Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, Vol. 1, n° 1, 1932, pp. 2 - 5

Une généralisation d'un théorème de Sophus Lie (1),

par L. FOUARGE,
Professeur à l'Université de Liége.

1. Soient

$$z'_\nu = f_\nu(z_1 \dots z_n, a_1 \dots a_r)$$
$$\nu = 1 \dots n$$

et

$$y'_\nu = F_\nu(y_1 \dots y_n, b_1 \dots b_t)$$
$$\nu = 1 \dots n$$

deux ensembles continus de transformations, respectivement ∞^r et ∞^t et donnés dans les régions connexes $[(\mathfrak{Z})(\mathfrak{A})]$ et $(\mathfrak{Z})(\mathfrak{B})]$. Nous supposons :

1° que le point $(z'_1 \dots z'_n)$ est intérieur à $(\mathfrak{Z})$;

2° que r est égal ou supérieur à t ;

3° que si $(a^0_1 \dots a^0_t, a^0_{t+1} \dots a^0_r)$ est un point de la région $(\mathfrak{A})$, il existe dans la région $(\mathfrak{B})$ un point (b^0) pour lequel on a numériquement $b^0_1 = a^0_1, \dots . b^0_t = a^0_t$;

4° que l'ensemble-produit

$$z''_\nu = F_\nu[f_1(z, a) \dots f_n(z, a), b_1 \dots b_t],$$
$$\nu = 1 \dots n$$

dépend de r paramètres essentiels.

Les « équations aux dérivées partielles de Sophus Lie (2) » auxquelles satisfont les $f_\nu(z, a)$ en vertu des hypothèses faites s'écrivent

$$\frac{\partial z'_\nu}{\partial a_k} = -\sum_{\tau=1}^{r-t} \varphi_{\tau k}(a_1 \dots a_r) \frac{\partial z'_\nu}{\partial a_{t+\tau}} + \sum_{j=1}^{t} \psi_{jk}(a_1 \dots a_r)\, \xi_{j\nu}(z'_1 \dots z'_n), \quad (1)$$
$$k = 1 \dots t, \ \nu = 1 \dots n.$$

(1) SOPHUS LIE et ENGEL, *Theorie der Transformationsgruppen*, 3e part., § 110, théor. 47.

(2) Sur un système de Koenig, d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, associées à certains ensembles finis, continus de transformations, p. 15. (*Mém. de la Soc. roy. des Sciences de Liége*, 3e sér., t. XVII, fasc. 1.)

Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, Vol. 1, n° 1, 1932, pp. 2 - 5

Toutefois, pour obtenir ces équations nous devons faire l'hypothèse suivante qui apparemment est restrictive : c'est que les coefficients des $\dfrac{\partial z'_\nu}{\partial a_{t+\tau}}$ ont les déterminations « spéciales » $\varphi_{\tau k}(a_1 \dots a_r)$ [1], au sens où nous avons employé ces fonctions dans un travail précédent.

Le système (1) est complètement intégrable.

Par ce qui précède, on est encore conduit au système complet :

$$\sum_{\nu=1} \left\{ \sum_{j=1}^{t} \psi_{jk}(a)\, \xi_{j\nu}(z') \right\} \frac{\partial \Xi(z', b)}{\partial z'_\nu} + \sum_{h=1}^{t} \lambda_{r+t-h,\,k}(a_1 \dots a_r) \frac{\partial \Xi(z', b)}{\partial b_h} = 0 \quad (2)$$
$$k = 1 \dots t,$$

admettant les n intégrales distinctes : $F_i(z'_1 \dots z'_n,\ b_1 \dots b_t),\ i = 1 \dots n.$

2. Cela posé, nous avons le théorème suivant [2] :

a) *Il existe un groupe continu* ∞^t *contenant la transformation identique pour* $b_j = b_j^0$, $j = 1 \dots t$:

$$y'_\nu = g_\nu(y_1 \dots y_n,\ b_1 \dots b_t) \qquad (3)$$
$$\nu = 1 \dots n$$

tel que l'ensemble continu ∞^t *le plus général qui satisfait aux équations* (2) *dans le domaine du point* (b^0) *s'écrit* (sauf remplacement des y_i par les z'_i)

$$y'_\nu = \Phi_\nu(g_1 \dots g_n), \qquad (4)$$
$$\nu = 1 \dots n,$$

les fonctions $\Phi_1(y_1 \dots y_n) \dots \Phi_n(y_1 \dots y_n)$ *étant soumises à la seule condition d'être holomorphes dans* $(\mathfrak{Z})$.

b) *Soient*

$$\gamma_1(z_1 \dots z_n,\ a_{t+1} \dots a_r) \dots \gamma_n(z_1 \dots z_n,\ a_{t+1} \dots a_r)$$

des fonctions holomorphes dans le domaine de $a_{t+1}^0 \dots a_r^0$, *choisies pour que le point* (z) *défini par*

$$\bar{z}_\nu = \gamma_\nu(z_1 \dots z_n,\ a_{t+1}^0 \dots a_r^0)$$
$$\nu = 1 \dots n$$

---

(1) *Loc. cit.*

(2) Le cas $r = t$, correspond au théorème cité de SOPHUS LIE (*loc. cit.*).

Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, Vol. 1, n° 1, 1932, pp. 2 - 5

soit intérieur à $(\mathfrak{Z})$ (1). *Si dans les formules* (4) *on remplace les* $y_1 \ldots y_n$ *par les seconds membres des égalités*

$$z'_\nu = g_\nu\left[\gamma_1(z, a_{t+1} \ldots a_r) \ldots \gamma_n(z, a_{t+1} \ldots a_r);\, a_1 \ldots a_t\right], \qquad \nu = 1 \ldots n, \tag{5}$$

on obtient un ensemble-produit dépendant de r *paramètres essentiels. De plus l'ensemble continu* ∞^r (5) *vérifie des « équations de Sophus Lie » ne contenant pas les* $\dfrac{\partial z'_\nu}{\partial a_{t+\tau}}$, $\tau = 1 \ldots r - t$.

c) *Supposons qu'ayant effectué d'abord une transformation quelconque de l'ensemble* ∞^r (5), *où* $\gamma_1 \ldots \gamma_n$ *sont des fonctions arbitraires, et ensuite une transformation quelconque d'un ensemble continu* ∞^t :

$$y'_\nu = K_\nu(y_1 \ldots y_n, b_1 \ldots b_t), \qquad \nu = 1 \ldots n, \tag{4'}$$

on trouve un ensemble-produit dépendant de r *paramètres essentiels.*

L'ensemble continu ∞^t (4') *s'obtient par les formules* (4) *en particularisant les fonctions* Φ_ν.

Ces résultats, valables dans une région composée de $(\mathfrak{Z})$ et d'un certain domaine du point (a^0, b^0), se démontrent au moyen des remarques suivantes :

I. — Si l'on pose

$$X'_k f = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_{k\nu}(z'_1 \ldots z'_n) \frac{\partial f}{\partial z'_\nu},$$

on a

$$(X'_k X'_l) = \sum_{s=1}^{t} c_{kls} X'_s f, \quad k, l = 1 \ldots t,$$

les c_{kls} étant des constantes.

II. — Les équations (2) peuvent être mises sous la forme

$$\sum_{\nu=1}^{n} \xi_{j\nu}(z'_1 \ldots z'_n) \frac{\partial \Xi}{\partial z'_\nu} + \sum_{h=1}^{t} \mu_{jh}(b_1 \ldots b_t) \frac{\partial \Xi}{\partial b_h} = 0, \qquad j = 1 \ldots t;$$

---

(1) Les fonctions $\gamma_\nu(z_1 \ldots z_n, a_{t+1} \ldots a_r)$ ne sont soumises à aucune autre restriction.

Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, Vol. 1, n° 1, 1932, pp. 2 - 5

elles sont complètement débarrassées de $a_1 \ldots a_r$ et admettent dans le domaine de $b_1^0 \ldots b_t^0$, n intégrales distinctes $g_\nu (z', b)$, $\nu = 1 \ldots n$ telles que les égalités

$$y'_\nu = g_\nu (y_1 \ldots y_n, b_1 \ldots b_t), \nu = 1 \ldots n$$

définissent un groupe ∞^t contenant la transformation identique pour $b_j = b_j^0$, $j = 1 \ldots t$.

III. — Les fonctions $\xi_{j\nu} (z'_1 \ldots z'_n)$ peuvent être calculées quand on se donne un système de n intégrales distinctes des équations (2).

Rabosée, 10 janvier 1932.