible $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i a_i$ $(p \geqslant 2)$ de points distincts $a_1, \ldots, a_p$ de B. Il suit chaque a_i pour le préordre de Klee, car par exemple $x \in]a_1 : y]$, où l'on a pris, pour un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit,

$$y = x + \varepsilon(x - a_1) = (\alpha_1 - \varepsilon(1 - \alpha_1))a_1 + (1 + \varepsilon) \sum_{i=2}^{p} \alpha_i a_i \in A.$$

Dès lors, $\bigcap_{a \in B} \mathbb{C}(A, a) \subset \bigcap_{j=1}^{p} \mathbb{C}(A, a_j) \subset \mathbb{C}(A, x)$.

2.4. *Pour un convexe algébriquement fermé* A *non vide et distinct d'une variété linéaire,* $A = \bigcap_{a \in {}^m A} \mathbb{C}(A, a)$.

Si l'internat de A est vide, ${}^m A$ coïncide avec A et l'énoncé 2.1 peut être appliqué. Par ailleurs, une cellule convexe distincte d'une variété linéaire et d'une demi-variété linéaire est engendrée par sa marge [III, II.5.9, p. 40]; le résultat 2.3 est alors d'application. Reste le cas d'une demi-variété linéaire A algébriquement fermée : tout point de ${}^i A$ suit visiblement n'importe quel point de ${}^m A$ pour le préordre de Klee, ce qui permet de conclure grâce à 2.1 et 2.2.

Il est à noter que, pour une demi-variété linéaire algébriquement fermée A, tous les points marginaux de A appartiennent à la même classe de Klee de A : en conséquence, A se réduit à son enveloppe conique depuis un point arbitraire de sa marge. Cette observation suggère de tenir compte des variétés linéaires éventuellement contenues dans ${}^m A$:

2.5. *Si* A *est un convexe algébriquement fermé non vide de copointure finie* (*en particulier un convexe algébriquement fermé non vide de dimension finie*), $A = \bigcap_{a \in V} \mathbb{C}(A, a)$ *où* V *est un ensemble obtenu en choisissant un point* (*au moins*) *dans chaque variété extrême de* A.

Sous les hypothèses de l'énoncé, A est engendré par ses variétés extrêmes et ses demi-variétés extrêmes [III; II.5.5, p. 38]. L'énoncé 2.3 permet alors de conclure, puisque tous les points d'une même variété extrême appartiennent à la même classe de Klee, et que tout point d'une demi-variété extrême suit un point arbitraire de la variété extrême marginale.

2.6. *Dans* $\mathbb{R}^n$, *un convexe fermé* A *non vide et sans droites coïncide avec* $\bigcap_{a \in {}^pA} \mathbb{C}(A, a)$.

Il s'agit d'une banale application de 2.5 puisque les variétés extrêmes d'un convexe fermé A ne contenant aucune droite se confondent avec les points extrêmes de A.

Dans ce dernier énoncé, peut-on remplacer le profil ${}^pA$ par son sous-ensemble exp A formé des points exposés de A? Pour l'instant, nous sommes seulement en mesure de répondre par l'affirmative dans le plan numérique; l'extension du résultat aux convexes sans droites dans un espace de dimension finie quelconque n'est encore qu'une timide conjecture. (1)

2.7. *Dans* $\mathbb{R}^2$, *un convexe fermé* A *non vide et sans droites coïncide avec* $\bigcap_{a \in \exp A} \mathbb{C}(A, a)$.

Soient A un convexe fermé de dimension 2 (la dimension 1 n'oppose aucune résistance), a un point extrême non exposé. En a, il existe une seule droite d'appui D, dont l'intersection B avec A est un segment vrai ou une demi-droite d'extrémité a. L'enveloppe conique $\mathbb{C}(A, a)$ est un demi-plan ouvert P de marge D, complété par la demi-droite $\mathbb{C}(B, a)$; toute demi-droite $[a : x)$ menée par a et un point x de P rencontre en effet A ailleurs qu'en a, sinon sa droite-support serait visiblement une deuxième droite d'appui en a. Supposons qu'existe $b \in (\bigcap_{x \in \exp A} \mathbb{C}(A, x)) \setminus \mathbb{C}(A, a)$: grâce à 2.6, il suffit de montrer l'absurdité de cette hypothèse.

Traitons d'abord le cas $b \notin D$. On peut trouver des points $a' \in A$ tel que $a \in]b : a'[$, $d \in B \setminus \{a\}$ et $c \in A \cap \Sigma$, où Σ est le demi-plan associé à la droite $(a : b)$ et ne contenant pas B; quitte à prendre d assez proche de a, on peut toujours s'arranger pour que a' n'appartienne pas au triangle de sommets b, c et d, c'est-à-dire pour que l'enveloppe convexe ${}^c\{a', b, c, d\}$ soit un quadrilatère convexe Q. On construit un disque ouvert C centré sur a et de rayon suffisamment petit pour que ${}^bC$ soit contenu dans l'internat de Q; en conséquence, toute demi-droite $[b : x)$ de $\mathbb{C}(C, b)$ va rencontrer l'intérieur du quadrilatère ${}^c\{a, a', c, d\}$, donc ${}^iA$, en des points « situés au-delà » de C, plus précisément en des points $u \in {}^iA \setminus C$ tels que $[b : x) \cap C \subset]b : u[$. En vertu du théorème de Straszewicz [VII; 18.6, p. 167], on peut trouver dans C un point $y \in \exp A$. Comme A est fermé, $[b : y] \cap A = [y : m]$, où m est un point marginal de A. Mais $[b : y)$ rencontre ${}^iA$ en des points u tels que $y \in]b : u[$, ce qui exige $y = m$, sinon y serait intérieur à A. D'où l'absurdité $b \notin \mathbb{C}(A, y)$.

(1) *Note ajoutée sur épreuves.* Une étude due à De Wilde a changé cette conjecture en certitude.

Supposons à présent $b \in D$. Soient c un point situé dans $A \cap P$ et $a' \in B \setminus \{a\}$. On construit un disque ouvert C centré sur a et de rayon suffisamment petit pour que ${}^b C$ ne rencontre ni $[b : c]$, ni $[a' : c]$; toute demi-droite de $\mathbb{C}(C, b)$ incluse dans $P \cup \{b\}$ rencontre l'intérieur du triangle ${}^c\{a, a', c\}$, donc ${}^i A$, en des points situés au-delà de C. On conclut comme dans le premier cas en remarquant qu'un point exposé de A est obligatoirement situé dans P dès qu'on le prend assez proche de a pour exclure le deuxième point marginal éventuel de A sur B.

Remarques. a) Dans l'énoncé 2.1 (et dans ses conséquences), l'hypothèse de fermeture algébrique pour A ne peut être supprimée : par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, si $A = \{(x, y) : y < 0\} \cup (]-\infty, 0[\times \{0\})$, $\bigcap_{a \in A} \mathbb{C}(A, a)$ n'est pas A, mais bien ${}^b A = \{(x, y) : y \leqslant 0\}$.

b) Le résultat 2.3 s'applique même à des convexes algébriquement fermés qui ne sont pas des cellules, par exemple à l'enveloppe convexe d'une famille libre infinie, qui est un convexe non vide algébriquement fermé et d'internat vide [III; II.4.10, p. 28].

2.8. *Dans les énoncés* 2.1, 2.3, 2.4, *on est en droit de substituer les cônes-supports* $\mathbb{S}(A, a)$ *aux enveloppes coniques* $\mathbb{C}(A, a)$ *pour peu que* A *soit une cellule convexe (algébriquement fermée); cette substitution est permise inconditionnellement dans* 2.5, 2.6 *et* 2.7.

Si A est une cellule convexe, $\mathbb{C}(A, a)$ en est une aussi, dont l'internat inclut ${}^i A$; de la sorte, $A = {}^b A = {}^b\bigcap \mathbb{C}(A, a) = \bigcap {}^b\mathbb{C}(A, a)$ [II, I.8.1,e, p. 29] $= \bigcap \mathbb{S}(A, a)$. Au surplus, les convexes A visés par 2.5, 2.6 et 2.7 sont des cellules [pour 2,5, cf. VIII coroll. 1, p. 272].

Remarque. On peut aussi, dans les énoncés 2.1 à 2.7, remplacer $\mathbb{C}(A, a)$ par le cône visuel $\mathbb{V}(A, a)$ chaque fois que a fait partie de A, puisque $\mathbb{V}(A, a)$ se confond alors avec $\mathbb{C}(A, a)$ en raison de la convexité de A.

3. GÉNÉRATION DU CÔNE DE RÉCESSION D'UN CONVEXE

Il ressort du paragraphe précédent que certains convexes peuvent s'écrire de diverses manières comme l'intersection de cônes pointés. Or, si l'on translate chacun de ces cônes pour amener son sommet assigné à l'origine, on va voir que l'intersection des nouveaux cônes se rapproche fortement du cône de récession $\mathbb{R}(A)$.

3.1. *Si un convexe non vide* A *est l'intersection de cônes convexes* C_j *de sommet* $s_j (j \in I)$, $\bigcap_{j \in I} (C_j - s_j) \subset \mathbb{R}(A) \subset \bigcap_{j \in I} ({}^b C_j - s_j)$.

Soient x un point non nul de $\bigcap_{j \in I} (C_j - s_j)$ et a un point arbitraire de A. Pour tout indice j de I, la demi-droite $s_j + [0 : x)$ est incluse dans C_j, de même que les demi-droites $[s_j : a + \lambda x)$ pour tout $\lambda \geqslant 0$; en conclusion, la demi-droite $a + [0 : x)$ est contenue dans $\bigcap_{j \in I} C_j = A$, d'où $x \in \mathbb{R}(A)$ et, plus généralement, $\bigcap_{j \in I} (C_j - s_j) \subset \mathbb{R}(A)$.

Considérons à présent une demi-droite $[0 : u)$ incluse dans $\mathbb{R}(A)$ et un point x_0 de A. Comme la demi-droite $x_0 + [0 : u)$ est contenue dans $A = \bigcap_{j \in I} C_j$, pour tout réel positif λ et tout indice j de I, $]s_j + \lambda u : x_0] \subset C_j$, ce qui revient à dire que $s_j + [0 : u) \subset {}^b C_j$, d'où $[0 : u) \subset \bigcap_{j \in I} ({}^b C_j - s_j)$.

Les inclusions établies en 3.1 ne sont malheureusement pas toujours des égalités. En effet, une cellule convexe A algébriquement fermée coïncide, on l'a vu, avec $\bigcap_{a \in {}^1 A} \mathbb{C}(A, a)$, tandis que $\bigcap_{a \in {}^1 A} \mathbb{T}(A, a)$ est seulement le cône d'ouverture intérieure relative $\mathbb{O}(A)$ de A, cône qui diffère généralement de $\mathbb{R}(A)$ puisqu'il ne contient ni les directions asymptotiques, ni les directions marginales de A [V; 5.13, p. 335]. D'un autre côté, dans $\mathbb{R}^2$, soient $A = \{(0, 0)\}$, $C_1 = \{(0, 0)\} \cup \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ et $C_2 = \{(0, 0)\} \cup \{(x, y) : x > 0, y < 0\}$: $C_1 \cap C_2 = A$, mais ${}^b C_1 \cap {}^b C_2 = \{(x, y) : x \geqslant 0, y = 0\}$.

Néanmoins, les égalités peuvent être prouvées sous certaines hypothèses.

3.2. *Supposons qu'un convexe non vide* A *soit l'intersection des cônes convexes* C_j *de sommet* $s_j (j \in I)$. *Si chaque* s_j *appartient à* A, *ou bien si chaque* C_j *est algébriquement fermé,* $\mathbb{R}(A) = \bigcap_{j \in I} (C_j - s_j)$. *Si* ${}^l C_j = {}^l A$ *pour tout* $j \in I$ *et si* A *est une cellule convexe algébriquement fermée,* $\mathbb{R}(A) = \mathbb{A}(A) = \bigcap_{j \in I} ({}^b C_j - s_j)$.

Si chaque sommet s_j appartient à A, soit $[0 : u)$ une demi-droite de $\mathbb{R}(A)$: $s_j + [0 : u) \subset C_j$, d'où, au total, $\mathbb{R}(A) = \bigcap_{j \in I} (C_j - s_j)$. Il est clair, d'après 3.1, que cette dernière égalité est aussi d'application lorsque tous les C_j sont algébriquement fermés.

Lorsque A est une cellule convexe algébriquement fermée, si tous les cônes C_j possèdent comme enveloppe linéaire ${}^l A$, ils ont tous un point interne en commun, à savoir n'importe quel point de ${}^i A$ [II; I.1.3, p. 2]; dès lors,

$${}^b \bigcap_{j \in I} (C_j - s_j) = \bigcap_{j \in I} {}^b (C_j - s_j) = \bigcap_{j \in I} ({}^b C_j - s_j) \text{ [II; I.8.1., p. 29].}$$

Comme $\mathbb{R}(A)$ est algébriquement fermé [V; 5.1; p. 328], égal à $\mathbb{A}(A)$ [V; 5.5, p. 332], et en vertu de l'isotonie de l'enveloppe algébrique [II; I.1.4, p. 3], on a

$$\bigcap_{j \in I} ({}^b C_j - s_j) = {}^b [\bigcap_{j \in I} (C_j - s_j)] \subset {}^b \mathbb{R}(A) \subset \bigcap_{j \in I} ({}^b C_j - s_j),$$

c'est-à-dire $\mathbb{R}(A) = \mathbb{A}(A) = \bigcap_{j \in I} ({}^b C_j - s_j)$.

4. Expression du cône de récession ou du cône asymptotique à l'aide des témoins et des supports centralisés

En particularisant les cônes C_j dont il est question au paragraphe précédent, par exemple en tenant compte des résultats du paragraphe 2, on peut obtenir le cône de récession ou le cône asymptotique de A par diverses voies.

4.1. a) *Pour tout convexe algébriquement fermé non vide* A, $\mathbb{R}(A) = \bigcap_{a \in A} \mathbb{T}(A, a)$.

b) *Si* A *est engendré par* B, $\mathbb{R}(A) = \bigcap_{a \in B} \mathbb{T}(A, a)$.

c) *Si* A *est distinct d'une variété linéaire,* $\mathbb{R}(A) = \bigcap_{a \in {}^m A} \mathbb{T}(A, a)$.

d) *Si* A *est de copointure finie,* $\mathbb{R}(A) = \mathbb{A}(A) = \bigcap_{a \in V} \mathbb{T}(A, a)$.

e) *Dans* R^n, *si* A *ne contient aucune droite,* $\mathbb{R}(A) = \mathbb{A}(A) = \bigcap_{a \in {}^p A} \mathbb{T}(A, a)$ [cf. I].

f) *Dans* R^2, *si* A *ne contient aucune droite,* $\mathbb{R}(A) = \mathbb{A}(A) = \bigcap_{a \in \exp A} \mathbb{T}(A, a)$.

Notons que $\mathbb{R}(A)$ peut différer de $\bigcap_{a \in E} \mathbb{T}(A, a)$, et même de $\bigcap_{a \in {}^1 A} \mathbb{T}(A, a)$, qui, nous l'avons signalé, coïncide avec le cône d'ouverture intérieure. Toutefois, si A est continu dans R^n, Gale et Klee [IV; 1.3, p. 381] ont montré que $\mathbb{C}(A, a)$ est fermé pour chaque point a du complémentaire de A, ce qui donne l'occasion de combiner 2.1 et 3.2 pour parvenir au résultat ci-après. Dans l'énoncé de celui-ci, il est cependant bon de distinguer les ensembles A bornés (donc compacts) des continus non bornés. Pour les premiers, ${}^l A$ peut différer de R^n et a ne pas appartenir à ${}^l A$, sans que cela compromette le caractère fermé de $\mathbb{C}(A, a)$. Au contraire, un convexe continu non borné A dans R^n doit avoir R^n pour enveloppe linéaire, sans quoi il est clair que $\mathbb{C}(A, a)$ et ${}^c(\{a\} \cup A)$ ne sont pas fermés pour peu que $a \notin {}^l A$, comme l'exigerait le théorème de Gale-Klee; en un mot, un convexe continu non borné est un corps convexe.

4.2. *Dans* R^n, *si* A *est un convexe compact non vide,* $\bigcap_{a \in R^n} \mathbb{T}(A, a) = \bigcap_{a \in {}^1 A} \mathbb{T}(A, a) = \bigcap_{a \notin A} \mathbb{T}(A, a) = \bigcap_{a \in {}^1 A / A} \mathbb{T}(A, a) = \{0\}$; *si* A *est un convexe continu non borné,* $\mathbb{R}(A) = \mathbb{A}(A) = \bigcap_{a \in R^n} \mathbb{T}(A, a) = \bigcap_{a \notin A} \mathbb{T}(A, a)$.

4.3. *Si* A *est une cellule convexe algébriquement fermée, on peut, dans les résultats précédents, substituer à chaque témoin* $\mathbb{T}(A, a)$ *le support centralisé* $\mathbb{S}_0(A, a)$; *l'hypothèse sur* A *est vérifiée d'office pour* 4.2 *et, pour* 4.1, *dans les cas* d), e), f).

Il suffit d'invoquer tantôt la dernière proposition de 3.2, tantôt le caractère fermé de $\mathbb{T}(A, a)$.

5. INDICATIONS COMPLÉMENTAIRES

Certains cas particuliers des énoncés ci-dessus restituent ou complètent des propriétés connues. Ainsi, le signalement du cône asymptotique d'un polyèdre convexe est immédiat [III; III.1.3, p. 54; IX]. De même, si, pour une cellule convexe algébriquement fermée A, on prend pour cônes C_j tous les demi-espaces fermés contenant A, l'intersection des demi-espaces homogènes correspondants n'est autre que le polaire du cône-barrière $\mathbb{B}(A)$ de A [V; 6.19, p. 340]; enfin, dans R^n, si l'on se tient aux demi-espaces tangents à A, le résultat de Rockafellar mentionné plus haut permet d'engendrer $\mathbb{R}(A)$ en partant de l'ensemble reg A des points réguliers de A [VI; p. 9]. Rassemblons ces choses dans l'énoncé suivant.

5.1. *Si* A *est le polyèdre convexe* $\bigcap_{j=1}^{n} \{x : f_j(x) \leqslant \alpha_j\}$, $\mathbb{R}(A) = \mathbb{A}(A) = \bigcap_{j=1}^{n} \{x : f_j(x) \leqslant 0\}$; *pour une cellule convexe algébriquement fermée,* $\mathbb{R}(A) = \mathbb{A}(A) = {}^*\mathbb{B}(A)$; *dans* R^n, *pour un convexe fermé* A, $\mathbb{R}(A) = \mathbb{A}(A) = \bigcap_{a \in \operatorname{reg} A} \mathbb{T}(A, a) = \bigcap_{a \in \operatorname{reg} A} \mathbb{S}_0(A, a)$.

BIBLIOGRAPHIE

I. BAIR, Some characterizations of the asymptotic cone and the lineality space of a convex set, *Math. Oper. Stat., Ser. Optimization*, **12**, 1981, pp. 173-176.

II. BAIR-FOURNEAU, Étude géométrique des espaces vectoriels — une introduction, *Lect. Notes in Math.*, **489**, Springer, 1975.

III. BAIR-FOURNEAU, Étude géométrique des espaces vectoriels II — polyèdres et polytopes convexes, *Lect. Notes in Math.*, **802**, Springer, 1980.

IV. GALE-KLEE, Continuous convex sets, *Math. Scand.*, **7**, 1959, pp. 379-391.

V. JONGMANS, Cris et chuchotements des cônes, *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège*, **49**, 1980, pp. 312-346.

VI. JONGMANS, Contribution aux fondements de la calvitie mathématique, *ibid.*, **50**, 1981, pp. 8-15.

VII. ROCKAFELLAR, Convex analysis, Princeton Univ. Press, 1970.

VIII. VANGELDÈRE, Quelques propriétés des ensembles convexes algébriquement fermés, *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège*, **37**, 1968, pp. 271-273.

IX. BRAGARD-VANGELDÈRE, Points efficaces en programmation à objectifs multiples, *ibid.*, **46**, 1977, pp. 27-41.