Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, Vol. 69, 1, 2000, pp. 3-11

Séparation libre et séparation conique

Jacques BAIR et Jean-Claude DUPIN

Résumé

Nous caractérisons géométriquement une séparation conique de deux convexes fermés, non vides et disjoints d'un espace euclidien de dimension finie n. Nous rapprochons cette nouvelle notion de la séparation libre introduite récemment par Gritzmann-Klee et de la séparation n-branlante définie par Bair. Nous relions encore nos résultats à d'autres types de séparation conique étudiés par De Wilde et Nieuwenhuis.

Mots clés : Séparations conique, libre, branlante; gaine; ensemble continu.

Classification : 52A20.

Summary

We characterize a conical separation for two closed, non-empty convex sets in a finite dimensional topological vector space. We bring this new notion nearer to the free separation which was introduced by Gritzmann-Klee and to the n-loose separation which was defined by Bair. We also connect our results with other types of conical separation which were studied by De Wilde and Niewenhuis.

Key-words : Conical, free, loose separations, shadow, continuous set.

Title : Free separation and conical separation

Introduction

Dans [9] est introduite la notion de séparation libre de deux convexes A et B d'un espace euclidien de dimension finie. Nous fournissons, dans les propositions 10 et 12, plusieurs caractérisations de cette notion. L'une d'entre elles fait intervenir une séparation conique que nous introduisons à la définition 1; elle permet de mettre en évidence l'ensemble des points à partir desquels on peut effectivement séparer librement A et B (proposition 9) : cet ensemble est décrit simplement et géométriquement à partir d'ensembles faciles à visualiser (proposition 4). En application, on retrouve un résultat de Gritzmann-Klee (corollaire 11) et on met en évidence (proposition 8) un cas de non séparation à l'aide la notion de gaine étudiée par Bair-Dupin [4].

Préliminaires

Dans la suite, A et B sont des fermés convexes de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) non vides et disjoints; x est un point de $\mathbb{R}^n$, Δ une demi-droite fermée d'origine 0. Si $x \neq 0$, Δ_x est la demi-droite $[0 : x)$.

$$\mathbb{R}(A) = \{0\} \cup \{x \neq 0 : \Delta_x + A \subset A\}$$

est le *cône de récession* de A. F étant une partie quelconque de $\mathbb{R}^n$,

$$\mathbb{C}(F, x) = \{x\} \cup (x +]0, +\infty[(F - x))$$

est l'*enveloppe conique* de F à partir du point x; on notera simplement $\mathbb{C}(F)$ l'enveloppe conique de F à partir de l'origine.

A propos de ces notions, on sait que, si $x \notin A$,

$$^{-}\mathbb{C}(A, x) = \mathbb{C}(A, x) \cup (x + \mathbb{R}(A)) \quad [5, \text{p. } 228],$$

où $^{-}\mathbb{C}(A, x)$ désigne l'adhérence de $\mathbb{C}(A, x)$.

Enfin, rappelons la définition de deux notions qui seront exploitées ultérieurement. La *gaine* de A est l'ensemble

$$\mathbb{G}(A) = A \cup \{x \notin A : \mathbb{C}(A, x) = \ ^{-}\mathbb{C}(A, x)\} \quad [4, \text{p. } 301].$$

A est qualifié de *parabolique* lorsque, pour tout $x \notin A$, et toute demi-droite Δ contenue dans $\mathbb{R}(A)$, $x + \Delta$ rencontre A [6, p. 125].

Définition 1 et notation.

A et B sont *coniquement séparés* au point x, en abrégé A et B sont $\mathcal{CS}x$, si

$$x \notin A \cup B \quad \text{et} \quad ^{-}\mathbb{C}(A, x) \cap \ ^{-}\mathbb{C}(B, x) = \{x\}.$$

On note :

$$\{x : A \text{ et } B \text{ sont } \mathcal{CS}x\} = \mathcal{CS}(A, B).$$

Notation 2.

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(A,B) &= \{x : \mathbb{C}(A,x) \cap \mathbb{C}(B,x) \neq \{x\}\}\\ \mathcal{E}_1(A,B) &= \{x : \mathbb{C}(A,x) \cap {}^{-}\mathbb{C}(B,x) \neq \{x\}\}.\end{aligned}$$

Définitions 3 et notation.

Nous dirons que la forme linéaire non nulle $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ *sépare fortement* A de B s'il existe $\varepsilon > 0$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$(\forall x \in A,\ f(x) \leq \gamma - \varepsilon) \quad \text{et} \quad (\forall x \in B,\ f(x) \geq \gamma + \varepsilon);$$

un hyperplan $H = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = \gamma\}$ *sépare fortement* A et B (au sens habituel) si et seulement si f sépare fortement A de B ou $-f$ sépare fortement A de B.

Dans [9], $\Sigma(A,B)$ désigne l'ensemble des formes linéaires qui séparent fortement A de B; A et B sont dits *librement séparés* lorsque $\Sigma(A,B)$ est d'intérieur non vide dans $(\mathbb{R}^n)^*$.

Dans [2], on dit que A et B admettent une *séparation n-branlante* dans $\mathbb{R}^n$ s'il existe n formes linéaires $f_1, \ldots, f_n \in (\mathbb{R}^n)^*$, linéairement indépendantes, séparant fortement A de B.

La proposition suivante fournit une représentation géométrique simple de $\mathcal{E}(A,B)$.

Proposition 4.

$\mathcal{E}(A,B) = \cup(\lambda a + (1-\lambda)b)$, l'union étant étendue aux (λ, a, b) tels que $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$, $a \in A$, $b \in B$ (avec $a \neq b$) et $]a,b[\cap (A \cup B) = \emptyset$.

Preuve. L'inclusion "$\supset$" est évidente.

Pour montrer l'autre inclusion, partons d'un $x \in \mathcal{E}(A,B)$. Il existe une demi-droite Δ telle que $x + \Delta$ rencontre A en un certain a_1, avec $a_1 \neq x$, et rencontre B en un point b_1, avec $b_1 \neq x$. Comme a_1 et b_1 diffèrent, puisque A et B sont disjoints par hypothèse, et comme A et B sont fermés, on a

$$[a_1, b_1] \cap A = [a_1, a]$$

et

$$[a_1, b_1] \cap B = [b, b_1],$$

avec $a \in A$, $b \in B$ et $]a,b[\cap (A \cup B) = \emptyset$. ■

Lemme 5.

F et G étant deux parties non vides quelconques de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$x \in F - G \Leftrightarrow F \cap (x + G) \neq \emptyset.$$

Preuve. Ce lemme est bien connu et sa démonstration est évidente. ∎

Lemme 6.

Soient F une partie non vide quelconque de $\mathbb{R}^n$, K un cône de sommet 0, avec $0 \in K$, et $x \notin F$. Dans ces conditions :

$$x \in F - K \Leftrightarrow (x + K) \cap \mathbb{C}(F, x) \neq \{x\}.$$

Preuve. En vertu du lemme 5,

$$x \in F - K \Leftrightarrow F \cap (x + K) \neq \emptyset.$$

D'une part, on a

$$F \cap (x + K) \neq \emptyset \Rightarrow \mathbb{C}(F, x) \cap (x + K) \neq \{x\}$$

car $x \notin F$, et réciproquement

$$\mathbb{C}(F, x) \cap (x + K) \neq \{x\} \Rightarrow F \cap (x + K) \neq \emptyset$$

car $x + K$ est une cône de sommet x. ∎

Proposition 7.

$$(\complement A) \cap \mathcal{E}_1(A, B) = [\mathcal{E}(A, B) \cup (A - \mathbb{R}(B))] \cap \complement A.$$

Preuve. D'après les préliminaires, les cônes $\mathbb{C}(A, x)$, $\mathbb{C}(B, x)$ et $x + \mathbb{R}(B)$, de sommet x, sont tels que

$$x \in \mathcal{E}_1(A, B) \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbb{C}(A, x) \cap \mathbb{C}(B, x)] \cup [\mathbb{C}(A, x) \cap (x + \mathbb{R}(B))] \neq \{x\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \in \mathcal{E}(A, B) \\ \quad\text{ou} \\ \mathbb{C}(A, x) \cap (x + \mathbb{R}(B)) \neq \{x\}. \end{cases}$$

Or, si $x \notin A$, on a, d'après le lemme 6,

$$\mathbb{C}(A,x) \cap (x+\mathbb{R}(B)) \neq \{x\} \Leftrightarrow x \in A - \mathbb{R}(B).$$

∎

La proposition suivante met en évidence des cas de "non séparation conique" flagrante.

Proposition 8 (Corollaire de la proposition 7).

On suppose que $x \in \mathbb{G}(B) \cap \complement B \cap \complement A$. *Alors* :

$$x \in A - \mathbb{R}(B) \Rightarrow \mathbb{C}(A,x) \cap \mathbb{C}(B,x) \neq \{x\}.$$

Preuve. La gaine $\mathbb{G}(B)$ du convexe B est formée des points x pour lesquels $\mathbb{C}(B,x)$ est fermé [4, (1), p. 301]. ∎

Proposition 9.

Si $\mathbb{R}(A) \cap \mathbb{R}(B) = \{0\}$, *alors* :

$$[\complement(A \cup B)] \cap [\complement\mathcal{CS}(A,B)] = [\complement(A \cup B)] \cap [\mathcal{E}(A,B) \cup (A - \mathbb{R}(B)) \cup (B - \mathbb{R}(A))].$$

Preuve. Supposons que $x \notin A \cup B$.

D'après les préliminaires, puis en appliquant la proposition 7, on trouve :

$$^{-}\mathbb{C}(A,x) \cap {}^{-}\mathbb{C}(B,x) \neq \{x\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} \mathbb{C}(A,x) \cap {}^{-}\mathbb{C}(B,x) \neq \{x\} \\ \text{ou} \\ (x+\mathbb{R}(A)) \cap {}^{-}\mathbb{C}(B,x) \neq \{x\} \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} x \in \mathcal{E}(A,B) \\ \text{ou} \\ x \in A - \mathbb{R}(B) \\ \text{ou} \\ [(x+\mathbb{R}(A)) \cap \mathbb{C}(B,x)] \cup [(x+\mathbb{R}(A)) \cap (x+\mathbb{R}(B))] \neq \{x\}. \end{array}\right.$$

Or, comme $x \notin B$, le lemme 6 garantit :

$$(x + \mathbb{R}(A)) \cap \mathbb{C}(B, x) \neq \{x\} \Leftrightarrow x \in B - \mathbb{R}(A).$$

La conclusion résulte alors du fait que

$$(x + \mathbb{R}(A)) \cap (x + \mathbb{R}(B)) = \{x\}.$$

■

Proposition 10.

Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) A et B sont librement séparés;
(ii) A et B admettent une séparation forte n-branlante;
(iii) A et B ne contiennent aucune droite et $\mathbb{R}(A) \cap \mathbb{R}(B) = \{0\}$.

Preuve. Les notions de séparation libre au sens de Gritzmann-Klee [9] et de séparation forte n-branlante au sens de Bair [2] sont visiblement équivalentes.

Si A et B sont librement séparés, on a $\mathbb{R}(A) \cap \mathbb{R}(B) = \{0\}$, sinon la différence $A - B$ contiendrait une droite D et tout hyperplan séparant A, B serait parallèle à D, ce qui contredit le caractère n-branlant de la séparation. De la même manière, si une droite est incluse dans A ou dans B, celle-ci serait parallèle à tout hyperplan séparant A, B, ce qui est à nouveau impossible.

Réciproquement, supposons que A et B ne contiennent aucune droite et que $\mathbb{R}(A) \cap \mathbb{R}(B) = \{0\}$. Sous ces hypothèses, la différence $A - B$ est fermée [13, 9.1.2, p. 75] et ne contient aucune droite [9, lemma 2.1]; de plus, $0 \notin \overline{(A - B) - \{0\}} = A - B$, d'où $A - B$ et $\{0\}$ admettent une séparation forte n-branlante [2, 3.1, p. 198]. Comme les séparations fortes de A, B et de $\{0\}$, $A - B$ ont lieu simultanément et à l'aide des mêmes formes linéaires [11, 2.5], il en résulte que A et B admettent également une séparation forte n-branlante.

■

Corollaire 11.

Si A est parabolique et B sans droite, alors on peut séparer librement A et B.

Preuve. $A \neq \mathbb{R}^n$, car $\emptyset \neq B \subset \complement A$; donc, A est sans droite.

De plus, $\mathbb{R}(A) \cap \mathbb{R}(B) = \{0\}$, car si $x + \Delta \subset B$ avec $\Delta \subset \mathbb{R}(A)$, alors $x + \Delta$ rencontre A, ce qui est absurde puisque A et B sont disjoints.

La proposition 10 permet de conclure. ■

Remarquons que ce corollaire se retrouve dans la théorème maximum de séparation libre donné par Gritzmann-Klee [9, 2.2]. En effet, ces deux auteurs montrent que deux convexes fermés non-vides et disjoints sont librement séparés dès que l'un ne contient aucune droite et que l'autre est **continu**, en ce sens que sa fonction-support, définie sur la sphère unitaire et à valeurs dans $[0, +\infty]$, est continue. Ce résultat est équivalent à notre énoncé 11, puisque les notions de parabolique et de continu coïncident [6, 6.2; p. 437].

Proposition 12.

Chacune des assertions (i) à (iii) de la proposition 10 est équivalente à chacune des assertions suivantes :
(iv) $^{-}\mathbb{C}(A-B)$ *est sans droite;*
(v) A *et* B *ne contiennent aucune droite, mais sont coniquement séparés (i.e.* $\mathcal{CS}(A,B) \neq \emptyset$*);*
(vi) il existe deux cônes circulaires opposés contenant respectivement A *et* B*;*
(vii) il existe deux points a, b*, et* n *points* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *linéairement indépendants dans* $\mathbb{R}^n$*, tels que, en désignant par* K *le cône convexe, de sommet 0, engendré par* $x_1, \ldots, x_n$ *:*

$$A \subset a - K \quad , \quad B \subset b + K \quad , \quad (a-K) \cap (b+K) = \emptyset.$$

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (iv). D'après la définition 3,

$$\Sigma(A, b) \subset {}^{*}(A-B) = \{f \in (\mathbb{R}^n)^{*} : \forall x \in A-B,\ f(x) \leq 0\}.$$

Dès lors, la séparation libre de A, B entraîne la non-vacuité de l'intérieur $^{*}(A-B)$, ce cône coïncidant avec le cône-barrière C de $^{-}\mathbb{C}(A-B)$, l'adhérence du cône, de sommet 0, engendré par $A-B$ [10, 6.18]. En conséquence, la dimension de C vaut n, de sorte que $^{-}\mathbb{C}(A-B)$ ne contient aucune droite [3, 1.2, p. 732].

(iv) $\Rightarrow$ (iii). Le caractère saillant de $^{-}\mathbb{C}(A-B)$ entraîne que A et B ne contiennent aucune droite. Si $\mathbb{R}(A) \cap \mathbb{R}(B) \neq \{0\}$, il existe une demi-droite Δ d'extrémité 0, deux points a et b dans A et B respectivement tels que $a + \Delta \subset A$, $b + \Delta \subset B$, d'où $a - b + (\Delta - \Delta) \subset A - B$: la droite homogène $\Delta - \Delta$ est alors incluse dans $^{-}\mathbb{C}(A-B)$, ce qui est absurde.

(ii) $\Rightarrow$ (v). Il existe n hyperplans indépendants H_i (pour $i = 1, 2, \ldots, n$) séparant fortement A et B. Leur intersection $\cap_{i=1}^{n} H_i$ se réduit à un singleton $\{x\}$. Le point x n'appartient pas à $A \cup B$ et chaque H_i sépare bien entendu $^{-}\mathbb{C}(A, x)$, $^{-}\mathbb{C}(B, x)$. S'il existe une demi-droite Δ telle que

$$x + \Delta \subset {}^{-}\mathbb{C}(A, x) \cap {}^{-}\mathbb{C}(B, x),$$

alors $x + \Delta \subset \cap_{i=1}^{n} H_i$, ce qui est absurde.

(v) $\Rightarrow$ (iii). Si $\mathbb{R}(A) \cap \mathbb{R}(B) \neq \{0\}$, on peut trouver une demi-droite Δ, des points $a \in A$ et $b \in B$ tels que $a + \Delta \subset A$ et $b + \Delta \subset B$. Dans ces conditions, pour tout $x \in \complement(A \cup B)$, $x + \Delta \subset {}^{-}\mathbb{C}(A, x) \cap {}^{-}\mathbb{C}(B, x)$, ce qui est absurde.

(iii) $\Rightarrow$ (vi). Voir la proposition 7 de [7].

(iii) $\Rightarrow$ (vii). Voir le théorème 2.1 de [12]. ∎

Bibliographie

[1] J. BAIR : Cônes asymptotes et cônes caractéristiques, *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège* 40 (1971), 428–437.

[2] J. BAIR : Séparation forte k-branlante de deux convexes, *Comment. Math. Univ. Carolinae* 18 (1977), 195-203.

[3] J. BAIR : Quelques questions soulevées par le cône barrière d'un convexe, *Comment. Math. Univ. Carolinae* 24 (1983), 731–739.

[4] J. BAIR - J.C. DUPIN : Cover and Bounded Parallel Faces, *Geom. Dedicata* 72 (1998), 299–307.

[5] J. BAIR - F. JONGMANS : Sur l'énigme de l'enveloppe conique fermée, *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège* 52 (1983), 285–294.

[6] N. BOURBAKI : *Espaces Vectoriels Topologiques*, tome V des Eléments de mathématique, Hermann, Paris, 1966.

[7] M. DE WILDE : Some properties of the exposed points of finite dimensional convex sets, *J. Math. Anal. Appl.* 99 (1984), 257–264.

[8] D. GALE – V. KLEE : Continuous convex sets, *Math. Scand.* 7 (1959), 379–391.

[9] P. GRITZMANN - V. KLEE : Separation by hyperplanes in finite-dimensional vector spaces over archimedean ordered fields, *J. Conv. Anal.* 5 (1998), 279–301.

[10] F. JONGMANS : Cris et chuchotements des cônes, *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège* 49 (1980), 312–346.

[11] V. KLEE : Separation and support properties of convex sets – a survey, in : A. Balakrishnan (ed.), *Control Theory and the Calculus of Variations*, Academic Press, New York, 1969, 253–303.

[12] J. NIEUWENHUIS : About separation by cones, *J. Optim. Theory Appl.* 41 (1983), 473–479.

[13] R.T. ROCKAFELLAR : *Convex Analysis*, Princeton, 1972.

Adresse des auteurs :

J. BAIR
Université de Liège
Faculté d'Economie, de Gestion et de Sciences sociales
7, boulevard du Rectorat, B31
B-4000 Liège - BELGIQUE
e-mail : J.Bair@ulg.ac.be

J.C. DUPIN
Université de Valenciennes
Département de Mathématiques
BP - 311
F-59304 Valenciennes Cedex
FRANCE