Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 51e année, 1-2, 1982, pp. 82-94

LE LATTIS DES SOUS-ALGÈBRES D'UNE ALGÈBRE DE HEYTING FINIE

par L. VRANCKEN-MAWET

SUMMARY

In this paper, we investigate the subalgebra lattice of a finite Heyting algebra. Among other things, we prove that this lattice is always lower semimodular. We also characterize those finite Heyting algebras whose subalgebra lattice is distributive, dually atomistic or Boolean. Finally, we prove that a finite Heyting algebra is isomorphic with the Frattini subalgebra of some finite Heyting algebra if and only if it contains a least $\wedge$-irreducible element.

To achieve these results, we adapt to the finite Heyting algebras the well-known duality between finite distributive lattices and finite posets.

INTRODUCTION

Le but de ce travail est d'étudier le lattis des sous-algèbres d'une algèbre de Heyting finie. La méthode utilisée est basée sur la correspondance entre lattis distributifs finis et ensembles ordonnés finis ([2], p. 61-62), que nous particularisons au cas des algèbres de Heyting. Pour étendre cette correspondance à toute la catégorie, il convient de considérer la notion de morphisme introduite par Pierce ([4], p. 37) et aussi par Williams ([6], p. 2).

Le premier chapitre est consacré à l'étude des congruences définies sur un ensemble ordonné X. Nous caractérisons les atomes du lattis des congruences de X, noté Con(X), et nous décrivons le supremum et l'infimum d'éléments de Con(X) dans certains cas particuliers.

Dans le deuxième chapitre, nous établissons la semi-modularité de Con(X) et nous caractérisons les ensembles ordonnés dont le lattis des congruences est distributif, atomistique ou booléen. De plus, nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu'à un ensemble ordonné X, il soit possible d'associer un ensemble ordonné Y tel que X soit isomorphe au quotient Y/η_Y où η_Y désigne le supremum des atomes de Con(Y).

Enfin, dans le troisième chapitre, en utilisant la dualité signalée plus haut, nous traduisons ces résultats et obtenons des propriétés du lattis des sous-algèbres d'une algèbre de Heyting finie.

NOTATIONS GÉNÉRALES

Comme d'habitude, nous confondons sous un même symbole toute algèbre et son support. De même, pour désigner un ensemble ordonné, nous écrivons souvent X en lieu et place de $\langle X, \leqslant \rangle$.

Présenté par J. Varlet, le 18 février 1982

Les symboles $\cap$, $\cup$, —, $\times$ ont leur signification ensembliste habituelle; union, intersection, complémentaire ou différence, produit cartésien.

Un *idéal d'ordre* (resp. *filtre d'ordre*) d'un ensemble ordonné X est un sous-ensemble de X qui contient les éléments inférieurs (resp. supérieurs) à ses éléments. A tout élément x de X on peut associer l'idéal (resp. le filtre) d'ordre engendré par x. C'est l'ensemble des éléments inférieurs (resp. supérieurs) ou égaux à x. On le note $(x]$ (resp. $[x)$). L'ensemble des éléments strictement inférieurs (resp. supérieurs) à x est noté $(x[$ (resp. $]x)$). L'idéal d'ordre (resp. le filtre d'ordre) engendré par un sous-ensemble A de X et noté (A] (resp. [A)) est l'union des idéaux d'ordre (resp. filtres d'ordre) engendrés par ses éléments.

Rappelons qu'un élément $x \in \mathrm{X}$ pour lequel il n'existe aucun élément qui lui soit strictement inférieur (resp. supérieur) est dit *minimal* (resp. *maximal*). L'ensemble des éléments minimaux (resp. maximaux) de X est noté Min X (resp. Max X).

Si x et y sont des éléments de X, on dit que *x est couvert par y* (ou *y couvre x*) lorsque $x < y$ et qu'il n'existe aucun élément strictement compris entre x et y, ce que l'on note $x \prec y$.

La notation $x \parallel y$ signifie que x et y sont des éléments de X incomparables.

Si A est une partie de X, nous la qualifions de *convexe* si, dès qu'elle contient deux éléments comparables x et z, les éléments compris entre x et z appartiennent aussi à A.

La chaîne à n éléments ($n \in \mathbb{N}$), l'antichaîne de cardinal p ($p \in \mathbb{N}$) et l'algèbre de Boole à k atomes ($k \in \mathbb{N}$) sont notées respectivement, $\mathbf{n}$, $\overline{\mathbf{p}}$, $\mathbf{2}^k$.

Nous serons amenés à considérer le lattis Eq(X) des équivalences définies sur l'ensemble ordonné X. Si $\theta \in \mathrm{Eq(X)}$, nous écrivons souvent $x\theta t$ au lieu de $(x, t) \in \theta$. Une classe de l'équivalence θ est appelée θ-classe. Le supremum dans Eq(X) de deux équivalences θ et φ est noté $\theta \vee_{\mathrm{eq}} \varphi$. Les symboles ω et ι désignent l'identité et l'équivalence universelle respectivement.

Enfin, rappelons qu'un *idéal premier* d'un lattis L est une partie propre non vide I de L, satisfaisant aux conditions :

$$x, y \in \mathrm{I} \Leftrightarrow x \vee y \in \mathrm{I},$$
$$x, y \in -\mathrm{I} \Rightarrow x \wedge y \in -\mathrm{I}.$$

Une *algèbre de Heyting* $\langle \mathrm{A}; \vee, \wedge, *, 0, 1\rangle$ est un lattis distributif borné $\langle \mathrm{A}; \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ sur lequel on définit une opération binaire $*$ qui, au couple (x, y), associe le pseudo-complément relatif de x par rapport à y, noté $x * y$, et qui se définit comme suit :

$$z \wedge x \leqslant y \Leftrightarrow z \leqslant x * y, \text{ pour tout } z \in \mathrm{A}.$$

1. *Congruences sur un ensemble ordonné* $(\mathrm{X}, \leqslant)$.

Soient X et Y deux ensembles ordonnés. Suivant Williams ([6]), une application φ de X dans Y est appelée *morphisme* lorsqu'elle satisfait l'égalité

$$(x\varphi] = (x]\varphi, \text{ pour tout } x \in \mathrm{X}.$$

Il est clair qu'un morphisme est un isomorphisme si et seulement s'il est bijectif.

La notion de morphisme permet d'introduire celle de congruence sur un ensemble ordonné X. Une relation d'équivalence θ définie sur X est une *congruence* si et seulement si l'ensemble quotient X/θ peut être muni de façon unique d'une structure ordonnée telle que la surjection canonique $X \twoheadrightarrow X/\theta$ soit un morphisme. En fait, si C_1 et C_2 sont des éléments de X/θ, nous dirons que $C_1 \leqslant C_2$ si et seulement s'il existe $x \in C_1$, $y \in C_2$ tels que $x \leqslant y$, ce qui assure l'isotonie de la surjection canonique $X \twoheadrightarrow X/\theta$. Dès lors, on voit que les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équivalence θ définie sur X soit une congruence, sont les suivantes :

(i) si $x \leqslant y \,\theta\, z$, alors il existe $t \in X$ tel que $x \,\theta\, t \leqslant z$,

(ii) les θ-classes sont convexes.

Il en résulte notamment que ω et ι sont toujours des congruences.

1.1. Lemme. *Soient* X *un ensemble ordonné et* θ *une équivalence sur* X *vérifiant* (i). *L'intersection des équivalences à classes convexes qui contiennent* θ *est une congruence.*

Démonstration. Construisons inductivement φ_n; $n \in \mathbb{N}$, comme suit :

$x\varphi_0 y$ si $x \,\theta\, y$,
$x\varphi_n y$ si $x\varphi_{n-1}y$ ou s'il existe un triplet (t, u, v) tel que $t < u < v$ et $(x\varphi_{n-1}t\varphi_{n-1}v$ et $y\varphi_{n-1}u)$ ou $(y\varphi_{n-1}v\varphi_{n-1}t$ et $x\varphi_{n-1}u.)$

L'union des φ_n, notée Φ, est une équivalence. Il est évident qu'elle est réflexive et symétrique. Pour prouver qu'elle est transitive, supposons $x\varphi_{n_1}y$, $y\varphi_{n_2}z$, notons n_0 le plus grand des naturels n_1 et n_2 et démontrons par récurrence sur n_0 que $x\varphi_{2n_0}z$.

Si $n_0 = 0$, c'est évident. Sinon, supposons la propriété vérifiée pour $n_0 - 1$ et démontrons-la pour n_0.

Si $x\varphi_{n_0-1}y$ et $y\varphi_{n_0-1}z$, c'est évident. D'autre part, supposons que $x\varphi_{n_0-1}y$, $y\varphi_{n_0-1}t\varphi_{n_0-1}v$ et $z\varphi_{n_0-1}u$ avec $t < u < v$. Il vient immédiatement $x\varphi_{2(n_0-1)}t\varphi_{2(n_0-1)}v$ et $z\varphi_{2(n_0-1)}u$, d'où on déduit $x\varphi_{2n_0-1}z$ et donc $x\varphi_{2n_0}z$.

De plus, s'il existe des triplets $t_1 < u_1 < v_1$, $t_2 < u_2 < v_2$ tels que

$$x\varphi_{n_0-1}t_1\varphi_{n_0-1}v_1,\ y\varphi_{n_0-1}u_1,$$
$$y\varphi_{n_0-1}t_2\varphi_{n_0-1}v_2,\ z\varphi_{n_0-1}u_2,$$

on a $u_1\varphi_{2(n_0-1)}t_2\varphi_{2(n_0-1)}v_2$ et donc $z\varphi_{2n_0-1}u_1$. Dès lors, il vient $x\varphi_{2n_0}z$.

Un raisonnement analogue fournit le résultat dans les autres cas.

Il est clair que cette équivalence admet des classes convexes. De plus, démontrons par récurrence sur n que si x, y, z sont des éléments de X tels que $x < y\varphi_n z$, alors il existe $t \in X$ tel que $x \,\Phi\, t \leqslant z$. Si $n = 0$, c'est évident. En général, supposons la propriété vérifiée pour $n - 1$ et démontrons-la pour n. Si $y\varphi_{n-1}z$, la conclusion est immédiate. Sinon, on peut supposer qu'il existe un triplet $t < u < v$ tel que

$$v\varphi_{n-1}t\varphi_{n-1}y \text{ et } z\varphi_{n-1}u.$$

De $x < y\varphi_{n-1}t$, on déduit l'existence de $t' \in X$ tel que $x \,\Phi\, t' \leqslant t < u\varphi_{n-1}z$ et donc, il existe $u' \in X$ tel que $x \,\Phi\, t' \,\Phi\, u' \leqslant z$. Dès lors $x \,\Phi\, u' \leqslant z$.

L'autre cas se traite de manière analogue.

L'union des φ_n est donc une congruence. Comme elle est à classes convexes, si nous voulons montrer que c'est l'intersection des équivalences à classes convexes contenant θ, il suffit de considérer une équivalence θ' à classes convexes, contenant θ et de démontrer par récurrence sur n que chaque relation φ_n est incluse dans θ'.

Si $n = 0$, c'est évident. Sinon, supposons $\varphi_{n-1} \subset \theta'$ et considérons un élément (x, y) de φ_n. Si $x\varphi_{n-1}y$, on a $x\theta' y$. Sinon, supposons qu'il existe un triplet $t < u < v$ tel que

$$x\varphi_{n-1}t\varphi_{n-1}v \text{ et } y\varphi_{n-1}u.$$

On a $x\theta' t \theta' v$ et $y \theta' u$. La convexité des θ'-classes permet de conclure.

1.2. Proposition. *Ordonné par inclusion, l'ensemble* Con(X) *des congruences sur un ensemble ordonné* X *est un lattis complet.*

Démonstration. Rappelons dans un premier temps que le supremum dans Eq(X) d'une famille de congruences $\varphi_i (i \in \mathrm{I})$ est une équivalence vérifiant (*i*). En effet, si $(x, y) \in \vee_{eq} \{\varphi_i \mid i \in \mathrm{I}\}$, il existe une suite finie $\varphi_{i_0}, \ldots, \varphi_{i_n}$ $(i_k \in \mathrm{I})$ et une suite $x_0, \ldots, x_n$ d'éléments de X telles que

$$x = x_0\varphi_{i_0}x_1 \ldots x_n\varphi_{i_n}y.$$

De $z < x_0\varphi_{i_0}x_1 \ldots x_n\varphi_{i_n}y$, on déduit l'existence d'une suite $y_0, \ldots, y_n$ d'éléments de X telle que

$$z\varphi_{i_0}y_0\varphi_{i_1}y_1 \ldots \varphi_{i_n}y_n \leqslant y.$$

Il suffit pour cela d'appliquer la propriété (i) aux congruences $\varphi_{i_0}, \ldots, \varphi_{i_n}$ successivement. Ainsi, il existe $y_n \in \mathrm{X}$ tel que $y_n \leqslant y$ et $(z, y_n) \in \vee_{eq} \{\varphi_i \mid i \in \mathrm{I}\}$.

Comme ω est une congruence, la proposition 1.2 découle du lemme 1.1; le supremum d'une famille de congruences est l'intersection des équivalences à classes convexes qui contiennent le supremum dans Eq(X) des congruences considérées.

Remarquons cependant que l'infimum d'une famille de congruences ne coïncide pas avec son intersection.

1.3. Exemples.

I) Si I est un idéal d'ordre de X qui inclut Min X, la relation d'équivalence admettant I et — I comme classes est un coatome (i.e. atome dual) de Con(X). Nous le noterons θ_{I}.

II) Si $p \not\geqslant q$ dans X, on note $\theta_{(p,q)}$ l'équivalence engendrée par $\{p, q\}$. Si nous supposons satisfaite l'une des conditions suivantes :

(i) $(p[= (q[$,

(ii) $(p] = (q[$,

alors $\theta_{(p,q)}$ est un atome de Con(X). Dans la suite, tout atome de Con(X) sera appelé *congruence atomique*.

Particularisant les résultats de [3] (p. 98-99), on peut voir qu'il n'y a pas d'autres congruences atomiques. Nous donnons une démonstration particulièrement courte de ce fait.

1.4. Théorème. *Les atomes de* Con(X) *sont les congruences* $\theta_{(p,q)}$ *où* p *et* q *vérifient l'une des deux conditions* (i) *ou* (ii) *de* 1.3. II).

Démonstration. Nous avons déjà signalé en 1.3 II) que les équivalences $\theta_{(p,q)}$ où p et q vérifient l'une des conditions susdites sont des congruences atomiques. Inversement, considérons une congruence θ dont une classe C contienne au moins trois éléments x, y, z. Sans nuire à la généralité, on peut supposer que $y \notin [x)$ et $z \notin [x)$. La congruence définie par

$$\varphi = (\theta \cap -[x)X - [x)) \cup \omega,$$

incluse strictement dans θ et différente de ω montre que θ n'est pas atomique.

Afin de prouver que toute congruence atomique θ ne peut admettre qu'une seule classe distincte d'un singlet, supposons que C_1 et C_2 sont des classes distinctes (différentes d'un singlet) d'une congruence atomique θ. On a $[C_1) \cap C_2 = \varnothing$ ou $[C_2) \cap C_1 = \varnothing$. Sinon, il existe x, y dans C_1, z, t dans C_2 tels que $x < z$ et $t < y$. Puisque $x < z \,\theta\, t$, il existe $u \in C_1$ tel que $x \,\theta\, u \leqslant t < y \,\theta\, x$, ce qui contredit la convexité de la classe C_1. Supposons donc $[C_1) \cap C_2 = \varnothing$. La congruence ψ définie par

$$\psi = (\theta \cap -[C_1)X - [C_1)) \cup \omega,$$

incluse strictement dans θ et différente de ω interdit à θ d'être atomique.

Il suffit alors de prouver que la classe C à deux éléments d'une congruence atomique θ s'écrit $C = \{p, q\}$, avec $(p[= (q[$ ou $(p] = (q[$.

Supposons que $q \nleqslant p$. De $x < p \,\theta\, q$, on déduit l'existence d'un élément y tel que $x \,\theta\, y < q$ et donc $x = y$ et $x < q$.

Si $x < q \,\theta\, p$, alors il existe t tel que $x \,\theta\, t \leqslant p$, c'est-à-dire $x \leqslant p$ si $p < q$ et $x < p$ si p et q sont incomparables, d'où la conclusion.

Il existe des cas où le supremum de congruences s'obtient de la même façon que dans le lattis des équivalences de l'ensemble ordonné considéré, soit que les congruences sont particulières, soit que l'ensemble X est muni d'une structure ordonnée spéciale.

1.5. Exemples.

I) *Le supremum dans* Eq(X) *de deux congruences est une congruence dans le cas où une des deux congruences est atomique.*

Soient φ une congruence sur X et $\theta_{(p,q)}$ un atome de Con(X). Selon la description du supremum dans Con(X) (1.2), il suffit de montrer que l'équivalence $\theta_{(p,q)} \vee_{\mathrm{eq}} \varphi$ admet des classes convexes. Si tel n'était pas le cas, il existerait a, b, c dans X tels que $a < b < c, a \,\varphi\, p, c \,\varphi\, q$, mais la relation ne contiendrait ni (b, p) ni (b, q). Or, si $b < c\varphi q$, il est possible de choisir x dans X tel que $b \,\varphi\, x \leqslant q$ et donc $b \,\varphi\, x \leqslant p \,\varphi\, a$, d'où on déduit l'existence d'un élément y de X tel que $b \,\varphi\, y \leqslant a < b$. La convexité des φ-classes imposerait $b \,\varphi\, a \,\varphi\, p$, ce qui contredit l'hypothèse.

II) Si l, m, n, r, s sont des éléments de $\mathbb{N}$, nous noterons $X(l, m, n, r, s)$, l'ensemble ordonné

$$([\bar{\mathbf{l}} + \mathbf{m}) \oplus \mathbf{n} \oplus \bar{\mathbf{r}}] + \bar{\mathbf{s}}).$$

La définition de la somme cardinale (resp. ordinale) X + Y (resp. X $\oplus$ Y) des ensembles ordonnés X et Y ainsi que ses propriétés sont mentionnées dans [1].

Soit $X = X(l, m, n, r, s)$. Alors *le supremum dans* Con(X) *et dans* Eq(X) *sont identiques.*

Pour prouver que le supremum dans Eq(X)$\varphi_1 \vee_{\mathrm{eq}} \varphi_2$ de deux congruences φ_1 et φ_2 est une congruence, il suffit de démontrer, par récurrence sur n, la proposition suivante.

Si x, y, z sont des éléments de X tels que $x < y < z$ et s'il existe une suite finie $x_0 = x, x_1, \ldots, x_n$ telle que

$$x_0\varphi_{i_0}x_1\varphi_{i_1} \ldots x_n\varphi_{i_n}z, \; i_k \in \{1, 2\},$$

alors $(x, y) \in \varphi_1 \vee_{\mathrm{eq}} \varphi_2$ et $(y, z) \in \varphi_1 \vee_{\mathrm{eq}} \varphi_2$.

Démontrons la propriété pour $n = 1$. On peut supposer $x\varphi_1 x_1 \varphi_2 z$. Si x_1 est minimal, de $y < z\varphi_2 x_1$, on déduit $y\varphi_2 x_1 \varphi_2 z$, d'où la conclusion. Sinon, comme y n'est ni minimal, ni maximal, on a $x_1 \leqslant y$ ou $y < x_1$. Dans le premier (resp. second) cas, la convexité des φ_2-classes (resp. φ_1-classes) permet de conclure.

En général, si x_n est minimal ou si $x_n < y$, un raisonnement analogue donne le résultat désiré.

Si $y < x_n \varphi_{i_{n-1}} x_{n-1} \dots x_1 \varphi_{i_0} x$, il existe une suite finie $y_0, \dots, y_{n-1}$ telle que

$$y\varphi_{i_{n-1}} y_{n-1} \dots \varphi_{i_0} y_0 \leqslant x < y.$$

De la récurrence, on déduit $x(\varphi_1 \vee_{\mathrm{eq}} \varphi_2)y$ et aussi $y(\varphi_1 \vee_{\mathrm{eq}} \varphi_2)z$.

1.6. Proposition. *Soit* X $=$ X(l, m, n, r, s). *Alors, dans* Con(X), *l'infimum d'une famille de congruences est son intersection.*

Démonstration. Considérons les congruences φ_1 et φ_2 définies sur X. Il est clair que l'équivalence $\varphi_1 \cap \varphi_2$ admet des classes convexes. D'autre part, si x, y, z sont des éléments de X tels que $x < y(\varphi_1 \cap \varphi_2)z$, il existe $v \in$ X tel que $x(\varphi_1 \cap \varphi_2)v \leqslant z$. En effet, de $x < y\varphi_1 z$ et $x < y\varphi_2 z$, on déduit qu'il existe $t \in$ X et $u \in$ X tels que $x\varphi_1 t \leqslant z$ et $x\varphi_2 u \leqslant z$. Si z est minimal, on a $z = t = u$ et on choisit $v = z$. Si z n'est pas minimal et si $x \parallel z$, x est minimal et $t \leqslant u$ ou $u \leqslant t$. Dans le premier cas, on peut choisir $v = t$ puisque $t \leqslant u\varphi_2 x$ et donc $t\varphi_2 x$; dans le second cas, on prend $v = u$ pour une raison semblable.

Enfin, si $x \leqslant z$, on a $x(\varphi_1 \cap \varphi_2)x \leqslant z$. Si $z < x$, la convexité des φ_1-classes et celle des φ_2-classes impliquent que $(x, z) \in \varphi_1 \cap \varphi_2$. La conclusion est alors immédiate.

2. *Etude du lattis des congruences d'un ensemble ordonné* X.

2.1. Définition. Rappelons qu'un lattis L est *semi-modulaire* si $a \wedge b \prec a \Rightarrow b \prec a \vee b$, pour tout a et tout $b \in$ L.

2.2. Lemme. *Si θ est une congruence sur un ensemble ordonné* X, *il existe un isomorphisme entre* Con(X/θ) *et le lattis des congruences sur* X *qui sont supérieures ou égales à* θ.

Cette propriété, vérifiée aussi si on considère des congruences définies sur une algèbre, se démontre facilement. Il suffit d'associer à chaque $\varphi \geqslant \theta$ la congruence φ' définie sur X/θ par $C_1 \varphi' C_2$ si et seulement s'il existe $x \in C_1$, $y \in C_2$ tels que $x \varphi y$.

2.3. Théorème. Con(X) *est semi-modulaire.*

Grâce au lemme 2.2, il suffit de démontrer la propriété voulue en considérant des éléments a et b dans Con(X) tels que $a \wedge b = 0$ et a, atome. Le résultat est alors une conséquence directe de la description du supremum de deux congruences dans le cas où une d'entre elles est atomique (1.5 I)).

2.4. Théorème. *Soit* X *un ensemble ordonné fini. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) Con(X) *est distributif.*
(ii) *il existe* $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$ *tels que* X *soit isomorphe à* X $(1, m, n, 0, 0)$.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii). Supposons que Con(X) soit distributif. Pour prouver que la condition (ii) est alors satisfaite, il suffit de démontrer les trois propositions suivantes :

1) Il existe au plus deux éléments minimaux.

2) S'il existe dans Con(X) un atome $\theta_{(p,q)}$ où $p \parallel q$, alors p et q sont minimaux.

3) S'il existe dans Con(X) un atome $\theta_{(p,q)}$ où $p \prec q$, alors tout élément de X est soit minimal, soit inférieur ou égal à p, soit supérieur ou égal à q.

Supposons-les vérifiées et décrivons les différents cas qui peuvent se présenter.

S'il existe un seul minimal x_0, la proposition 2 interdit l'existence de deux éléments qui le couvrent. Soit x_1 tel que $x_0 \prec x_1$.

S'il existe deux minimaux x_0 et y_0 et si x_1 et x_2 couvrent respectivement x_0 et y_0, plusieurs cas peuvent se présenter.

a) $x_0 < x_2$ et $x_1 \parallel y_0$. Considérons la congruence $\theta_{(x_0,x_1)}$. La proposition 3 impose à x_2 d'être supérieur à x_1. Cette situation est représentée par la figure 1.

b) $x_0 \parallel x_2$ et $x_1 \parallel y_0$. La proposition 3 appliquée à la congruence $\theta_{(x_0,x_1)}$ impose à x_2 d'être supérieur à x_1 et donc à x_0, ce qui est impossible.

c) $x_0 < x_2$ et $y_0 < x_1$. Si $x_2 \succ x_0$ et $x_1 \succ y_0$, la proposition 2 appliquée à la congruence $\theta_{(x_1,x_2)}$ impose à x_1 et x_2 d'être minimaux. Sinon, supposons que x_2 ne couvre pas x_0. Soit x_3 tel que $x_2 > x_3 \succ x_0$. Comme $\theta_{(x_0,x_3)}$ est une congruence, on déduit de la proposition 3 que $x_1 \geqslant x_3 > x_0$, ce qui est impossible.

Comme il n'est pas permis de considérer des éléments x_1, x_2 qui couvrent x_0 et ne sont pas comparables à y_0 (proposition 3 appliquée aux congruences $\theta_{(x_0,x_1)}$ et $\theta_{(x_0,x_2)}$), les autres cas rencontrés sont ceux où un minimal est couvert par un seul élément (Fig. 2) ou lorsque les deux minimaux sont couverts par le même élément unique (Fig. 3).

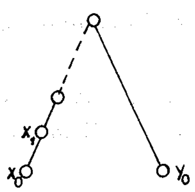

Fig. 1

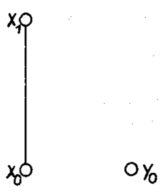

Fig. 2

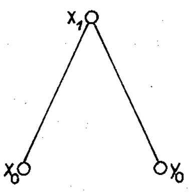

Fig. 3

Dans chacun des cas, les éléments supérieurs à x_1 forment une chaîne. En effet, considérons un couple (t, u) de X $\times$ X, minimal dans $\{(x, y) : x > x_1, y > x_1, x \parallel y\}$. Il déterminerait une congruence atomique $\theta_{(t,u)}$, ce qui est contredit par la proposition 2.

Démontrons à présent les trois propositions signalées.

1) Supposons que l'ensemble ordonné X admette au moins trois éléments minimaux x_0, x_1, x_2. L'existence de trois congruences atomiques $\theta_{(x_0,x_1)}$, $\theta_{(x_1,x_2)}$, $\theta_{(x_0,x_2)}$ et la distributivité de Con(X) imposent l'égalité de

$$\theta_{(x_0,x_1)} \wedge (\theta_{(x_1,x_2)} \vee \theta_{(x_0,x_2)})$$

et de

$$(\theta_{(x_0,x_1)} \wedge \theta_{(x_1,x_2)}) \vee (\theta_{(x_0,x_1)} \wedge \theta_{(x_0,x_2)})$$

et donc $\theta_{(x_0,x_1)} = \omega$, ce qui est impossible.

2) Supposons p et q incomparables, non minimaux et tels que $(p[= (q[$. Si $I = (q] \cup \mathrm{Min}\, X$, $I' = (p] \cup \mathrm{Min}\, X$ et comme Con(X) est distributif, on a

$$\theta_{(p,q)} \wedge (\theta_I \vee \theta_{I'}) = (\theta_{(p,q)} \wedge \theta_I) \vee (\theta_{(p,q)} \wedge \theta_{I'}) = \omega,$$

donc $\theta_{(p,q)} = \omega$, ce qui est impossible.

3) S'il existe dans X un élément x non minimal, non inférieur ou égal à p, non supérieur ou égal à q, considérons les idéaux suivants :

$$I = (p] \cup \mathrm{Min}\, X, I' = (p] \cup (x] \cup \mathrm{Min}\, X.$$

Vu que Con(X) est supposé distributif, on a $\theta_I \wedge (\theta_{(p,q)} \vee \theta_{I'}) = (\theta_I \wedge \theta_{(p,q)}) \vee (\theta_I \wedge \theta_{I'})$ et donc $\theta_I = \theta_I \wedge \theta_{I'}$, ce qui est impossible.

(ii) $\Rightarrow$ (i).

Il faut mettre à profit la description du supremum et de l'infimum de congruences définies sur $X(1, m, n, 0, 0)$ (1.5 II-1.6).

Considérons des congruences $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ et démontrons l'inégalité

$$\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3) \leqslant (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3).$$

Soit $(a, b) \in \varphi_1 \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3)$. On a $a \varphi_1 b$ et une suite $a_0, a_1, \ldots, a_k$ d'éléments de X telle que

$$a = a_0 \varphi_{i_0} a_1 \ldots a_k \varphi_{i_k} b (i_j \in \{2, 3\}, \text{ pour tout } j = 0, \ldots, k).$$

Démontrons par récurrence sur k que $(a, b) \in (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3)$.

D'une part, si $k = 0$, c'est évident. D'autre part, si la propriété est vérifiée pour $k - 1$, alors elle l'est pour k.

α) Si a et b sont comparables, supposons par exemple $a < b$.

I) Si a_k est minimal, $a < b \varphi_{i_k} a_k \Rightarrow a \varphi_{i_k} a_k \varphi_{i_k} b$ et donc $a (\varphi_{i_k} \cap \varphi_1) b$.

II) Sinon, a_k et b sont comparables.

a) Si $a_k < b$, considérons les différentes positions possibles de a par rapport à a_k.

i) $a \leqslant a_k < b \Rightarrow a_k \varphi_1 b$,

ii) $a_k < a < b \Rightarrow a \varphi_{i_k} b$ et donc $a(\varphi_{i_k} \cap \varphi_1) b$,

iii) a minimal : $a_k < b \varphi_1 a \Rightarrow a_k \varphi_1 a \varphi_1 b$.

Dans les cas (i) et (iii), on a $a_k \varphi_1 a$ et $a \varphi_{i_0} \ldots \varphi_{i_{k-1}} a_k$. Appliquant la récurrence, on a $(a, a_k) \in (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3)$. Comme $(a_k, b) \in (\varphi_1 \cap \varphi_{i_k})$, il vient $(a, b) \in (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3)$.

b) Si $b < a_k$, considérons les différents cas qui peuvent se présenter.

i) a_{k-1} minimal : $b < a_k \varphi_{i_k} a_{k-1} \Rightarrow b \varphi_{i_k} a_{k-1}$.

ii) $b < a_{k-1} < a_k \Rightarrow b \varphi_{i_k} a_{k-1}$, vu la convexité des φ_{i_k}-classes.

iii) $a_{k-1} < b < a_k \Rightarrow b \varphi_{i_{k-1}} a_{k-1}$.

Dans chacun des trois cas, on peut remplacer la suite $a_1, \ldots, a_k$ par une suite de longueur $k - 1$ et appliquer la récurrence.

iv) Il reste à étudier le cas où $b < a_k < a_{k-1}$. En considérant les différentes positions possibles de a_{k-2} par rapport à a_k, a_{k-1}, b, on se ramène à des suites de longueur strictement inférieure à k sauf dans le cas où $b < a_k < a_{k-1} < a_{k-2}$ et ainsi de suite jusqu'à ne plus avoir à considérer que le cas où $b < a_k < a_{k-1} \dots < a_1$. Or, comme $a < b$ et $a\varphi_{i_0}a_1$, la convexité des φ_{i_0}-classes impose $a\varphi_{i_0}b$ et donc $a(\varphi_{i_0} \cap \varphi_1)b$.

β) Si $a \mid\mid b$, on peut supposer a minimal.

I) Si a_k est minimal ou si $a_k < b$, on a $a_k\varphi_1 a$ et on peut conclure comme en α)a)i) et iii).

II) Si $b < a_k$, considérons les différents cas possibles.

a) a_{k-1} est minimal : $a_{k-1} < b < a_k \Rightarrow b\varphi_{i_k}a_{k-1}$,
b) $a_{k-1} < b < a_k \Rightarrow b\varphi_{i_k}a_{k-1}$,
c) $b < a_{k-1} < a_k \Rightarrow b\varphi_{i_k}a_{k-1}$.
Dans les trois cas, on conclut comme en α)b)i)-ii)-iii).

d) Il reste à considérer le cas où $b < a_k < a_{k-1}$. Suivant un raisonnement semblable au précédent, on se ramène où cas où $b < a_k < a_{k-1} \dots < a_1\varphi_{i_0}a$. De $b < a_1\varphi_{i_0}a$, on déduit $b(\varphi_{i_0} \cap \varphi_1)a$, d'où la conclusion.

2.5. Théorème. *Soit* X *un ensemble ordonné fini. Alors* Con(X) *est atomistique si et seulement s'il existe n, r, s dans* $\mathbb{N}$ *tels que* X *soit isomorphe à* $X(0, 0, n, r, s)$.

Démonstration. 1) Soit Con(X) atomistique.

α) Toute classe C d'une congruence θ est un arbre, c'est-à-dire $\{y \in C : y \leqslant x\}$ est une chaîne, pour tout $x \in C$. En effet, dans le cas contraire, il existerait des éléments y, z incomparables couverts par x et tels que $x \,\theta\, y\theta z$. Puisque $\theta = \bigvee \{\theta_{(a,b)} \in \mathrm{Con}(X) : a \,\theta\, b\}$, il existe $a_0, \dots, a_k$ dans X tels que $y\theta_{(y,a_0)}a_0\theta_{(a_0,a_1)}a_1 \dots \theta_{(a_k,x)}x$.

De $y < x$ et $z < x$, on déduit $y < a_k$ et $z < a_k$ (les égalités sont exclues car $\theta_{(y,x)} \notin \mathrm{Con}(X)$ et $\theta_{(z,x)} \notin \mathrm{Con}(X)$) et donc $y \leqslant a_{k-1}$ et $z \leqslant a_{k-1}$. Puisque y et z sont incomparables, on a $y < a_{k-1}$ et $z < a_{k-1}$ et ainsi de suite jusqu'à $z < y$, ce qui est impossible.

En appliquant ce résultat à la congruence ι, on voit que X est un arbre.

β) Il n'existe pas dans X des éléments x, y, z, t tels que $y \prec x, t \prec z, x \mid\mid z, y \mid\mid t, x \mid\mid t, y \mid\mid z$.

Pour démontrer cette proposition, nous supposons qu'il existe de tels éléments et nous considérons les différents cas possibles.

a) Si $(y[\, = (t[$, l'équivalence θ dont les classes sont $\{x, z\}$, $\{y, t\}$ et les singlets des autres éléments est une congruence. En effet, d'une part, la convexité des classes est évidente. D'autre part, si $c < a \,\theta\, b$, dans les cas non triviaux, on a $\{a, b\} = \{y, t\}$ ou $\{a, b\} = \{x, z\}$. Si $\{a, b\} = \{y, t\}$, il vient $c < b$. Dans le second cas, supposons $a = x$ et $b = z$. Si $c = y$, on a $y \,\theta\, t < z$. Sinon, tenant compte du fait que X est un arbre, on a $c < y$ d'où $c < t < z$. Comme cette congruence n'est pas le supremum des atomes qui lui sont inférieurs, on conclut.

b) Si $(y[\, \neq (t[$, il est possible de trouver dans $(x[\, \cup (z[$ des éléments x_0, y_0, t_0, z_0 tels que $y_0 \prec x_0, t_0 \prec z_0, x_0 \mid\mid z_0, y_0 \mid\mid t_0, x_0 \mid\mid t_0, y_0 \mid\mid z_0$ avec $x_0 \leqslant x, z_0 \leqslant z$ et tels que $(y_0[\, = (t_0[$.

Le même raisonnement que précédemment permet alors de conclure.

γ) Dans X, on ne peut trouver des éléments x, y, z, t tels que $y \prec x$, $y \prec z$, $z \prec t$ où $x \mid\mid t$. En effet, l'équivalence dont les classes sont $\{x, t\}$, $\{y, z\}$ et les singlets des autres éléments de X est une congruence. D'une part, la convexité des classes ne laisse aucun doute. D'autre part, si $a < z\,\theta\,y$, on a, puisque X est un arbre, $a \leqslant y$. Si $a < x\,\theta\,t$, on a $a \leqslant y\,\theta\,z < t$ et donc $a < t$. Les autres cas se démontrent de manière analogue. Or, cette congruence n'est pas le supremum des atomes qui lui sont inférieurs.

En combinant les résultats α), β), γ), on conclut facilement.

2) Pour prouver la réciproque, montrons que toute congruence vérifie l'inégalité

$$\theta \leqslant \vee\,\{\theta_{(a,b)} \in \mathrm{Con}(X) : a\,\theta\,b\}.$$

Soit $(x, y) \in \theta$.

α) Si $x, y \in B(B = X(0, 0, n, r, 0))$, on peut supposer $x < y$. Il existe $x_0 = x$, $x_1, \ldots, x_m = y$ tels que $x_0 \prec x_1 \ldots \prec x_m$. Dès lors, $(x, y) \in \vee\,\{\theta_{(x_i, x_{i+1})}, i = 0, \ldots, m - 1\}$ où $x_i\,\theta\,x_{i+1}$, en vertu de la convexité des θ-classes.

β) Si $x \in B, y \notin B$ et si nous notons 0 l'élément minimum de B, il vient $0\,\theta\,y$ (car $0 \leqslant x\,\theta\,y$) et donc $0\,\theta\,x$. On est ramené au cas précédent.

γ) Si $x \notin B, y \notin B$, la conclusion est évidente.

2.6. Théorème. Con(X) *est un lattis de Boole si et seulement s'il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* X *soit isomorphe à* X(0, 0, n, 0, 1) *ou à* X(0, 0, n, 0, 0).

La condition est évidemment nécessaire puisque Con(X) doit être à la fois distributif et atomistique. Réciproquement, il est facile de voir que Con(X) est isomorphe au lattis des parties de $\{(p, q) : \theta_{(p,q)}$ est un atome de Con(X)$\}$, ce qui permet de conclure.

2.7. Théorème. *Étant donné un ensemble ordonné fini* X, *il existe un ensemble ordonné* Y *tel que* X *soit isomorphe à* Y/η_Y (η_Y désignant le supremum des atomes de Con(Y)) *si et seulement si* X *admet un minimum*.

Démonstration. Il est clair que la condition est nécessaire puisque les éléments minimaux de Y sont η_Y-congrus.

Pour démontrer que la condition est suffisante, on définit une structure d'ordre sur $Y = \{(a, b) \in X \times X : a \prec b \text{ ou } a = b\}$ et on prouve l'existence d'un isomorphisme entre Y/η_Y et X.

Il est facile de vérifier que la fermeture réflexive de la relation R définie sur Y par

$$(a, b)\,R\,(c, d) \Leftrightarrow b < c \text{ ou } (b = c \text{ et } b \neq a),$$

est une relation d'ordre que nous notons $\leqslant$.

Si nous montrons que les couples (p, q) tels que $\theta_{(p,q)}$ est un atome de Con(Y) sont de la forme $((a, x), (a, y))$, nous pouvons voir aisément que la congruence η_Y lie les couples ayant même origine. La conclusion est alors immédiate.

Appelons 0 le minimum de X et considérons les couples (a, x) et (b, y) de Y.

Supposons $((a, x)[= ((b, y[$. Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, il existe des éléments z et t tels que $z \prec a$ et $t \prec b$. De $(z, a) < (a, x)$, on déduit $(z, a) < (b, y)$ et donc $a \leqslant b$. Puisque $(t, b) < (b, y)$, on a $(t, b) < (a, x)$ et donc $b \leqslant a$, d'où $a = b$.

De même, si l'un des éléments a, b est nul, l'existence dans X d'un élément couvert par l'élément non nul permet de conclure. Nous obtenons ainsi le résultat désiré.

Considérons ensuite le cas où $((a, x)] = ((b, y)[$. Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, il existe un élément t tel que $t \prec a$. De $(t, a) < (a, x)$, on déduit $(t, a) < (b, y)$ et donc $a \leqslant b$. Or, il existe un élément z tel que $z \prec b$. Puisque $(z, b) < (b, y)$, il vient $(z, b) \leqslant (a, x)$ et donc $b \leqslant a$ ou $b = x$ et $z = a$. Si $b \neq a$, le premier cas est à rejeter. Comme $(a, a) < (b, y)$, on a $(a, a) \leqslant (a, x)$ et donc $a = x = b$, d'où la conclusion.

L'inégalité stricte $(a, x) < (b, y)$ élimine le cas $b = 0$. Puisque $(0, 0) < (b, y)$, on a $(0, 0) \leqslant (a, x)$. Si $a = 0$, on a $x = 0$. L'existence d'un élément t tel que $t \prec b$ impose $(t, b) \leqslant (0, 0)$, ce qui est impossible.

3. *Algèbres de Heyting finies.*

Il existe une correspondance biunivoque entre la classe des lattis distributifs finis et celle des ensembles ordonnés finis. Cette bijection, décrite depuis longue date ([2], p. 61-62), associe à chaque lattis distributif fini l'ensemble de ses éléments $\wedge$-irréductibles, avec l'ordre induit. Inversement, l'ensemble des idéaux d'ordre d'un ensemble ordonné fini constitue un lattis distributif où le supremum s'identifie à l'union et l'infimum à l'intersection.

Il a été aussi démontré que, si L_1 et L_2 sont des lattis distributifs finis et S_1, S_2 les ensembles ordonnées correspondants, il existe une bijection entre l'ensemble des homomorphismes $\varphi : L_1 \to L_2$ et celui des fonctions isotones $\varphi : S_2 \to S_1$. Si $\mathscr{P}(L_1)$ (resp. $\mathscr{P}(L_2)$) désigne l'ensemble ordonné des éléments $\wedge$-irréductibles de L_1 (resp. L_2), à l'homomorphisme $\varphi : L_1 \to L_2$ on associe la fonction isotone $\mathscr{P}(\varphi) : \mathscr{P}(L_2) \to \mathscr{P}(L_1)$ décrite par $x\mathscr{P}(\varphi) = \vee \{y : y\varphi \leqslant x\}$, pour tout $x \in \mathscr{P}(L_2)$. Inversement, si $0(S_1)$ (resp. $0(S_2)$) désigne le lattis des idéaux d'ordre de S_1 (resp. S_2), à la fonction isotone $\psi : S_1 \to S_2$, on associe l'homomorphisme $0(\psi) : 0(S_2) \to 0(S_1)$ tel que $U0(\psi) = \psi^{-1}(U)$, pour tout $U \in 0(S_2)$.

Lorsqu'on considère les lattis distributifs finis L comme algèbres de Heyting, les homomorphismes sont modifiés. La correspondance entre homomorphismes et fonctions isotones est décrite par le théorème suivant.

3.1. Théorème. *Si S_1 et S_2 sont deux ensembles ordonnés finis et si $\varphi : S_1 \to S_2$ est une application isotone, alors $0(\varphi) : 0(S_2) \to 0(S_1)$ est un homomorphisme d'algèbre de Heyting si et seulement si $(x\varphi] = (x]\varphi$, pour tout $x \in S_1$.*

Démonstration. L'opération $*$ associe au couple (W, V) de $0(S_1) \times 0(S_1)$ (resp. $0(S_2) \times 0(S_2)$) l'idéal d'ordre $W * V = -[W - V)$. Dès lors, comme on connaît la forme explicite de $0(\varphi)$, on vérifie sans peine que la condition est suffisante.

Réciproquement, fixons x dans S_1. L'inclusion $(x]\varphi \subset (x\varphi]$ est évidente, par isotonie de φ. Inversement, choisissons z dans $(x\varphi]$ et supposons $z \neq y\varphi$, pour tout $y \in (x]$. Soient W et V, les idéaux d'ordre de S_2 définis par

$$\begin{aligned} W &= \cup \{(y\varphi] : y \leqslant x \text{ et } z \nleqslant y\varphi\}, \\ V &= (z]. \end{aligned}$$

Il vient $(x]\varphi \subset W \cup -V$ et donc $(x] \subset \varphi^{-1}(W \cup -V) = \varphi^{-1}(W) \cup -\varphi^{-1}(V)$ d'où on déduit $(x] \subset -[\varphi^{-1}(V) - \varphi^{-1}(W)) = \varphi^{-1}(-[V - W))$, de sorte que $(x]\varphi \subset -[V - W)$. Or, $z \in V - W$ et $z \leqslant x\varphi$, ce qui contredit l'inclusion ci-dessus.

Remarque. Dans le cas infini, Priestley établit une dualité entre la catégorie des lattis distributifs bornés et leurs homomorphismes et celle des espaces topologiques compacts totalement disconnexes pour l'ordre ([5]) et des fonctions continues et isotones.

Il est possible d'adapter cette dualité au cas des algèbres de Heyting en leur associant un espace compact totalement disconnexe pour l'ordre, pour lequel $[V - W)$ est un ouvert, pour tout W, pour tout V, idéaux d'ordre ouverts et fermés. On établit alors une correspondance entre les homomorphismes d'algèbres de Heyting et les fonctions $\varphi : X_1 \to X_2$ continues et vérifiant l'égalité $(x\varphi] = (x]\varphi$, pour tout $x \in X_1$.

3.2. THÉORÈME. *Il existe un antiisomorphisme canonique entre le lattis des sous-algèbres d'une algèbre de Heyting finie* A *et le lattis des congruences définies sur l'ensemble ordonné de ses éléments* $\wedge$*-irréductibles* $\mathscr{P}(A)$.

Démonstration. Si A_1, A_2 sont des algèbres de Heyting finies, à tout homomorphisme $\varphi : A_1 \to A_2$ injectif (resp. surjectif), la dualité associe un morphisme de $\mathscr{P}(A_2)$ dans $\mathscr{P}(A_1)$ surjectif (resp. injectif).

Or, dans l'ensemble des sous-algèbres d'une algèbre donnée, l'inclusion s'exprime par des homomorphismes injectifs (A sous-algèbre de B si et seulement si id : $A \to B$ est un homomorphisme). Par contre, dans l'ensemble des congruences d'un ensemble ordonné fini, elle s'exprime par des morphismes surjectifs (si π_1 (resp. π_2) désigne la surjection canonique $A \to A/\theta_1$ (resp. $A \to A/\theta_2$), il existe un morphisme surjectif h tel que $\pi_1 = h \circ \pi_2$ si et seulement si $\theta_1 \subset \theta_2$), d'où la conclusion.

En utilisant cette correspondance, il est donc possible de traduire les résultats relatifs aux congruences d'un ensemble ordonné X(2.3-2.7) en propriétés du lattis des sous-algèbres d'une algèbre de Heyting finie.

3.3. THÉORÈME. *Le lattis des sous-algèbres d'une algèbre de Heyting finie est dualement semi-modulaire.*

3.4. THÉORÈME. *Le lattis des sous-algèbres d'une algèbre de Heyting finie* A *est distributif si et seulement s'il existe* $m, n \in \mathbb{N}$ *tels que* A *soit isomorphe à* $(\mathbf{m} \times \mathbf{2}) \oplus \mathbf{n}$.

3.5. THÉORÈME. *Le lattis des sous-algèbres d'une algèbre de Heyting finie* A *est dualement atomistique si et seulement si* A *est isomorphe à*

$$(\mathbf{n} + \mathbf{2}^r) \times \mathbf{2}^s \ (n, r, s \in \mathbb{N}).$$

3.6. THÉORÈME. *Le lattis des sous-algèbres d'une algèbre de Heyting finie* A *est un lattis de Boole si et seulement si* A *est isomorphe à* $\mathbf{n}$ *ou à* $\mathbf{n} \times \mathbf{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

3.7. THÉORÈME. *Si* A *est une algèbre de Heyting finie, il existe une algèbre de Heyting finie* B *dont* A *est la sous-algèbre de Frattini si et seulement si* A *admet un élément* $\wedge$*-irréductible minimum.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. BIRKHOFF, Lattice theory, third edition, *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.*, vol. **25**, Providence (1967).

[2] G. GRÄTZER, General lattice theory, *Mathematische Reihe*, vol. **52**, Birkaüser, Basel (1978).

[3] G. HANSOUL, Quasi-ordered systems I, *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège*, **44** (1975), 91-103.

[4] R. S. PIERCE, Compact zero-dimensional metric spaces of finite type, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **130** (1972).

[5] H. Priestley, Ordered topological spaces and the representation of distributive lattices, *Proc. London Math. Soc.* (*Ser.* 3), **24** (1972), 507-530.

[6] J. Williams, Structure diagrams for primitive Boolean algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **47** (1975), 1-9.

Institut de Mathématique
15, avenue des Tilleuls
B-4000 Liège (Belgique)