Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 51e année, nº 5-8, 1982, pp. 167-169

IDÉAUX DES LATTIS C(X) ET C*(X)

par René FOURNEAU

Nous donnons un moyen d'étude des idéaux des lattis de fonctions continues. Nous utilisons les résultats obtenus pour donner quelques propriétés des idéaux maximaux du lattis C(X) et montrons que C*(X) est dépourvu d'idéaux latticiels maximaux.

1. IDÉAUX LATTICIELS ET Z-FILTRES

1.1. Soit X un espace topologique complètement régulier et séparé et soit C(X) [resp. C*(X)] l'ensemble des fonctions continues [resp. continues et bornées] dans X.

Les ensembles C(X) et C*(X) peuvent être érigés en lattis distributifs si on les munit de l'ordre

$$f \leqslant g \Leftrightarrow f(x) \leqslant g(x), \forall x \in \mathrm{X}, f, g \in \mathrm{C(X)} \text{ [resp. C*(X)]}.$$

Les opérations $\wedge$ et $\vee$ sont alors données par

$$(f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x), \forall x \in \mathrm{X},$$
$$(f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x), \forall x \in \mathrm{X}.$$

Nous appellerons *noyau* tout ensemble de la forme

$$\mathrm{N} = \mathrm{N}(f) = \{x \in \mathrm{X} : f(x) = 0\}, f \in \mathrm{C(X)} \text{ [resp. C*(X)]}$$

(rappelons que, si $f \in \mathrm{C(X)}$, $\mathrm{N}(f) = \mathrm{N}(|f| \wedge \bar{1})$, où $\bar{1}$ est la fonction $\bar{1} : \mathrm{X} \to \mathbb{R} : x \to 1$, donc $\mathrm{N}(f) = \mathrm{N}(g)$, $g \in \mathrm{C^*(X)}$).

Un z-filtre sur X est un ensemble $\mathscr{F}$ de noyaux tel que :

(a) si $\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2 \in \mathscr{F}$, alors $\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_2 \in \mathscr{F}$;
(b) si $\mathrm{N}_1 \in \mathscr{F}$ et si N est un noyau tel que $\mathrm{N} \supset \mathrm{N}_1$, alors $\mathrm{N} \in \mathscr{F}$.

Nous renvoyons à [4] pour les propriétés des noyaux et Z-filtres.

1.2. Si $a \in \mathbb{R}$, posons

$$\mathrm{N}_a(f) = \{x \in \mathrm{X} : f(x) \leqslant a\}, f \in \mathrm{C(X)} \text{ [resp. C*(X)]}.$$

Quels que soient $a \in \mathbb{R}$ *et* $f \in \mathrm{C(X)}$ [resp. C*(X)], $\mathrm{N}_a(f)$ *est un noyau.*

En effet, $\mathrm{N}_a(f) = \mathrm{N}([f - \bar{a}]_+)$, où $[\ ]_+$ désigne la partie positive et $\bar{a}$ la constante a sur X.

1.3. *Si* $\mathscr{I}$ *est un idéal du lattis* C(X) [resp. C*(X)],

$$\mathscr{N}_a(\mathscr{I}) = \{\mathrm{N}_a(f) : f \in \mathscr{I}\}$$

est un z-filtre sur X.

Présenté par F. Jongmans, le 17 juin 1982.

Si $N_a(f_1), N_a(f_2) \in \mathcal{N}_a(\mathscr{I})$, on a

$$\begin{aligned} N_a(f_1) \cap N_a(f_2) &= \{x \in X : f_1(x) \leqslant a, f_2(x) \leqslant a\} \\ &= \{x \in X : (f_1 \vee f_2)(x) \leqslant a\} \in \mathcal{N}_a(\mathscr{I}), \end{aligned}$$

puisque $f_1 \vee f_2 \in \mathscr{I}$.

De plus, si $N = N(f) \supset N_a(f_1)$ ($f \in C(X)$ [resp. $C^*(X)$], $f_1 \in \mathscr{I}$) on a

$$N = N_a((|f| + \bar{a}) \wedge f_1),$$

où $(|f| + \bar{a}) \wedge f_1 \in \mathscr{I}$, donc $N \in \mathcal{N}_a(\mathscr{I})$.

1.4. *Si $\mathscr{F}$ est un z-filtre propre sur* X,

$$N_a^{-1}(\mathscr{F}) = \{f \in C(X) \text{ [resp. } C^*(X)] : N_a(f) \in \mathscr{F}\}$$

est un idéal propre du lattis C(X) [resp. C*(X)], *tel que*

$$N_a[N_a^{-1}(\mathscr{F})] \subset \mathscr{F}.$$

Si $f_1, f_2 \in N_a^{-1}(\mathscr{F})$, c'est-à-dire si $N_a(f_1), N_a(f_2) \in \mathscr{F}$, on a

$$N_a(f_1 \vee f_2) = N_a(f_1) \cap N_a(f_2) \in \mathscr{F},$$

donc $f_1 \vee f_2 \in N_a^{-1}(\mathscr{F})$.

Si $g \leqslant f$, ($g \in C(X)$ [resp. $C^*(X)$]), $f \in \mathcal{N}_a^{-1}(\mathscr{F})$, on a $N_a(g) \supset N_a(f)$, donc $N_a(g) \in \mathscr{F}$, ce qui livre $g \in \mathcal{N}_a^{-1}(\mathscr{F})$.

Enfin, la fonction $\overline{a + 1}$ est telle que $N_a(\overline{a + 1}) = \varnothing \notin \mathscr{F}$, donc $\overline{a + 1} \notin \mathcal{N}_a^{-1}(\mathscr{F})$.

2. IDÉAUX MAXIMAUX

2.1. *Si $\mathscr{I}$ est un idéal maximal du lattis* C(X) [resp. C*(X)], *$\mathcal{N}_a(\mathscr{I})$ est l'anneau des noyaux de* X *et $\mathscr{I}$ inclut l'ensemble des fonctions constantes sur* X.

Si $\mathcal{N}_a(\mathscr{I})$ est z-filtre propre, il est inclus dans un z-ultrafiltre $\mathscr{U}$. De plus, $\mathcal{N}_a^{-1}(\mathscr{U})$ est un idéal latticiel propre qui inclut $\mathscr{I}$, donc

$$\mathscr{I} = \mathcal{N}_a^{-1}(\mathscr{U}),$$

vu le caractère maximal de $\mathscr{I}$.

Si $N \in \mathscr{U}$, il existe $f \in \mathscr{I}$ tel que $N = N_a(f)$. En effet, $N = N(g)$ avec $g \in C(X)$ [resp. $C^*(X)$], donc

$$N = \{x : |g(x)| + a \leqslant a\} = N_a(|g| + \bar{a}) \in \mathscr{U};$$

or, $\mathscr{I} = \mathcal{N}_a^{-1}(\mathscr{U})$, donc $f = |g| + \bar{a} \in \mathscr{I}$. Dès lors, $\mathscr{U} \subset \mathcal{N}_a(\mathscr{I})$, ce qui livre

$$\mathcal{N}_a(\mathscr{I}) = \mathscr{U}.$$

Puisque $\mathscr{I} = \mathcal{N}_a^{-1}(\mathcal{N}_a(\mathscr{I}))$, $\mathscr{I}$ comprend les constantes inférieures ou égales à $\bar{a}$.

Si $\mathcal{N}_a(\mathscr{I})$ n'est pas propre, $\varnothing \in \mathcal{N}_a(\mathscr{I})$, donc $\mathscr{I}$ comprend une fonction partout supérieure à a, partant toutes les constantes inférieures ou égales à $\bar{a}$.

Ainsi, dans tous les cas, et puisque ce qui précède est vrai quel que soit $a \in \mathbb{R}$, $\mathscr{I}$ inclut l'ensemble des fonctions constantes.

Soit à présent $N = N(f)$ un noyau. Quitte à remplacer f par $|f| \wedge \bar{1}$, on peut supposer que $\bar{0} \leqslant f \leqslant \bar{1}$. Dès lors, $f \in \mathscr{I}$ et $N \in \mathcal{N}_a(\mathscr{I})$.

2.2. *Tout idéal maximal du lattis* C(X) *inclut l'ensemble des fonctions continues bornées supérieurement sur* X.

En effet, il comprend toutes les constantes sur X.

2.3. *Le lattis* C*(X) *est dépourvu d'idéaux maximaux.*

2.4. *Remarque.* Dans le modèle de **ZF** construit par Solovay [3], on peut déduire aisément (mais à quel prix!) 2.3 de résultats de [2]. On sait en effet ([2, Remark et Theorem 2, p. 382]) que, si X est compact, tout idéal premier (donc tout idéal maximal) de $C(X) = C^*(X)$ est de la forme

$$\{f \in C(X) : f(x) \leqslant C\}.$$

pour un certain $x \in X$ et $C \in \mathbb{R}$. Comme cet idéal est inclus dans

$$\{f \in C(X) : f(x) \subsetneq C + 1\},$$

on voit que C(X), X compact, n'a pas d'idéaux maximaux. On passe au cas de C*(X), X non compact, en remarquant que C*(X) est latticiellement isomorphe à C*(βX).

RÉFÉRENCES

[1] C. BRAUN, *Compactification de Stone-Čech et réflexions en topologie,* Mémoire de licence, Université de Liège, 1976.

[2] R. LOCHAN, D. STRAUSS, Lattice homomorphisms of spaces of continuous functions, *J. London Math. Soc.* (2), **25** (1982), 379-384.

[3] R. SOLOVAY, A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable, *Ann. of Math.*, **92** (1970), 1-56.

[4] R. C. WALKER, *The Stone-Čech compactification,* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974.

Institut Supérieur
Industriel Liégeois
2, rue Stévart
B-4000 Liège

Institut de Mathématique
Université de Liège
15, Avenue des Tilleuls
B-4000 Liège

Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 51e année, nº 5-8, 1982, pp. 170-173

ON BORNOLOGICAL $c_0(E)$ SPACES

by ANTONIO MARQUINA and JEAN SCHMETS

SUMMARY

We essentially prove that if E is a locally convex space where every converging sequence is Mackey converging, then $c_0(E)$ is bornological if and only if E is bornological and such that its strong dual E'_β satisfies Pietsch's condition (B).

INTRODUCTION

Throughout this paper E is a Hausdorff locally convex topological vector space (l.c. space, for short) which system of continuous semi-norms is denoted by P. Then

a) E'_β stands for the strong topological dual of E,

b) $c_0(E)$ is the l.c. space obtained by endowing the linear space of the null sequences of E with the system of semi-norms $\{p^{(\infty)} : p \in P\}$ where each $p^{(\infty)}$ is defined by

$$p^{(\infty)}(e) = \sup_m p(e_m), \forall e \in c_0(E).$$

c) $l^1(E)$ is the l.c. space obtained by endowing the linear space of the sequences e_m of E such that $\sum_{m=1}^{\infty} p(e_m) < \infty$ for every $p \in P$ with the system of semi-norms $\{p^{(1)} : p \in P\}$ where each $p^{(1)}$ is defined by

$$p^{(1)}(e) = \sum_{m=1}^{\infty} p(e_m), \forall e \in l^1(E).$$

Let us also recall that if B is an absolutely convex bounded subset of E, E_B is the normed space obtained by endowing the linear hull of B with the gauge $\|.\|_B$ of B. Such a set B is completing, if E_B is a Banach space. A sequence e_m of E is Mackey converging (resp. fast converging) to e_0 in E if there is an absolutely convex bounded (resp. an absolutely convex completing bounded) subset B of E such that $e_m \to e_0$ in E_B.

Then E'_{mc} (resp. E'_{fc}) is the topological dual of E endowed with the system of the semi-norms

$$\sup_m |\langle e_m, e' \rangle|$$

where e_m is a Mackey (resp. fast) converging sequence of E.

Manuscrit reçu le 17 juin 1982.