

## Sur la géométrie de l'espace des opérateurs différentiels linéaires sur $\mathbf{R}$

H. Gargoubi

### Résumé

Nous étudions une famille naturelle à deux paramètres de  $\text{Diff}(\mathbf{R})$ - et  $\text{Vect}(\mathbf{R})$ -modules sur l'espace des opérateurs différentiels linéaires sur  $\mathbf{R}$ . Le problème de classification est résolu en utilisant les cohomologies de l'algèbre de Lie  $\text{Vect}(\mathbf{R})$  des champs de vecteurs sur  $\mathbf{R}$  à coefficients dans l'espace  $\text{Hom}(\mathcal{F}_\lambda, \mathcal{F}_\mu)$  des homomorphismes de densités tensorielles. Les modules des opérateurs différentiels sont liés à la géométrie différentielle projective. Nous trouvons une série de classes de cohomologie non triviales dans  $H^1(\mathfrak{sl}_2(\mathbf{R}); \text{Hom}(\mathcal{F}_{\frac{n}{2}}, \mathcal{F}_{-\frac{n}{2}-1}))$ , qui apparaissent en considérant la restriction des  $\text{Vect}(\mathbf{R})$ -modules des opérateurs différentiels à la sous-algèbre des symétries projectives  $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{R}) \subset \text{Vect}(\mathbf{R})$ .

Mots-clés : Opérateurs différentiels, algèbres de Lie de champs de vecteurs, cohomologie

Classification AMS : 17B66, 58G35

### Abstract

We study a natural two-parameter family of  $\text{Diff}(\mathbf{R})$ - and  $\text{Vect}(\mathbf{R})$ -modules on the space of all linear differential operators on  $\mathbf{R}$ . The classification problem is solved using cohomologies of the Lie algebra  $\text{Vect}(\mathbf{R})$  of vector fields on  $\mathbf{R}$  with coefficients in the space  $\text{Hom}(\mathcal{F}_\lambda, \mathcal{F}_\mu)$  of linear maps on tensor-densities. The modules of differential operators are related to the projective differential geometry. We find a series of nontrivial cohomology classes in  $H^1(\mathfrak{sl}_2(\mathbf{R}); \text{Hom}(\mathcal{F}_{\frac{n}{2}}, \mathcal{F}_{-\frac{n}{2}-1}))$  appearing if one considers the restriction of  $\text{Vect}(\mathbf{R})$ -modules of differential operators to the subalgebra of projective symmetries  $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{R}) \subset \text{Vect}(\mathbf{R})$ .

Keywords : Differential operators, Lie algebras of vector fields, cohomology

AMS Classification : 17B66, 58G35

# 1 Introduction

Soit  $\mathcal{D}^k$  l'espace des opérateurs différentiels linéaires d'ordre  $k$  sur  $\mathbf{R}$  (ou  $S^1$ )  $A : C^\infty(\mathbf{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbf{R})$  :

$$A = a_k(x) \frac{d^k}{dx^k} + \dots + a_0(x) , \quad (1)$$

où  $a_i \in C^\infty(\mathbf{R})$ .

Nous nous proposons d'étudier l'espace  $\mathcal{D}^k$  comme module sur le groupe  $\text{Diff}(\mathbf{R})$  des difféomorphismes de  $\mathbf{R}$  (et sur l'algèbre de Lie  $\text{Vect}(\mathbf{R})$  des champs de vecteurs sur  $\mathbf{R}$ ).

Nous définissons une famille à deux paramètres d'actions de  $\text{Diff}(\mathbf{R})$  sur  $\mathcal{D}^k$  en considérant les arguments et les images des opérateurs différentiels comme des *densités tensorielles* de degrés arbitraires :

$$A : \mathcal{F}_\lambda \rightarrow \mathcal{F}_\mu \quad (\lambda, \mu \in \mathbf{R}), \quad (2)$$

où  $\mathcal{F}_\lambda$  est le  $\text{Diff}(\mathbf{R})$ -module des densités tensorielles de degré  $-\lambda$  :

$$\phi = \phi(x)(dx)^{-\lambda} .$$

Nous adoptons ici les conventions de signes habituelles, cf. [6, 7].

Notons  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k$  la structure de  $\text{Diff}(\mathbf{R})$  (et  $\text{Vect}(\mathbf{R})$ -) module sur l'espace  $\mathcal{D}^k$  définie par (2).

La formule explicite de l'action de  $\text{Diff}(\mathbf{R})$  sur  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k$  sera donnée dans la section 2.1.

**1.1 Les exemples classiques.** Les modules des opérateurs différentiels sur  $\mathbf{R}$  ou ( $S^1$ ) ont été considérés déjà dans les travaux classiques (voir e.g.[23, 2])

(a) L'exemple le plus connu est l'espace des opérateurs de Sturm-Liouville  $A = \frac{d^2}{dx^2} + u(x)$ . Cet opérateur agit sur les  $-\frac{1}{2}$ -densités à valeurs dans les  $\frac{3}{2}$ -densités, d'où  $A \in \mathcal{D}_{\frac{1}{2},-\frac{3}{2}}^2$ . Il est à remarquer que ce dernier module est lié à l'algèbre de Virasoro ( voir [13]).

(b) Plus généralement, les modules  $\mathcal{D}_{\frac{k-1}{2},-\frac{k+1}{2}}^k$  ont été étudiés en détails en géométrie projective des courbes dans  $\mathbf{R}P^{k-1}$  [23].

(c) Le module  $\mathcal{D}_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}^k$  des opérateurs différentiels sur les demi-densités apparait naturellement en quantification géométrique (voir [14, 15]).

**1.2 Le problème de classification.** Notons  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k$  le  $\text{Diff}(\mathbf{R})$ -module des opérateurs différentiels linéaires d'ordre  $k$  sur  $\mathcal{F}_\lambda$  et à valeurs dans  $\mathcal{F}_\mu$ . Nous nous proposons de classifier les modules  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k$ . Le problème précis est le suivant : *pour quelles valeurs de  $\lambda, \mu$  et  $\rho, \eta$  les  $\text{Diff}(\mathbf{R})$ -modules  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k$  et  $\mathcal{D}_{\rho,\eta}^k$  sont-ils isomorphes ?* Cette classification est donnée par les théorèmes 3.1 - 3.4.

Le premier résultat de ce travail est l'existence d'un invariant

$$\delta = \mu - \lambda. \quad (3)$$

Notre résultat principal est le suivant :

(a) dans le cas  $k \leq 3$ , tous les modules  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k$  ayant la même valeur de  $\delta$  sont isomorphes, sauf pour certains modules *singuliers*;

(b) dans le cas  $k \geq 4$ , deux modules  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k$  et  $\mathcal{D}_{\rho,\eta}^k$  sont isomorphes si et seulement si  $\lambda + \eta = \mu + \rho = -1$  et  $\mu - \lambda = \eta - \rho = \delta$ .

Il nous apparait évident, à la lumière de cette classification, que les modules singuliers obtenus dans cet article nécessitent une étude plus détaillée. Le module  $\mathcal{D}_{\frac{3}{2},-\frac{3}{2}}^2$  (lié à l'algèbre de Virasoro) est un exemple de modules singuliers. Nous espérons que les autres modules singuliers soient aussi riches en interprétations.

**Remarque.** Pour  $\lambda = \mu$ , la classification des  $\text{Diff}(\mathbf{M})$ -modules des opérateurs différentiels linéaires sur une variété  $\mathbf{M}$  a été faite dans trois récents articles [5], [18] et [9]. Il y est prouvé que le cas  $\dim(\mathbf{M}) = 1$  est particulier.

**1.3 Résultats connus.** Tous les résultats connus concernent le cas  $\lambda = \mu$ . Le problème de classification a été posé pour la première fois, et résolu pour les opérateurs d'ordre deux sur une variété  $M$ , dans [5]. Le résultat est le suivant :

(a) si  $\dim(\mathbf{M}) \geq 2$ , tous les modules  $\mathcal{D}_{\lambda}^2(\mathbf{M})$  sont isomorphes sauf pour  $\lambda = 0, -1, -\frac{1}{2}$  ;

(b) si  $\dim(\mathbf{M}) = 1$ , tous les modules  $\mathcal{D}_{\lambda}^2(\mathbf{M})$  sont isomorphes sauf pour  $\lambda = 0, -1$ .

Le cas des opérateurs d'ordre  $k \geq 3$ , pour  $\lambda = \mu$ , a été traité dans [18]. Il y est montré que si  $\dim(\mathbf{M}) \geq 2$  alors le seul isomorphisme de  $\text{Vect}(\mathbf{M})$ -modules est la conjugaison d'opérateurs différentiels. Ce résultat a été généralisé pour  $\lambda \neq \mu$  dans [20].

Le cas particulier de  $\dim(\mathbf{M}) = 1$  ( $\mathbf{M} = \mathbf{R}$  ou  $S^1$ ) est étudié pour  $\lambda = \mu$  dans [9].

**1.4 L'algèbre  $sl_2(\mathbf{R})$ .** On considère l'algèbre de Lie  $sl_2(\mathbf{R}) \subset \text{Vect}(\mathbf{R})$  engendrée par les champs de vecteurs

$$\frac{d}{dx}, x \frac{d}{dx}, x^2 \frac{d}{dx}. \quad (4)$$

Cette algèbre est appelée *l'algèbre projective* (ou l'algèbre de Möbius) ; la sous-algèbre de  $sl_2(\mathbf{R})$  engendrée par  $\frac{d}{dx}, x \frac{d}{dx}$  est appelée *algèbre affine*.

Il avait été remarqué déjà dans [23] et [2] que l'algèbre de Lie  $sl_2(\mathbf{R}) \subset \text{Vect}(\mathbf{R})$  joue un rôle très particulier dans le problème. Nous considérons la restriction des modules d'opérateurs  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k$  à  $sl_2(\mathbf{R})$ . La structure du  $sl_2(\mathbf{R})$ -module  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k$  dépend de la valeur de l'invariant  $\delta$  :

**Théorème 1.1.** (i) Si  $\delta \neq -1, -\frac{3}{2}, -2, -\frac{5}{2}, \dots, -k$ , alors le  $sl_2(\mathbf{R})$ -module  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k$  est isomorphe à une somme directe d'espaces de densités tensorielles :

$$\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k \cong \mathcal{F}_{k+\delta} \oplus \mathcal{F}_{k-1+\delta} \oplus \dots \oplus \mathcal{F}_{\delta}. \quad (5)$$

(ii) Pour chaque valeur  $\delta = -1, -\frac{3}{2}, -2, -\frac{5}{2}, \dots, -k$  l'isomorphisme (5) n'existe que pour les  $sl_2(\mathbf{R})$ -modules suivants :

a)  $\mathcal{D}_{\frac{l-1}{2}, -\frac{l+1}{2}}^k, \quad 1 \leq l \leq k$

b)  $\mathcal{D}_{\frac{l-1}{2}, -\frac{l}{2}}^k \cong \mathcal{D}_{\frac{l-2}{2}, -\frac{l+1}{2}}^k, \quad 2 \leq l \leq k.$

La démonstration du théorème est donnée dans les parties 5.1 et 9.

**Définition.** on appelle *résonances* les valeurs (demi)-entières de  $\delta$ .

Le  $\text{Vect}(\mathbf{R})$ -module d'opérateurs  $\mathcal{D}_{\lambda, \mu}^k$  est considéré comme *déformation* d'une somme directe d'espaces de densités tensorielles. Cette approche est liée à la cohomologie de l'algèbre de Lie  $\text{Vect}(\mathbf{R})$  à valeurs dans les densités tensorielles.

**Remarque.** Le théorème 1.1 rejoint les résultats de [4] où l'espace des opérateurs pseudo-différentiels sur une variété de dimension 1 est également étudié en tant que  $sl_2$ -module.

## 2 Définitions principales.

Considérons une famille d'actions de  $\text{Diff}(\mathbf{R})$  sur  $C^\infty(\mathbf{R})$ .

**2.1  $\text{Diff}(\mathbf{R})$  et  $\text{Vect}(\mathbf{R})$ -modules d'opérateurs différentiels.** Soient  $\phi = \phi(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$  et  $G$  un difféomorphisme de  $\mathbf{R}$ , l'action qu'on considère est définie par :

$$G_\lambda^* \phi := \phi \circ G^{-1} \cdot \left( \frac{dG^{-1}}{dx} \right)^{-\lambda}$$

Cette action est naturelle si  $\phi$  est considérée comme élément de  $\mathcal{F}_\lambda$ . Nous identifions l'espace des fonctions avec l'espace des densités tensorielles :

$$C^\infty(\mathbf{R}) \cong \mathcal{F}_\lambda. \quad (6)$$

Il en découle une famille à deux paramètres d'actions de  $\text{Diff}(\mathbf{R})$  sur  $\mathcal{D}^k$  :

$$G(A) = G_\mu^* A (G_\lambda^*)^{-1}. \quad (7)$$

où  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ .

L'algèbre de Lie  $\text{Vect}(\mathbf{R})$  des champs de vecteurs sur  $\mathbf{R}$  agit sur  $\mathcal{D}^k$  par :

$$L_X^{\lambda, \mu}(A) := L_X^\mu \circ A - A \circ L_X^\lambda, \quad (8)$$

où  $L_X^\lambda$  est la dérivée de Lie sur les densités tensorielles de degré  $-\lambda$  le long du champ de vecteur  $X = X(x) \frac{d}{dx}$  :

$$L_X^\lambda \phi = X(x) \phi'(x) - \lambda X'(x) \phi(x),$$

où  $X' = dX/dx$ .

Nous définissons ainsi une famille à deux paramètres ( $\lambda$  et  $\mu$ ) de  $\text{Diff}(\mathbf{R})$  et  $\text{Vect}(\mathbf{R})$ -modules sur  $\mathcal{D}^k$ , que nous noterons  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k$ .

**2.2  $\text{Diff}(\mathbf{R})$  et  $\text{Vect}(\mathbf{R})$ -modules des symboles.** Soit  $\text{Pol}(T^*\mathbf{R}) \cong \mathbf{R}[\xi] \otimes C^\infty(\mathbf{R})$  l'espace des fonctions sur  $T^*\mathbf{R}$  polynômiales sur les fibres. Cet espace a une structure naturelle de  $\text{Diff}(\mathbf{R})$  et  $\text{Vect}(\mathbf{R})$ -module et est habituellement considéré comme l'espace des symboles associé à l'espace des opérateurs différentiels linéaires sur  $\mathbf{R}$ . Nous allons définir une famille à un paramètre de  $\text{Diff}(\mathbf{R})$  et  $\text{Vect}(\mathbf{R})$ -modules sur cet espace.

Pour  $\varphi \in \text{Diff}(\mathbf{R})$  et  $P \in \text{Pol}(T^*\mathbf{R})$  on pose :

$$\varphi_\delta(P) = \varphi^*(P) \cdot \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^\delta, \quad \delta \in \mathbf{R}. \quad (9)$$

Cette formule définit une action de  $\text{Diff}(\mathbf{R})$  sur  $\text{Pol}(T^*\mathbf{R})$ , notons  $S_\delta$  la famille des  $\text{Diff}(\mathbf{R})$ -modules ainsi définie. L'espace des polynômes de degrés  $\leq k$  est un sous-module de  $S_\delta$  qu'on note  $S_\delta^k$ . Il est clair que  $S_\delta^k \cong S_0^k \otimes \mathcal{F}_\delta$  d'où :

$$S_\delta^k \cong \mathcal{F}_{k+\delta} \oplus \mathcal{F}_{k-1+\delta} \oplus \dots \oplus \mathcal{F}_\delta. \quad (10)$$

Il sera commode d'utiliser la notation suivante pour un élément  $P$  de  $S_\delta^k$  :

$$P(x, \xi) = \xi^\delta \sum_{p=0}^k \xi^p \bar{a}_p(x),$$

où  $(x, \xi)$  sont les coordonnées standards sur  $T^*\mathbf{R}$ ,  $\bar{a}_p \in C^\infty(\mathbf{R})$ .

L'action de  $\text{Vect}(\mathbf{R})$  sur  $S_\delta^k$  est alors :

$$L_X^\delta(P) = \xi^\delta \sum_{p=0}^k \xi^p L_X^{p+\delta}(\bar{a}_p). \quad (11)$$

Le but de cet article est d'étudier les modules  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k$  en les comparant aux  $S_\delta^k$ .

### 2.3 Localité des isomorphismes de $\text{Diff}(\mathbf{R})$ et $\text{Vect}(\mathbf{R})$ -modules.

Nous avons besoin des résultats de [18] et [20] que nous reprenons dans cette partie.

Soit  $T : \mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k \rightarrow \mathcal{D}_{\rho,\eta}^k$  une application linéaire qui entrelace l'action de  $\text{Vect}(\mathbf{R})$  sur  $\mathcal{D}^k$ , c'est-à-dire :

$$T(L_X^{\lambda,\mu}(A)) = L_X^{\rho,\eta}(T(A)), \quad (12)$$

pour tout  $A \in \mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k$ .

Rappelons que  $T$  est dit *local* si  $T$  préserve le support de ses arguments, c'est-à-dire :  $\text{supp}(T(A)) \subset \text{supp}(A)$ .

Il est prouvé dans [20] (paragraphe 3) que si  $T$  est bijectif alors  $T$  est local. Un analogue de ce résultat, pour  $\lambda = \mu$ , est démontré dans [18].

Un des résultats de [18] (lemme 3.1), généralisant un théorème de Peetre [21], est : si  $T$  est local alors il existe, pour tout point de  $\mathbf{R}$ , un voisinage sur lequel  $T$  est différentiel, c'est-à-dire de la forme :

$$(T(A))_i(x) = \sum_{i,j,k} h_{ik}^j(x) a_j^{(k)}(x), \quad (13)$$

où  $h_{ik}^j$  sont des fonctions lisses sur  $\mathbf{R}$ .

Tous les isomorphismes linéaires entre  $\text{Vect}(\mathbf{R})$ -modules  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k$  sont, donc, de la forme (13).

**2.4 La conjugaison.** Il existe un isomorphisme naturel

$$* : \mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k \cong \mathcal{D}_{-1-\mu,-1-\lambda}^k \quad (14)$$

donné par la conjugaison d'opérateurs différentiels  $A \mapsto A^*$ . La formule explicite  $A^* = \sum_{i=0}^k (-1)^i \left(\frac{d}{dx}\right)^i \circ a_i(x)$  est bien connue et ne dépend pas du choix des coordonnées  $x$ , cf. [5, 9].

**Définitions.** (a) On appelle *module autoadjoint* tout module de la forme  $\mathcal{D}_{\lambda,-1-\lambda}^k$  (stable pour l'application  $*$ ).

(b) On appelle *module singulier* tout module  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k$  qui n'est isomorphe à aucun autre module  $\mathcal{D}_{\rho,\eta}^k$  à part son adjoint  $\mathcal{D}_{-1-\mu,-1-\lambda}^k$  et lui même.

### 3 Théorèmes de classification

Dans cette partie nous allons donner les théorèmes de classification des  $\text{Diff}(\mathbf{R})$  (et les  $\text{Vect}(\mathbf{R})$ )-modules  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k$ .

**3.1 L'invariant  $\delta$ .** Pour tout  $\text{Diff}(\mathbf{R})$ -module  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k$  la différence de poids (3) est un invariant :  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k \cong \mathcal{D}_{\rho,\eta}^k$  implique  $\mu - \lambda = \eta - \rho$ . En effet, soit  $T$  un isomorphisme entre  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k$  et  $\mathcal{D}_{\rho,\eta}^k$ . La condition d'équivariance (12) de  $T$  par rapport au champ de vecteur  $X = x \frac{d}{dx}$ , écrite pour  $\phi = \text{const} \in C^\infty(\mathbf{R})$  (en tenant compte de l'identification (6)), donne :  $(\lambda - \mu)T(A(\phi)) + T[x(A(\phi))'] = (\rho - \eta)T(A(\phi)) + x[T(A(\phi))']$ . Si on prend  $x = 0$  il vient  $(\mu - \lambda) = (\eta - \rho)$ .

On comparera donc les modules de même  $\delta$ .

**3.2 Modules des opérateurs d'ordre 1**

**Théorème 3.1.**  $\delta$  étant fixé,

(a) si  $\delta \neq -1$  alors, tous les modules  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^1$  sont isomorphes,

(b) si  $\delta = -1$  alors,  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^1 \cong \mathcal{D}_{\rho,\eta}^1$  pour tous  $\lambda, \rho \neq 0$ ;  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^1 \not\cong \mathcal{D}_{0,-1}^1$ .

**Remarque.**  $\mathcal{D}_{0,-1}^1$  est singulier (et autoadjoint).

**3.3 Modules des opérateurs d'ordre 2.** Le théorème suivant fournit la classification des opérateurs d'ordre 2.

**Théorème 3.2.** Pour chaque  $\delta$  fixé,

(a) tous les modules  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^2$  tels que  $\lambda \neq 0$ ,  $\mu \neq -1$ , et  $(\lambda, \mu) \neq (\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$  sont isomorphes;

(b) les modules  $\mathcal{D}_{0,\mu}^2 \cong \mathcal{D}_{-1-\mu,-1}^2$  et le module autoadjoint  $\mathcal{D}_{\frac{1}{2},-\frac{3}{2}}^2$  sont singuliers.

**3.4 Modules des opérateurs d'ordre 3.** Le résultat principal de cet article est :

**Théorème 3.3.** Pour chaque  $\delta$  fixé,

(a) tous les modules  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^3$  tels que

1)  $(-3\lambda + 1)(3\mu + 4) \neq 1$ ,

2)  $\lambda \neq 0, \mu \neq -1$ ,

3)  $1 + \lambda + \mu \neq 0$  et

4)  $\delta \neq -2$

sont isomorphes;

(b) les modules de la forme

1)  $\mathcal{D}_{\lambda, \frac{4\lambda-1}{-3\lambda+1}}^3 (\cong \mathcal{D}_{\frac{-\lambda}{-3\lambda+1}, -1-\lambda}^3)$ ,

2)  $\mathcal{D}_{\lambda,-1}^3 (\cong \mathcal{D}_{0,-1-\lambda}^3)$ ,

3)  $\mathcal{D}_{\lambda,-1-\lambda}^3$  et

4)  $\mathcal{D}_{\lambda,\lambda-2}^3 (\cong \mathcal{D}_{1-\lambda,-1-\lambda}^3)$

sont singuliers.

La figure suivante représente les modules singuliers des opérateurs d'ordre trois :

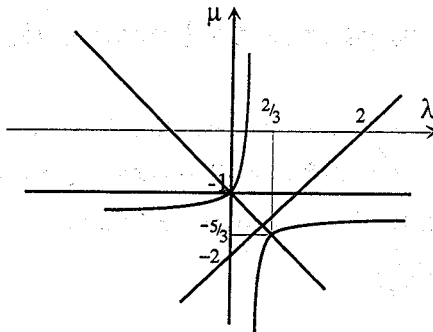


figure 1

Le théorème 3.3 peut être reformulé de la façon suivante : sur chaque droite  $(\mu - \lambda = \text{const})$  tous les modules  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^3$  sont isomorphes, sauf les modules qui correspondent aux cinq courbes présentées par la figure 1.

### 3.5 Modules des opérateurs d'ordre $k \geq 4$

**Théorème 3.4.** *Pour  $k \geq 4$ , le seul isomorphisme entre modules  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k$  est la conjugaison d'opérateurs différentiels.*

Pour  $k \geq 4$ , tous les modules  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k$  sont, donc, singuliers.

Les démonstrations des théorèmes 3.1, 3.2, 3.3 et 3.4 sont données dans les parties 7,8 et 10.

**3.6 Quelques remarques sur les modules singuliers.** Sur la figure 1, la droite ( $\lambda = 0$ ) correspond aux opérateurs agissant sur  $\mathcal{F}_0 (\cong C^\infty(\mathbf{R}))$ , la droite ( $\mu = -1$ ) est la droite conjuguée à la première, et la droite ( $\lambda + \mu = -1$ ) correspond aux modules autoadjoints. L'existence de ces Diff( $\mathbf{R}$ )-modules singuliers semble être naturelle et rejoint les résultats obtenus dans le cas multi-dimensionnel.

Cependant, l'apparition de l'hyperbole  $((-3\lambda + 1)(3\mu + 4) = 1)$  est un phénomène innatendu et caractéristique de la dimension 1. Les deux points (d'intersection)  $(\lambda, \mu) = (0, -1)$  et  $(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3})$  représentent des modules assez remarquables :

(a) le module  $\mathcal{D}_{0,-1}^3$  est isomorphe à la somme directe  $\mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_{-1}$  de modules de densités,

(b) les valeurs  $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = -\frac{5}{3}$  coïncident avec celles liées au célèbre opérateur de Grozman [12] (voir aussi [7]).

Nous espérons étudier les propriétés des modules singuliers dans un travail à part.

On retrouve les valeurs critiques  $\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{21}}{6}$ , calculées dans [9] pour  $\delta = 0$ , comme intersection de la première bissectrice ( $\lambda = \mu$ ) avec l'hyperbole.

## 4 Formule explicite de l'action de Vect( $\mathbf{R}$ )

Soient  $X = X(x) \frac{d}{dx}$  un élément de Vect( $\mathbf{R}$ ) et  $A \in \mathcal{D}^k$  un opérateur différentiel. L'action de Vect( $\mathbf{R}$ ) sur  $\mathcal{D}^k$  est définie par (8).

**Lemme 4.1.** *L'action  $L_X^{\lambda,\mu}$  de Vect( $\mathbf{R}$ ) sur  $\mathcal{D}^k$  est donnée par*

$$L_X(A) := \sum_{p=0}^k a_p^X(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^p, \text{ où}$$

$$a_p^X = L_X^{p+\delta}(a_p) + \sum_{j=1}^{k-p} \left(\binom{p+j}{j} \lambda - \binom{p+j}{j+1}\right) a_{p+j} X^{(j+1)} \quad p = 1, \dots, k \quad (15)$$

$$a_0^X = L_X^\delta(a_0) + \lambda(a_1 X'' + a_2 X''' + \dots + a_k X^{(k+1)}) .$$



**Preuve.** Il suffit d'appliquer la définition :

$$\begin{aligned} L_X^{\lambda,\mu}(A) &= L_X^\mu \circ A - A \circ L_X^\lambda \\ &= \left(X \frac{d}{dx} - \mu X'\right) \left(\sum_{p=0}^k a_p(x) \frac{d^p}{dx^p}\right) - \left(\sum_{p=0}^k a_p(x) \frac{d^p}{dx^p}\right) \left(X \frac{d}{dx} - \lambda X'\right) \end{aligned}$$

**Remarque.** Il est clair que  $\mathcal{D}^k$  admet la décomposition (5) en tant qu'espace vectoriel (car  $C^\infty(\mathbf{R}) \cong \mathcal{F}_\lambda$  en tant qu'espaces vectoriels). Mais, en général,  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k$  n'est pas isomorphe à  $\bigoplus_{i=0}^k \mathcal{F}_{i+\delta}$  en tant que  $\text{Vect}(\mathbf{R})$ -module.

L'idée de cet article est de considérer  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k$  comme *déformation* de l'action de  $\text{Vect}(\mathbf{R})$  sur  $\bigoplus_{i=0}^k \mathcal{F}_{i+\delta}$  (cette action est donnée par les dérivées de Lie  $L_X^{p+\delta}(a_p)$  dans (15)) et de comparer ces déformations. Cette approche est liée à la cohomologie de l'algèbre de Lie  $\text{Vect}(\mathbf{R})$  (voir [5], [19], [9]).

Nous nous intéresserons particulièrement à la sous-algèbre, de  $\text{Vect}(\mathbf{R})$ ,  $sl_2(\mathbf{R})$ . Cette algèbre nous permettra de définir une forme canonique des opérateurs différentiels, qui simplifie l'action (15).

## 5 Symbole $sl_2$ -équivariant

L'idée clé de cet article est d'introduire une application  $sl_2$ -équivariante

$$\sigma_{\lambda,\mu} : \mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k \rightarrow S_{\mu-\lambda}^k \quad (16)$$

que nous appellerons *symbole  $sl_2$ -équivariant*.

L'application  $\sigma_{\lambda,\mu}$  a été considérée déjà par Wilczynski [23] dans les cas  $\lambda = \frac{k-1}{2}, \mu = -\frac{k+1}{2}$ . L'application inverse du symbole  $sl_2$ -équivariant a été calculée explicitement (dans le cadre plus général des opérateurs pseudo-différentiels sur une variété de dimension 1) dans un article de P.B.Cohen, Yu.I.Manin et D.Zagier [4]. Dans le cas d'égalité des poids ( $\lambda = \mu$ ), la notion de symbole projectivement équivariant a été définie, pour une variété différentielle de dimension quelconque, dans un récent travail de P.Lecomte et V.Yu.Ovsienko [19].

### 5.1. Définition du symbole $sl_2$ -équivariant, preuve de la partie (i) du théorème 1.1.

Le théorème 1.1(i) est un corollaire de la proposition suivante :

**Proposition 5.1.** *Si  $\delta \neq -1, -\frac{3}{2}, -2, \dots, -k$ , alors :*

(i) *il existe un unique symbole  $sl_2$ -équivariant  $\sigma_{\lambda,\mu}$ , tel que pour tout  $A \in \mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k$  le terme de plus haut degré du polynôme  $\sigma_{\lambda,\mu}(A)$  coïncide avec le symbole principal de  $A$ .*

(ii)  $\sigma_{\lambda,\mu}$  associe à tout opérateur différentiel (1) le polynome  $\sigma_{\lambda,\mu}(A) = \xi^\delta \sum_{p=0}^k \xi^p \bar{a}_p(x)$  où  $\delta = \mu - \lambda$ , défini par :

$$\bar{a}_p(x) = \sum_{j=p}^k \alpha_p^j a_j^{(j-p)} \quad (17)$$

où les constantes  $\alpha_p^j$  sont donnés par :

$$\alpha_p^j = \frac{\binom{j}{p} \binom{2\lambda-p}{2\lambda-j}}{\binom{2\delta+j+p+1}{2\delta+2p+1}}. \quad (18)$$

**Preuve.** Nous adoptons la notation suivante : l'opérateur différentiel d'ordre  $k$   $L_X^{\lambda,\mu}(A)$  a pour symbole  $sl_2$ -équivariant  $\sigma_{\lambda,\mu}(L_X^{\lambda,\mu}(A)) = \xi^\delta \sum_{p=0}^k \xi^p \bar{a}_p^X(x)$ .

**Lemme 5.2.** L'action de  $\text{Vect}(\mathbf{R})$  sur  $\mathcal{D}^k$  donnée par la formule (15) se traduit en termes des  $\bar{a}_i(x)$  par :

$$\bar{a}_p^X(x) = L_X^{p+\delta}(\bar{a}_p(x)) + (\text{termes en } X^{(n)} \ n \geq 3). \quad (19)$$

**Preuve du lemme.** La formule (17) implique :  $\bar{a}_p^X = \sum_{j=p}^k \alpha_p^j (a_j^X)^{(j-p)}$ . En remplaçant  $a_j^X$  par sa valeur donnée par (15) on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{a}_p^X &= L_X^{p+\delta}(\bar{a}_p) \\ &+ \sum_{j=p+1}^k X'' a_j^{(j-p-1)} (\alpha_p^{j-1} (j\lambda - \frac{j(j-1)}{2}) - \alpha_p^j ((j+\delta)(j-p) - \binom{j-p}{2})) \\ &+ (\text{termes en } X^{(n)} \ n \geq 3). \end{aligned} \quad (20)$$

Or, d'après (18),  $\alpha_p^{j-1} (j\lambda - \frac{j(j-1)}{2}) = \alpha_p^j ((j+\delta)(j-p) - \binom{j-p}{2})$ . ■

Pour  $X \in sl_2(\mathbf{R})$ , la fomule (19) devient  $\bar{a}_p^X(x) = L_X^{p+\delta}(\bar{a}_p)$ . On en déduit que l'application  $\sigma_{\lambda,\mu}$  définie par (18) est  $sl_2$ -équivariante.

Pour pouver l'unicité (à la normalisation par le terme principal prés) du symbole  $\sigma_{\lambda,\mu}$  (partie (i) de la proposition 5.1) il suffit de prouver que les  $sl_2$ -modules  $\mathcal{F}_\lambda$  sont irréductibles. En effet, selon la décomposition (10), cela implique que les automorphismes de  $S_\delta^k$  ont une forme diagonale i.e. la multiplication de chaque terme de (10) par une constante. L'irréductibilité des  $\mathcal{F}_\lambda$  est prouvée (voir [7]) dans la classe des séries formelles. Nous ne connaissons pas de résultat analogue dans le cas  $C^\infty$  sur  $\mathbf{R}$ . L'unicité dans le cas  $C^\infty$  est un corollaire de la propriété de localité (cf. partie 2.3) et est obtenue par le calcul direct ci-dessous.

**5.2. Preuve de l'unicité du symbole  $sl_2(\mathbf{R})$ -équivariant.** Dans cette partie nous achevons la preuve de la proposition 5.1. Reprenons les définitions de la proposition 5.1.

Soit  $\sigma_{\lambda,\mu}$  un symbole  $sl_2$ -équivariant défini par (c'est la forme générale) :  
 $\bar{a}_p(x) = \sum_{l,r} \gamma_{p,l}^r(x) a_r^{(l)}(x)$ , où  $a_r^{(l)}(x) = \frac{d^l a_r}{dx^l}(x)$  et  $\gamma_{p,l}^r \in C^\infty(\mathbf{R})$ . La condition de  $sl_2$ -équivariance de  $\sigma$  est  $\bar{a}_p^X(x) = L_X^{p+\delta}(\bar{a}_p(x))$ .

En prenant dans cette dernière égalité  $X = \frac{d}{dx}$ , on obtient pour le membre de gauche :

$$\bar{a}_p^X(x) = \sum_{l,r} \gamma_{p,l}^r(x) (a_r^X(x))^{(l)} = \sum_{l,r} \gamma_{p,l}^r(x) (a_r'(x))^{(l)},$$

et pour le membre de droite :

$$L_X^{p+\delta}(\bar{a}_p(x)) = (\bar{a}_p(x))' = \sum_{l,r} (\gamma_{p,l}^r(x) a_r^{(l)}(x))'$$

En identifiant les deux membres il vient que  $\gamma_{p,l}^r$  ne dépend pas de  $x$ .

En remplaçant  $X$  par  $x \frac{d}{dx}$  on trouve

$$\begin{aligned} \bar{a}_p^X(x) &= \sum_{l,r} \gamma_{p,l}^r (a_r^X(x))^{(l)} \\ &= \sum_{l,r} \gamma_{p,l}^r (x a_r'(x) - (r + \delta) a_r(x))^{(l)} \\ &= \sum_{l,r} \gamma_{p,l}^r (x a_r^{(l+1)}(x) - (r - l + \delta) a_r^{(l)}(x)), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} L_X^{p+\delta}(\bar{a}_p(x)) &= x \bar{a}_p'(x) - (p + \delta) \bar{a}_p(x) \\ &= \sum_{l,r} \gamma_{p,l}^r (x a_r^{(l+1)}(x) - (p + \delta) a_r^{(l)}(x)). \end{aligned}$$

On obtient, en égalisant, la condition  $r - l = p$  :

$$\bar{a}_p(x) = \sum_{r=p}^k \gamma_p^r a_r^{(r-p)}(x) \text{ et } \gamma_p^p \neq 0$$

Enfin, en posant  $\gamma_p^p = 1$  et en prenant  $X = x^2 \frac{d}{dx}$  on a :

$$\begin{aligned} \bar{a}_p^X &= \sum_{r=p}^k \gamma_p^r (a_r^X)^{(l)} \\ &= \sum_{r=p}^k \gamma_p^r (x^2 a_r' - 2(r + \delta) x a_r + 2 \binom{r+1}{1} \lambda - \binom{r+1}{2} a_{r+1})^{(l)}, \end{aligned}$$

qu'on identifie avec  $L_X^{p+\delta}(\bar{a}_p) = \sum_{r=p}^k \gamma_p^r (x^2 a_r^{(l+1)} - 2(r + \delta) x a_r^{(l)})$  pour obtenir la condition :

$$\gamma_p^{r-1} \left( r \lambda - \frac{r(r-1)}{2} \right) = \gamma_p^r \left( (r + \delta)(r - p) - \binom{r-p}{2} \right),$$

qui implique que  $\gamma_p^j = \alpha_p^j$ .

L'unicité du symbole  $sl_2$ -équivariant est prouvée. ■

La proposition 5.1 et le théorème 1.1(i) sont prouvés. ■

**Remarque.** La formule (19) exprime l'action de  $\text{Vect}(\mathbf{R})$  sur le symbole principal d'un opérateur différentiel (1). Elle montre aussi que le  $\text{Vect}(\mathbf{R})$ -module  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k$  est une *déformation* du  $\text{Vect}(\mathbf{R})$ -module des symboles (10).

## 6 L'action de $\text{Vect}(\mathbf{R})$ en termes de symbole $sl_2$ -équivariant.

On considère l'action de  $\text{Vect}(\mathbf{R})$  sous la forme :

$$\bar{L}_X^{\lambda,\mu} := \sigma_{\lambda,\mu} \circ L_X^{\lambda,\mu} \circ \sigma_{\lambda,\mu}^{-1} : S_{\mu-\lambda}^k \rightarrow S_{\mu-\lambda}^k \quad (21)$$

### 6.1. Les transvectants

**Définition.** On appelle *transvectants* les applications bilinéaires suivantes :

$$\mathcal{J}_m^{\sigma,\tau} : \mathcal{F}_\sigma \otimes \mathcal{F}_\tau \rightarrow \mathcal{F}_{\sigma+\tau-m} ,$$

définies par  $\mathcal{J}_m^{\sigma,\tau}(f(dx)^{-\sigma}, g(dx)^{-\tau}) = \mathcal{J}_m^{\sigma,\tau}(f, g)(dx)^{-(\sigma+\tau-m)}$ , avec

$$\mathcal{J}_m^{\sigma,\tau}(f, g) = \sum_{i+j=m} (-1)^i \binom{m}{i} \frac{(2\sigma-i)!(2\tau-j)!}{(2\sigma-m)!(2\tau-m)!} f^{(i)} g^{(j)} .$$

Les transvectants ont été découverts par Gordan [11] (et redécouverts dans le cadre de la théorie des fonctions modulaires par Rankin [22] et Cohen [3]).

Pour chaque  $m$  et  $\sigma, \tau \neq -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, \dots$ , le transvectant  $\mathcal{J}_m$  est l'unique application bilinéaire, du type (13) par rapport à chaque argument,  $sl_2$ -équivariante sur les densités tensorielles, [11] (voir [8] pour plus de détails).

**Exemples.** Nous nous intéressons particulièrement aux applications  $\mathcal{J}_m^{1,\tau} : \text{Vect}(\mathbf{R}) \otimes \mathcal{F}_\tau \rightarrow \mathcal{F}_{\tau+1-m}$ . Une propriété importante de ces applications est :

$$\mathcal{J}_m^{1,\tau}(X, a_\tau) = 0 , \text{ si } X \in sl_2(\mathbf{R}) . \quad (22)$$

Explicitement (à constante multiplicative près) :

$$J_3(X, a_\tau) = X''' a_\tau$$

$$J_4(X, a_\tau) = \tau X^{(IV)} a_\tau + 2X''' a'_\tau$$

$$J_5(X, a_\tau) = \tau(2\tau-1)X^{(V)} a_\tau + 5(2\tau-1)X^{(IV)} a'_\tau + 10X''' a''_\tau .$$

(Voir [9],[8], et [1] pour plus de détails).

**Lemme 6.1.** *L'action de Vect( $\mathbf{R}$ ) sur  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k$  en termes de symbole  $sl_2$ -équivariant est donnée par :*

$$\bar{a}_p^X(x) = L_X^{p+\delta}(\bar{a}_p) + \sum_{j=p+2}^k \beta_p^j J_{j-p+1}^{1,j+\delta}(X, \bar{a}_j), \quad (23)$$

où  $\beta_p^j = \beta_p^j(\lambda, \mu)$  sont des fonctions en  $(\lambda, \mu)$ .

**Preuve.** En reprenant la formule (19), le résultat du lemme est alors une conséquence directe du fait que les transvectants sont les seules applications bilinéaires  $sl_2$ -équivariantes (différentielles en chaque argument) sur les densités tensorielles. ■

Notons que le lemme 6.1 est un cas particulier des  $*$ -produits  $sl_2$ -équivariants considérés dans [4].

## 6.2. Formules explicites de l'action de Vect( $\mathbf{R}$ ) pour $k \leq 4$

Les formules suivantes sont des cas particuliers de la formule (5.7) de [4]. On peut aussi les trouver par un calcul direct.

**Lemme 6.2.** *Pour  $p \in \{0, \dots, 4\}$  et  $\delta \neq -1, -\frac{3}{2}, -2, \dots, -4$  les coefficients  $\beta_p^j(\lambda, \mu)$  de la formule (23) sont données, en posant*

$$\theta_p^j = \frac{(-1)^{(j-p+1)}}{6} (j-p+1)! (2\delta+j+p)(2\delta+j+p+1)(2\delta+j+p+2), \quad (24)$$

par :

$$\begin{aligned} \beta_2^4(\lambda, \mu) &= \theta_2^4 \frac{2[(6\lambda-4)\delta+6\lambda^2+6\lambda-5]}{7+2\delta} \\ \beta_1^3(\lambda, \mu) &= \theta_1^3 \frac{2[(3\lambda-1)\delta+3\lambda^2+3\lambda-1]}{5+2\delta} \\ \beta_1^4(\lambda, \mu) &= \theta_1^4 \frac{(\delta+2\lambda+1)[(4\lambda-1)\delta+4\lambda(\lambda+1)]}{(2+\delta)(3+\delta)(4+\delta)} \\ \beta_0^2(\lambda, \mu) &= \theta_0^2 \frac{2\lambda(\delta+\lambda+1)}{3+2\delta} \\ \beta_0^3(\lambda, \mu) &= \theta_0^3 \frac{\lambda(\delta+\lambda+1)(\delta+2\lambda+1)}{(1+\delta)(2+\delta)(3+\delta)} \\ \beta_0^4(\lambda, \mu) &= \theta_0^4 \frac{\lambda(\delta+\lambda+1)(4\delta^2+12\lambda\delta+12\delta+12\lambda^2+12\lambda+11)}{(1+\delta)(3+2\delta)(5+2\delta)(7+2\delta)(4+\delta)}. \end{aligned} \quad (25)$$

## 7 Isomorphismes de Vect( $\mathbf{R}$ )-modules

Nous démontrons dans cette partie les théorèmes de classification dans le cas général  $\delta \neq -1, -\frac{3}{2}, -2, \dots, -k$ .

## 7.1. Diagonalisation des isomorphismes de Vect( $\mathbf{R}$ )-modules $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k$

Le symbole  $sl_2$ -équivariant permet de diagonaliser tout isomorphisme de Vect( $\mathbf{R}$ )-modules  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k$  (cf. [19]) pour les valeurs non résonantes de  $\delta$ .

**Proposition 7.1.** *Soit  $T : \mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k \rightarrow \mathcal{D}_{\rho,\eta}^k$  un isomorphisme de Vect( $\mathbf{R}$ )-modules.  $T$  est diagonal en termes de symbole  $sl_2(\mathbf{R})$ -équivariant, i.e. l'application  $\sigma_{\lambda,\mu} \circ T \circ \sigma_{\lambda,\mu}^{-1} : S_{\mu-\lambda}^k \rightarrow S_{\mu-\lambda}^k$  est de la forme :*

$$\sigma_{\lambda,\mu} \circ T \circ \sigma_{\lambda,\mu}^{-1}(\bar{a}_k, \dots, \bar{a}_0) = (\tau_k \bar{a}_k, \dots, \tau_0 \bar{a}_0), \quad (26)$$

où  $\tau_i \in \mathbf{R}$ .

**Preuve.**  $T$  est en particulier  $sl_2(\mathbf{R})$ -équivariant. Le symbole  $sl_2(\mathbf{R})$ -équivariant d'un opérateur  $A \in \mathcal{D}^k$  est donc aussi un symbole  $sl_2(\mathbf{R})$ -équivariant de  $T(A)$ .

L'unicité à une normalisation près (cf. proposition 5.1 (i)) du symbole  $sl_2(\mathbf{R})$ -équivariant achève la démonstration. ■

## 7.2. Les isomorphismes de Vect( $\mathbf{R}$ )-modules explicitement.

Pour  $k$  fixé, nous allons expliciter tout isomorphisme  $T : \mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k \rightarrow \mathcal{D}_{\rho,\eta}^k$  en termes de symbole  $sl_2(\mathbf{R})$ -équivariant.

(a) Dans le cas  $k=1$ , la formule (26) définit un isomorphisme  $T : \mathcal{D}_{\lambda,\mu}^1 \rightarrow \mathcal{D}_{\rho,\eta}^1$  (avec  $\mu - \lambda = \eta - \rho \neq -1$ ) pour tous  $\tau_0, \tau_1 \neq 0$  :

$$(\bar{a}_0^T, \bar{a}_1^T) = (\tau_0 \bar{a}_0, \tau_1 \bar{a}_1) \quad (27)$$

En effet, l'action (21) donnée par (23) est  $(\bar{a}_0^X, \bar{a}_1^X) = (L_X^\delta(\bar{a}_0), L_X^{1+\delta}(\bar{a}_1))$ .

(b) Dans le cas  $k=2$ , si  $\beta_0^2(\lambda, \mu)$  et  $\beta_0^2(\rho, \eta) \neq 0$  alors on trouve une famille d'isomorphismes  $T_2 : \mathcal{D}_{\lambda,\mu}^2 \rightarrow \mathcal{D}_{\rho,\eta}^2$ , donnés, à constante multiplicative près, en termes de symbole  $sl_2(\mathbf{R})$ -équivariant par (26) avec :

$$\begin{aligned} \tau_2 &= 1 \\ \tau_1 &\neq 0 \\ \tau_0 &= \frac{\beta_0^2(\rho, \eta)}{\beta_0^2(\lambda, \mu)} = \frac{\rho(\rho + \delta + 1)}{\lambda(\lambda + \delta + 1)} \end{aligned} \quad (28)$$

car l'action (23) est :

$$\begin{aligned} \bar{a}_2^X &= L_X^{2+\delta}(\bar{a}_2) \\ \bar{a}_1^X &= L_X^{1+\delta}(\bar{a}_1) \\ \bar{a}_0^X &= L_X^\delta(\bar{a}_0) + \beta_0^2 J_3(X, \bar{a}_2). \end{aligned} \quad (29)$$

(c) Dans le cas  $k=3$ , si  $\beta_1^3, \beta_0^2$  et  $\beta_0^3$  sont non nuls alors l'isomorphisme  $T : \mathcal{D}_{\lambda,\mu}^3 \rightarrow \mathcal{D}_{\rho,\eta}^3$ , en termes de symbole  $sl_2(\mathbf{R})$ -équivariant, est, à constante

prés, donné par (26) avec :

$$\begin{aligned}
 \tau_3 &= 1 \\
 \tau_2 &= \frac{\beta_0^3(\rho, \eta)\beta_0^2(\lambda, \mu)}{\beta_0^3(\lambda, \mu)\beta_0^2(\rho, \eta)} = \frac{\delta + 2\rho + 1}{\delta + 2\lambda + 1} \\
 \tau_1 &= \frac{\beta_1^3(\rho, \eta)}{\beta_1^3(\lambda, \mu)} = \frac{(3\rho - 1)\delta + 3\rho^2 + 3\rho - 1}{(3\lambda - 1)\delta + 3\lambda^2 + 3\lambda - 1} \\
 \tau_0 &= \frac{\beta_0^3(\rho, \eta)}{\beta_0^3(\lambda, \mu)} = \frac{\rho(\delta + \rho + 1)(\delta + 2\rho + 1)}{\lambda(\delta + \lambda + 1)(\delta + 2\lambda + 1)}
 \end{aligned} \tag{30}$$

car l'action (23) est :

$$\begin{aligned}
 \bar{a}_3^X &= L_X^{3+\delta}(\bar{a}_3) \\
 \bar{a}_2^X &= L_X^{2+\delta}(\bar{a}_2) \\
 \bar{a}_1^X &= L_X^{1+\delta}(\bar{a}_1) + \beta_1^3 J_3(X, \bar{a}_3) \\
 \bar{a}_0^X &= L_X^\delta(\bar{a}_0) + \beta_0^2 J_3(X, \bar{a}_2) + \beta_0^3 J_4(X, \bar{a}_3)
 \end{aligned} \tag{31}$$

Nous montrons dans la partie 8 que les modules singuliers correspondent aux  $(\lambda, \mu)$  tels que  $\beta_j^i(\lambda, \mu) = 0$ . Ces valeurs sont données par la formule (25).

Les théorèmes 3.1 (a), 3.2 (a) pour  $\delta \notin \{-1, -\frac{3}{2}, -2\}$  et 3.3 (a) pour  $\delta \notin \{-1, -\frac{3}{2}, -2, -\frac{5}{2}, -3\}$  sont prouvés. ■

Pour  $k = 4$ , un isomorphisme  $T : \mathcal{D}_{\lambda, \mu}^4 \rightarrow \mathcal{D}_{\rho, \eta}^4$  a une forme diagonale (cf. la proposition 7.1). La condition d'équivariance de  $T$  se traduit par le système suivant :

$$\begin{aligned}
 \tau_4 \beta_2^4(\rho, \eta) &= \tau_2 \beta_2^4(\lambda, \mu), & \tau_4 \beta_1^4(\rho, \eta) &= \tau_1 \beta_1^4(\lambda, \mu) \\
 \tau_4 \beta_0^4(\rho, \eta) &= \tau_0 \beta_0^4(\lambda, \mu), & \tau_3 \beta_1^3(\rho, \eta) &= \tau_1 \beta_1^3(\lambda, \mu) \\
 \tau_3 \beta_0^3(\rho, \eta) &= \tau_0 \beta_0^3(\lambda, \mu), & \tau_2 \beta_0^2(\rho, \eta) &= \tau_0 \beta_0^2(\lambda, \mu)
 \end{aligned}$$

Ce système n'admet de solutions que si  $\lambda = \rho$  ou  $\lambda + \eta = -1$ . D'où le théorème 3.4 (dans le cas non résonant) pour  $k = 4$ .

La restriction d'un isomorphisme  $T : \mathcal{D}_{\lambda, \mu}^k \rightarrow \mathcal{D}_{\rho, \eta}^k$  à  $\mathcal{D}^{k'}$  ( $k > k'$ ) est un isomorphisme de  $\mathcal{D}_{\lambda, \mu}^{k'}$  et  $\mathcal{D}_{\rho, \eta}^{k'}$ . En effet la proposition 7.1 implique que  $T$  envoie le sous-module  $\mathcal{D}_{\lambda, \mu}^{k'} \subset \mathcal{D}_{\lambda, \mu}^k$  dans  $\mathcal{D}_{\rho, \eta}^{k'}$ . Ce fait montre donc que l'existence d'un isomorphisme  $T : \mathcal{D}_{\lambda, \mu}^k \rightarrow \mathcal{D}_{\rho, \eta}^k$ , pour  $k \geq 4$ , est équivalente à  $\lambda = \rho$  ou  $\lambda + \eta = -1$  (on prend  $k' = 4$ ). Cela implique que le seul isomorphisme de Vect( $\mathbf{R}$ )-modules  $\mathcal{D}_{\lambda, \mu}^k \rightarrow \mathcal{D}_{\rho, \eta}^k$ , lorsque  $\delta \neq -1, -\frac{3}{2}, -2, \dots, -k$ , est la conjugaison d'opérateurs différentiels.

Le théorème 3.4 est prouvé dans le cas  $\delta \neq -1, -\frac{3}{2}, -2, \dots, -k$ . ■

## 8 Relation avec le groupe de cohomologie de Vect( $\mathbf{R}$ ) à coefficients dans Hom( $\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j$ )

Dans toute cette partie on supposera  $\delta \neq -1, -\frac{3}{2}, -2, \dots, -k$ .

Pour prouver la partie (b) de chacun des théorèmes 3.2 et 3.3 nous utilisons l'approche de la théorie de déformation (voir [5], [9], [19]).

### 8.1. Relation avec le groupe de cohomologie $H^1(\text{Vect}(\mathbf{R}); \text{Hom}(\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j))$

La différence entre l'action de  $\text{Vect}(\mathbf{R})$  sur  $\mathcal{D}_{\lambda, \mu}^k$  et son action sur  $S_\delta^k$  est représentée par une classe du groupe de *cohomologie différentielle* (ou *diagonale* [7])  $H^1(\text{Vect}(\mathbf{R}); \text{Hom}(\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j))$  avec  $i - j \in \mathbf{Z}$ . Ce groupe est calculé dans le cas de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs formels sur  $\mathbf{R}$  dans [6].

La cohomologie de  $\text{Vect}(\mathbf{R})$  intervient car le fait que, par exemple, (29) soit une action de  $\text{Vect}(\mathbf{R})$  implique que  $J_3$  définit un  $\text{Vect}(\mathbf{R})$ -cocycle. De même, (31) implique que  $J_4$  définit un  $\text{Vect}(\mathbf{R})$ -cocycle. Les autres  $J_m$  ne sont en général pas des cocycles sur  $\text{Vect}(\mathbf{R})$  (voir [1],[19] et [9]).

**Définition.** Pour tout  $i \in \mathbf{R}$  on définit les applications  $C_i : \text{Vect}(\mathbf{R}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_{i-1})$  par  $C_i(X)(a) = J_i^{1,i}(X, a)$  pour tout  $a = a(x)(dx)^{-i} \in \mathcal{F}_i$  et  $X = X(x) \frac{d}{dx} \in \text{Vect}(\mathbf{R})$ .

**Lemme 8.1** ([9]).  $C_3$  et  $C_4$  sont des cocycles non triviaux sur  $\text{Vect}(\mathbf{R})$ .

### 8.2. Démonstration des théorèmes 3.2(b) et 3.3(b) dans le cas $\delta \neq -1, -\frac{3}{2}, -2, \dots, -k$ . Fixons $k \leq 3$ .

Considérons, pour,  $X \in \text{Vect}(\mathbf{R})$ , l'application  $\mathcal{T}_X : \mathcal{D}^k \rightarrow \mathcal{D}^k$  définie pour tout  $p \in \{0, \dots, k\}$  par :

$$\mathcal{T}_X(A)_p = L_X^{p+\delta}(a_p) + \sum_{j=p+2}^k \kappa_p^j J_{j-p+1}^{1,j+\delta}(X, a_j) \quad (32)$$

où  $\kappa_p^j$  sont des réels indépendants.

Le lemme 7.1 implique que, pour  $k \leq 3$ ,  $\mathcal{T}$  définit une action de  $\text{Vect}(\mathbf{R})$  sur  $\mathcal{D}^k$  plus générale que celle donnée par (23).

**Remarque.** L'action  $\mathcal{T}_X$  est en fait définie sur  $S_\delta^k$ . On identifie  $\mathcal{D}^k$  et  $S_\delta^k$  en tant qu'espaces vectoriels et, par le symbole  $sl_2$ -équivariant, en tant que  $sl_2(\mathbf{R})$ -modules.

Des arguments fondamentaux de la théorie de cohomologie des algèbres de Lie (voir [7]) montrent que les deux  $\text{Vect}(\mathbf{R})$ -modules définis (pour  $p$  et  $j$  donnés) par  $\kappa_p^j = 0$  et  $\kappa_p^j \neq 0$  ne peuvent être isomorphes que lorsque le cocycle  $C_{j-p+1}$  ( $j - p + 1 = 3$  ou  $4$  pour  $k \leq 3$ ) est un cobord.

Le lemme 7.1 montre que les  $\text{Vect}(\mathbf{R})$ -modules (32) dans les cas

- (1)  $\kappa_1^3 \neq 0, \kappa_0^2 \neq 0, \kappa_0^3 \neq 0,$
- (2)  $\kappa_1^3 \neq 0, \kappa_0^2 \neq 0, \kappa_0^3 = 0,$
- (3)  $\kappa_1^3 \neq 0, \kappa_0^2 = 0, \kappa_0^3 = 0,$



$$(4) \kappa_1^3 = 0, \kappa_0^2 \neq 0, \kappa_0^3 \neq 0,$$

$$(5) \kappa_1^3 = 0, \kappa_0^2 \neq 0, \kappa_0^3 = 0,$$

sont non isomorphes deux à deux .

Prenons à présent  $\kappa_p^j = \beta_p^j$  ( $\beta_p^j$  donné par (25)), on obtient immédiatement le théorème 3.3.(b) pour  $\delta \neq -1, -\frac{3}{2}, -2, -\frac{5}{2}, -3$ . ■

Pour obtenir le théorème 3.2.(b) pour  $\delta \neq -1, -\frac{3}{2}, -2$ , il suffit de distinguer les cas  $\kappa_0^2 = 0$  et  $\kappa_0^2 \neq 0$ . ■

**Corollaire 8.2.** *Pour  $k \geq 3$ , le module  $\mathcal{D}_{\lambda, \mu}^k$ , tel que  $\delta \neq -1, -\frac{3}{2}, -2, \dots, -k$ , ne peut être isomorphe à  $S_\delta^k$*

**Preuve.** Il n'existe pas de  $\lambda, \mu$  tels que  $\beta_1^3 = \beta_0^2 = \beta_0^3 = 0$ . ■

Pour  $k = 2$ , cet isomorphisme est obtenu par une famille à 1-paramètre de modules :  $\mathcal{D}_{\lambda, -1}^2 \cong S_{-1-\lambda}^2$ . Dans ce cas, la déformation de l'action de  $\text{Vect}(\mathbf{R})$  sur  $S_\delta^2$  est triviale.

## 9 Le cas des résonances ; démonstration du théorème 1.1.

Dans cette partie nous allons classifier Les  $\text{Vect}(\mathbf{R})$ -modules  $\mathcal{D}_{\lambda, \mu}^k$  qui correspondent à  $\delta \in \{-1, -\frac{3}{2}, -2, \dots, -k\}$ . Ce cas est exceptionnel, nous montrons qu'il est lié au groupe de cohomologie  $H^1(\mathfrak{sl}_2(\mathbf{R}); \text{Hom}(\mathcal{F}_{\frac{n}{2}}, \mathcal{F}_{-1-\frac{n}{2}})) \neq \{0\}$ .

La partie (ii) du théorème 1.1 est un corollaire de la proposition suivante :

**Proposition 9.1.** *Si  $\delta \in \{-1, -\frac{3}{2}, -2, \dots, -k\}$ , alors  $\mathcal{D}_{\lambda, \mu}^k$  est isomorphe à  $S_{\mu-\lambda}^k$  en tant que  $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{R})$ -module si et seulement si  $\mathcal{D}_{\lambda, \mu}^k$  est égal à l'un des modules suivants :*

$$a) \mathcal{D}_{\frac{l-1}{2}, -\frac{l+1}{2}}^k, \quad 1 \leq l \leq k$$

$$b) \mathcal{D}_{\frac{l-1}{2}, -\frac{l}{2}}^k \cong \mathcal{D}_{\frac{l-2}{2}, -\frac{l+1}{2}}^k, \quad 2 \leq l \leq k.$$

**Preuve.** Soit  $\sigma_{\lambda, \mu}$  soit un symbole  $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{R})$ -équivariant. La condition d'équivariance de  $\sigma_{\lambda, \mu}$  par rapport à l'algèbre affine implique ( cf. partie 5.2) que  $\sigma_{\lambda, \mu}$  est défini comme suit :

$$\bar{a}_p(x) = \sum_{j=p}^k \gamma_p^j a_j^{(j-p)}(x)$$

où  $\gamma_p^j$  sont des constantes,  $\gamma_p^p = 1$  pour tout  $0 \leq p \leq k$ .

**Lemme 9.2.** *l'action (15) de  $\text{Vect}(\mathbf{R})$  sur  $\mathcal{D}_{\lambda, \mu}^k$  donnée par les  $\bar{a}_i(x)$  est :*

$$\bar{a}_p^X(x) = L_X^{\delta+p}(\bar{a}_p) + \sum_{j=p+1}^k \varrho_p^j \bar{a}_l^{(j-p-1)}(x) X'' + (\text{termes en } X^{(n)} \quad n \geq 3)$$

avec

$$\varrho_p^j = \frac{j}{2} \gamma_p^{j-1} (2\lambda - j + 1) - \frac{(j-p)}{2} \gamma_p^j (2\delta + p + j + 1).$$

**Preuve du lemme.** Analogue à celle du lemme 5.2. ■

Pour  $k$  et  $\delta$  fixés posons  $E^k = \{(p, j) \text{ tels que } 0 \leq p \leq k \text{ et } p+1 \leq j \leq k\}$  et  $E_\delta^k = \{(p, j) \in E^k \text{ tels que } 2\delta + p + j + 1 = 0\}$ . Remarquons que dans le cas des résonances  $E_\delta^k$  n'est jamais vide.

Pour que  $\sigma$  puisse être  $sl_2(\mathbf{R})$ -équivariante il faut que le système suivant aux inconnues  $\gamma_p^j$  soit vérifié :

$$\varrho_p^j = 0 \quad \forall (p, j) \in E^k. \quad (33)$$

Il est facile de voir que si l'hypothèse :

$$H_p^j : (p, j) \in E_\delta^k \text{ et } 2\lambda - i + 1 \neq 0 \quad \forall i \in \{p+1, \dots, j\}$$

est vraie pour un couple  $(p, j) \in E^k$ , alors le système (33) donne  $\gamma_p^p = 0$  ce qui est exclu car  $\sigma$  aurait alors un noyau non trivial.

Nous devons donc distinguer deux cas :

1) Si  $\prod_{i=1}^k (2\lambda - i + 1) \neq 0$  alors  $\exists (p, j) \in E^k$  tel que  $H_p^j$  est vérifiée.  $\sigma$  est dans ce cas non injective.

2) Si  $\exists l \in \{1, \dots, k\}$  tel que  $2\lambda - l + 1 = 0$  alors trois possibilités se présentent :

a)  $\prod_{t=0}^{2l-2} (2\delta + t) = 0$  alors  $\exists p \in \{0, \dots, l-2\}$  pour lequel  $H_p^j$  est vérifiée.

b)  $\prod_{t=2l+2}^{2k} (2\delta + t) = 0$  alors  $\exists p \in \{l, \dots, k\}$  pour lequel  $H_p^j$  est vérifiée.

c)  $(2\delta + 2l - 1)(2\delta + 2l)(2\delta + 2l + 1) = 0$  alors le système (33) est résoluble avec  $\gamma_p^p \neq 0 \quad \forall p \in \{0, \dots, k\}$  car l'hypothèse  $H_p^j$  n'est jamais vérifiée.  $\sigma$  ainsi défini fournit donc l'isomorphisme de  $sl_2(\mathbf{R})$ -modules  $\mathcal{D}_{\lambda, \mu}^k \cong S_{\mu - \lambda}^k$  dans les cas suivants :

(i)  $2\delta + 2l - 1 = 0$ ,  $\lambda = \frac{l-1}{2}$  et  $\mu = -\frac{l}{2}$  :

$$\mathcal{D}_{\frac{l-1}{2}, -\frac{l}{2}}^k \cong S_{-l+\frac{1}{2}}^k, \quad 2 \leq l \leq k.$$

(ii)  $2\delta + 2l = 0$ ,  $\lambda = \frac{l-1}{2}$  et  $\mu = -\frac{l+1}{2}$  :

$$\mathcal{D}_{\frac{l-1}{2}, -\frac{l+1}{2}}^k \cong S_{-l}^k, \quad 1 \leq l \leq k.$$

(iii)  $2\delta + 2l + 1 = 0$ ,  $\lambda = \frac{l-1}{2}$  et  $\mu = -\frac{l+2}{2}$  :

$$\mathcal{D}_{\frac{l-1}{2}, -\frac{l+2}{2}}^k \cong S_{-l-\frac{1}{2}}^k, \quad 1 \leq l \leq k-1.$$

Remarquons enfin que les modules (i) et (iii) sont conjugués :

$$\mathcal{D}_{\frac{l-1}{2}, -\frac{l}{2}}^k \cong \mathcal{D}_{\frac{l-2}{2}, -\frac{l+1}{2}}^k, \quad 2 \leq l \leq k,$$

et que le module (ii)  $\mathcal{D}_{\frac{l-1}{2}, -\frac{l+1}{2}}^k$  est autoadjoint.

La proposition 9.1 est prouvée. ■

A défaut de symbole  $sl_2(\mathbf{R})$ -équivariant, nous allons définir dans la partie 9.3 une forme particulière du symbole qui simplifie le plus possible l'action de  $\text{Vect}(\mathbf{R})$  sur  $\mathcal{D}_{\lambda, \mu}^k$ .

**9.1 Classes de cohomologie  $H^1(sl_2(\mathbf{R}); \text{Hom}(\mathcal{F}_{\frac{n}{2}}, \mathcal{F}_{-\frac{n}{2}-1}))$  non triviales.** Le problème d'isomorphisme des modules  $\mathcal{D}_{\lambda, \mu}^k$  est lié, dans le cas  $\delta = -1, -\frac{3}{2}, \dots, -k$ , au premier groupe de cohomologie  $H^1(sl_2(\mathbf{R}); \text{Hom}(\mathcal{F}_{\frac{n}{2}}, \mathcal{F}_{-\frac{n}{2}-1}))$ . Nous montrons ici que ce groupe est non trivial.

**Lemme-définition.** Les applications  $C_2^n : sl_2(\mathbf{R}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}_{\frac{n}{2}}, \mathcal{F}_{-\frac{n}{2}-1})$  définies, pour tous  $a \in C^\infty(\mathbf{R})$  et  $X \in sl_2(\mathbf{R})$ , par

$$C_2^n(X)(a(dx)^{-\frac{n}{2}}) := X''a^{(n)}(dx)^{1+\frac{n}{2}} \quad (34)$$

sont des  $sl_2(\mathbf{R})$ -cocycles pour tout  $n \in \mathbf{N}$ .

**Preuve.** Pour montrer que  $C_2^n$  est un cocycle, on vérifie aisément que la condition :  $[L_X, C_2^n(Y)] - [L_Y, C_2^n(X)] = C_2^n([X, Y])$  est satisfaite pour tous  $X, Y \in sl_2(\mathbf{R})$ . ■

**Lemme 9.3.** Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , les applications  $C_2^n$  sont des 1-cocycles non triviaux.

**Preuve.** Supposons, par l'absurde, que la classe de cohomologie  $[C_2^n] = 0$ . Cela implique qu'il existe  $B \in \text{Hom}(\mathcal{F}_{\frac{n}{2}}, \mathcal{F}_{-\frac{n}{2}-1})$  tel que  $C_2^n = dB$ . Soit  $a \in \mathcal{F}_{\frac{n}{2}}$ ,  $B$  est donné par :  $B(a) = \sum_{i=0}^m B_i a^{(i)}$  (puisqu'on considère les cobords de la cohomologie différentielle de  $\text{Vect}(\mathbf{R})$ , [7]) où  $B_i \in C^\infty(\mathbf{R})$  et  $m \in \mathbf{N}$ .

On a :

$$\begin{aligned} dB(X)(a) &:= (L_X^{-\frac{n}{2}-1} \circ B - B \circ L_X^{\frac{n}{2}})(a) \\ &= X \sum_{i=0}^m (B'_i a^{(i)} + B_i a^{(i+1)}) \\ &\quad + \left(\frac{n}{2} + 1\right) X' \sum_{i=0}^m B_i a^{(i)} - \sum_{i=0}^m B_i (Xa' - \frac{n}{2} X'a)^{(i)}. \end{aligned}$$

Le terme  $X''a^{(n)}$  a pour coefficient dans la somme ci-dessus :

$$-B_{n+1} \left( \binom{n+1}{2} - \frac{n}{2} \binom{n+1}{1} \right) = 0.$$

Cela est contradictoire avec  $dB(X)(a) = C_2^n(X)(a) = (\text{constante} \neq 0)X''a^{(n)}$ , pour tous  $X \in sl_2(\mathbf{R})$  et  $a \in \mathcal{F}_{\frac{3}{2}}$ . Le lemme 9.3 est prouvé. ■

**Remarques.** (a) Les résultats de cette partie ont été généralisés dans un travail récent [16].

(b) Seuls  $C_2^0$  et  $C_2^1$  sont des  $\text{Vect}(\mathbf{R})$ -cocycles, ces deux exemples sont donnés dans [6].

## 9.2 Déformation de $sl_2(\mathbf{R})$ -modules

Dans cette partie nous appliquons les cocycles  $C_2^n$ , définis par la formule (34), pour construire une déformation non triviale du  $sl_2(\mathbf{R})$ -module :  $S_\delta^k$  avec  $\delta = -1, -\frac{3}{2}, \dots, -k$ .

**Définition.** Soit l'application  $T_X : S_\delta^k \rightarrow S_\delta^k$  où  $X \in sl_2(\mathbf{R})$ , définie par :  $T_X(\xi^\delta \sum_{i=0}^k \bar{a}_i(x)\xi^i) = \xi^\delta \sum_{i=0}^k \bar{a}_i^X(x)\xi^i$ , avec

$$\begin{cases} \bar{a}_i^X = L_X^{\delta+i}(\bar{a}_i) & \text{si } i < -2\delta - k - 1 \text{ ou } i > -\delta - 1 \\ \bar{a}_i^X = L_X^{\delta+i}(\bar{a}_i) + \bar{\alpha}_i^s X'' \bar{a}_i^{(s-p-1)} & \text{si } -2\delta - k - 1 \leq i \leq -\delta - 1 \end{cases} \quad (35)$$

où  $s = -2\delta - i - 1$  et

$$\bar{\alpha}_i^s = \frac{s}{2} \alpha_i^{s-1} (2\lambda - s + 1), \quad (36)$$

( $\alpha_i^j$  est donné par (18)).

L'application  $T$  définie par (35) est une action de  $sl_2(\mathbf{R})$  sur  $S_\delta^k$  : c'est un corollaire du lemme 9.3.

**Notation.** On note  $\mathcal{M}_{\lambda,\mu}^k$  le  $sl_2(\mathbf{R})$ -module défini par la formule (35).

## 9.3 Symbole normal

**Lemme 9.4.** Dans le cas  $\delta \in \{-1, -\frac{3}{2}, \dots, -k\}$ , il existe un isomorphisme de  $sl_2$ -modules

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\lambda,\mu} : \mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k &\rightarrow \mathcal{M}_{\lambda,\mu}^k \\ A &\mapsto \bar{A} = \xi^\delta \sum_{i=0}^k \bar{a}_i(x)\xi^i \end{aligned}$$

donné par  $\bar{a}_p(x) = \sum_{l=p}^k \zeta_p^l \alpha_l^{(l-p)}(x)$ , avec

$$\begin{cases} \zeta_p^l = \frac{\binom{l}{p} \binom{2\delta+l+p+1}{2\delta+s+p+1}}{\binom{s}{p} \binom{2\lambda-s}{2\lambda-l}} \zeta_p^s & \text{si } -2\delta - k - 1 \leq p \leq -\delta - 1, \\ \zeta_p^l = \alpha_p^l & \text{si } p < -2\delta - k - 1 \text{ ou } p > -\delta - 1, \end{cases} \quad (37)$$

où  $\alpha_p^j$  est donné par (18) et  $s = -2\delta - p - 1$ .

**Preuve.** Posons, pour tous  $A \in \mathcal{D}^k$  et  $X \in \text{Vect}(\mathbf{R})$ ,

$$\tilde{\sigma}_{\lambda,\mu}(L_X^{\lambda,\mu}(A)) := \xi^\delta \sum_{i=0}^k \tilde{a}_i^X(x) \xi^i$$

Une preuve analogue à celle du lemme 6.1 montre, qu'en termes des  $\tilde{a}_i(x)$ , l'action de  $\text{Vect}(\mathbf{R})$  sur  $\mathcal{M}_{\lambda,\mu}^k$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_p^X &= L_X^{\delta+p}(\tilde{a}_p) + \sum_{j=p+2}^k \chi_p^j J_{j-p+1}^{1,\delta+j}(X, \tilde{a}_j) \quad \text{si } p < -2\delta - k - 1 \\ &\quad \text{ou } p > -\delta - 1 \\ \tilde{a}_p^X &= L_X^{\delta+p}(\tilde{a}_p) + \bar{\alpha}_p^s X'' \tilde{a}_s^{(s-p-1)} \\ &\quad + \sum_{j=p+2}^k \chi_p^j J_{j-p+1}^{1,\delta+j}(X, \tilde{a}_j) \quad \text{si } -2\delta - k - 1 \leq p \leq -\delta - 1, \end{aligned} \quad (38)$$

où  $\chi_p^j$  sont des fonctions en  $(\lambda, \mu)$  et  $\bar{\alpha}_p^s$  donné par (36) avec  $s = -2\delta - p - 1$ .

Si on prend  $X$  dans  $sl_2(\mathbf{R})$  la formule (38) devient :

$$\tilde{\sigma}_{\lambda,\mu}(\text{ad}L_X^{\lambda,\mu}(A)) = \mathcal{T}_X(\tilde{A}),$$

où  $\mathcal{T}$  est définie par la formule (35).

L'application  $\tilde{\sigma}_{\lambda,\mu}$  est donc  $sl_2(\mathbf{R})$ -équivariante. Le lemme 9.4 est démontré. ■

Nous prouvons dans ce qui suit qu'il est possible de définir un symbole normal unique (à normalisation près).

**Lemme 9.5.**  $\chi_p^j$  (donné par (38)) et  $\zeta_p^j$  (donné par (37)) vérifient la relation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\chi_p^j}{\theta_p^j} &= \zeta_p^j - \sum_{r=p+2}^{j-1} \zeta_r^j \zeta_p^r \quad \text{si } j \geq p+3 \\ \frac{\chi_p^{p+2}}{\theta_p^{p+2}} &= \left( \binom{p+2}{2} \lambda - \binom{p+2}{3} \right) + \left( \binom{p+2}{1} \lambda - \binom{p+2}{2} \right) \zeta_p^{p+1} - (p+2+\delta) \zeta_p^{p+2} \quad \text{si } p \geq 1 \\ \frac{\chi_0^2}{\theta_0^2} &= \lambda + (2\lambda - 1) \zeta_0^1 - (2+\delta) \zeta_0^2, \end{aligned} \quad (39)$$

où

$$\begin{aligned} \zeta_p^j &= \left( \binom{j}{2} \lambda - \binom{j}{3} \right) \zeta_p^{j-2} + \left( \binom{j}{1} \lambda - \binom{j}{2} \right) \binom{j-p-1}{1} \zeta_p^{j-1} \\ &\quad - \left( \binom{j-p}{3} - (j+\delta) \binom{j-p}{2} \right) \zeta_p^j \end{aligned} \quad (40)$$

et  $\theta_p^j$  donné par (24).

**Preuve.** D'après la formule (38) le coefficient de  $X'''\tilde{a}_j^{(j-p-2)}(x)$  dans  $\tilde{a}_p^X$  ( $j \geq p+2$ ) est  $\frac{\chi_p^j}{\theta_p^j}$ , et ce car  $J_{j-p+1}^{1,j+\delta}(X, \tilde{a}_j) = \theta_p^j X''' \tilde{a}_j^{(j-p-2)} + (\text{termes en } X^{(n)} \text{ } n \geq 4)$ .

Remarquons qu'il n'y a pas de termes en  $X, X'$  car  $j-p+1$  est toujours  $\geq 3$  et, si  $m \geq 3$ ,  $\mathcal{J}_m^{1,\tau}(X, a_\tau) = 0$  pour  $X \in sl_2(\mathbf{R})$  (cf. partie 6.1).

Calculons à présent  $\frac{\chi_p^j}{\theta_p^j}$ . Pour cela remarquons que les coefficients de  $X''' \tilde{a}_j^{(j-p-2)}(x)$  et de  $X''' a_j^{(j-p-2)}(x)$  dans  $\tilde{a}_p^X$  sont égaux car  $\tilde{a}_j(x) = a_j(x) + \sum_{l=j+1}^k \zeta_l^j a_l^{(l-j)}(x)$ .

On a  $\tilde{a}_p(x) = \sum_{l=p}^k \zeta_p^l a_l^{(l-p)}(x)$ , ce qui donne  $\tilde{a}_p^X(x) = \sum_{l=p}^k \zeta_p^l (a_l^X)^{(l-p)}(x)$ , où  $a_l^X$  est donné par (15).

Il suffit maintenant de sommer tous les termes en  $X''' \tilde{a}_j^{(j-p-2)}(x)$  pour trouver  $\frac{\chi_p^j}{\theta_p^j}$  :

$$\frac{\chi_p^j}{\theta_p^j} = \zeta_p^j - \sum_{r=p+2}^{j-1} \zeta_r^j \frac{\chi_p^r}{\theta_p^r} \quad \text{si } j \geq p+3$$

$$\frac{\chi_p^{p+2}}{\theta_p^{p+2}} = \zeta_p^{p+2}$$

La résolution de ce système donne le résultat énoncé. Le lemme 9.5 est prouvé. ■

Le symbole normal dépend du choix des  $(\zeta_p^s)_{p+1 \leq s = -p-1-2\delta \leq k}$ , qui jouent un rôle arbitraire. Dans toute la suite, nous utiliserons le symbole normal défini de façon unique (à multiplication par constante près) en imposant aux  $(\zeta_p^s)_{p+1 \leq s = -p-1-2\delta \leq k}$  la condition suivante :

- (a) si  $s \geq p+2$  on choisira  $\zeta_p^s$  tel que  $\chi_p^s = 0$ ,
- (b) si  $s = p+1$  on choisira  $\zeta_p^s$  de sorte à annuler le premier terme de la séquence suivante où le coefficient de  $\zeta_p^s$  est non nul :

$$\chi_p^{s+2}, \chi_{p-2}^s, \chi_{p-3}^s, \dots, \chi_0^s$$

Remarquons que ce choix est possible grâce au lemme 9.5.

## 10 Preuves des théorèmes de classification : le cas des résonances.

L'existence et l'unicité du symbole normal nous permettront, par une démarche analogue à celle suivie dans les parties 7 et 8, d'achever les preuves

des théorèmes 3.1, 3.2, 3.3 et 3.4. On supposera toujours que  $\delta \in \{-1, -\frac{3}{2}, -2, \dots, -k\}$ .

**Lemme 10.1.** Soit  $T : \mathcal{D}_{\lambda, \mu}^k \rightarrow \mathcal{D}_{\rho, \eta}^k$  un isomorphisme de  $\text{Vect}(\mathbf{R})$ -modules, alors  $T$  est diagonal en termes de symbole normal

**Preuve.** Analogue à celle de la proposition 7.1. ■

Soient  $A \in \mathcal{D}_{\lambda, \mu}^k$  et  $\tilde{\sigma}_{\lambda, \mu}(T(A)) := \xi^\delta \sum_{i=0}^k \tilde{a}_i^T(x) \xi^i$  le symbole normal de  $T(A)$ . Le lemme 10.1 implique qu'il existe des constantes  $\tau_0, \dots, \tau_k$  (dépendants de  $\lambda, \mu, \rho, \eta$ ) telles que  $\tilde{a}_i^T(x) = \tau_i \tilde{a}_i(x)$ , pour tout  $i = 0, \dots, k$ .

Cela se traduit, en écrivant l'équivariance de  $T$ , par le système suivant :

$$\tau_p \chi_p^j(\lambda, \mu) = \tau_j \chi_p^j(\rho, \eta) \quad , \quad (41)$$

pour tous  $p \in \{0, \dots, k\}$  et  $j \geq p + 1$ . Les  $\chi_p^j$  étant définis pour  $j \geq p + 2$  par (38).

**Notation.** On note dans le système (41) et dans toute la suite

$$\begin{aligned} \chi_p^{p+1} &= \bar{\alpha}_p^s & \text{si } -2\delta - k - 1 \leq p \leq -\delta - 1, \\ \chi_p^{p+1} &= 0 & \text{si } p < -2\delta - k - 1 \text{ ou } p > -\delta - 1. \end{aligned} \quad (42)$$

où  $\bar{\alpha}_p^s$  est donné par (36), avec  $s = -2\delta - p - 1$ .

### 10.1 Isomorphismes de $\text{Vect}(\mathbf{R})$ -modules en termes de symbole normal

La résolution du système (41) montre que les isomorphismes de  $\text{Vect}(\mathbf{R})$ -modules  $T : \mathcal{D}_{\lambda, \mu}^k \rightarrow \mathcal{D}_{\rho, \eta}^k$  dans le cas résonant (en termes de symbole normal) sont un prolongement (sauf pour  $(k, \delta) = (3, -2)$ ) des isomorphismes dans le cas non résonant (en termes de symbole  $sl_2$ -équivariant). En effet :

(1) si  $k = 1$ , un isomorphisme  $T : \mathcal{D}_{\lambda, \mu}^1 \rightarrow \mathcal{D}_{\rho, \eta}^1$  est obtenu en prenant  $(\tilde{a}_1^T(x), \tilde{a}_0^T(x)) = (\tilde{a}_1(x), \frac{\rho}{\lambda} \tilde{a}_0(x))$ . Cet isomorphisme prolonge le cas non résonant (27). Le théorème 3.1.(b) est prouvé dans le cas  $\lambda \neq 0$ . ■

(2) Si  $k = 2$ , on obtient un isomorphisme  $T : \mathcal{D}_{\lambda, \mu}^2 \rightarrow \mathcal{D}_{\rho, \eta}^2$  en prenant dans (41) :

$$\begin{aligned} \tau_2 &= 1 \\ \tau_1 &= \frac{2\rho + \delta + 1}{2\lambda + \delta + 1} \\ \tau_0 &= \frac{\rho(\rho + \delta + 1)}{\lambda(\lambda + \delta + 1)} \end{aligned} \quad (43)$$

Remarquons que la formule (43) est un prolongement de la formule (28) avec le coefficient  $\tau_1$  fixé.

Le théorème 3.2.(a) est démontré. ■

(3) Si  $k = 3$ , l'isomorphisme (30) se prolonge au cas résonant pour tout  $\delta = -1, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -3$ .

Le cas  $\delta = -2$  est particulier car les isomorphismes du cas non résonant *ne se prolongent pas* au cas résonant. Cela vient du fait que la condition d'équivariance d'un isomorphisme  $T : \mathcal{D}_{\lambda,\mu}^3 \rightarrow \mathcal{D}_{\rho,\eta}^3$  implique (pour  $\delta = -2$ )

$$\begin{aligned} \frac{\tau_1}{\tau_2} &= \frac{2\rho - 1}{2\lambda - 1}, & \frac{\tau_1}{\tau_3} &= \frac{3\rho^2 - 3\rho + 1}{3\lambda^2 - 3\lambda + 1} \\ \frac{\tau_0}{\tau_2} &= \frac{\rho(\rho - 1)}{\lambda(\lambda - 1)}, & \frac{\tau_0}{\tau_3} &= \frac{\rho(\rho - 1)(2\rho - 1)}{\lambda(\lambda - 1)(2\lambda - 1)}. \end{aligned}$$

Ce système n'a de solution que si  $\lambda + \rho = 1$  (ie.  $\lambda + \eta = -1$ ) ou  $\lambda = \rho$ . Cela implique que, dans ce cas, le seul isomorphisme est la conjugaison. Le théorème 3.3 (a) est prouvé. ■

(4) Si  $k = 4$  Le système (41) n'a de solution que si  $\lambda + \eta = -1$  ou  $\lambda = \rho$ . Le seul isomorphisme de  $\text{Vect}(\mathbf{R})$ -modules est la conjugaison d'opérateurs différentiels. Le cas  $k > 4$  se déduit du cas  $k = 4$  (cf. partie 7.2). Le théorème 3.4 est prouvé. ■

**Remarque.** Le cas résonant  $\delta = -2$  semble être particulièrement intéressant. Déjà le module des opérateurs d'ordre 2 :  $\mathcal{D}_{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}}^2$  est le premier module des opérateurs différentiels étudié dans les travaux classiques. Nous avons prouvé que pour les opérateurs d'ordre 3 la famille des modules  $\mathcal{D}_{\lambda,\lambda-2}^3$  est complètement différente des autres cas résonant.

## 10.2 $sl_2(\mathbf{R})$ -modules particuliers

Fixons  $k \leq 3$  et reprenons l'action (32) en la modifiant, pour les entiers  $p$  vérifiant  $-2\delta - k - 1 \leq p \leq -\delta - 1$ , de la façon suivante :  $\mathcal{T}_X(A)_p = L_X^{\delta+p}(a_p) + \kappa_p^{p+1} X'' a_s^{(s-p-1)} + \sum_{j=p+2}^k \kappa_p^j J_{j-p+1}^{1,\delta+j}(X, a_j)$ , avec  $s = -2\delta - p - 1$ .

Posons  $\kappa_p^j = \chi_p^j$ . Nous sommes maintenant en mesure d'affirmer que deux  $\text{Vect}(\mathbf{R})$ -modules  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^3$  et  $\mathcal{D}_{\rho,\eta}^3$  définis, respectivement, pour  $p$  et  $j$  fixés, par  $\kappa_p^j \neq 0$  et  $\kappa_j^j = 0$ , ne sont pas isomorphes.

En effet, supposons, par l'absurde,  $T$  un tel isomorphisme. Si  $j \geq p + 2$ , la non-trivialité de  $C_3$  et  $C_4$  (voir la partie 8) contredit l'existence de  $T$ . Si  $j = p + 1$ , il est évident que  $T$  réalise un isomorphisme entre  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^3$  et  $\mathcal{D}_{\rho,\eta}^3$  considérés comme  $sl_2(\mathbf{R})$ -modules.

Des arguments analogues à ceux utilisés dans la partie 8 montrent que, dans ce cas, les cocycles  $C_2^n$  définis par (34) sont des cobords sur  $sl_2(\mathbf{R})$ . Cela est en contradiction avec le lemme 9.3.

Nous pouvons procéder maintenant comme dans la partie 8 : à chaque fois que nous fixons  $\delta$  dans  $\{-1, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -3\}$  (*rappelons que pour  $\delta = -2$  tout module  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^3$  est singulier*, voir le paragraphe 10.1),  $p$  dans  $\{0, 1, 2\}$ , et  $j \geq p + 1$ , nous obtenons un module singulier de la table suivante qui correspond à  $\chi_p^j = 0$  :



$\delta = -1$	$\delta = -\frac{3}{2}$	$\delta = -\frac{5}{2}$	$\delta = -3$
$\mathcal{D}_{0,-1}^3$	$\mathcal{D}_{\frac{1}{4},-\frac{5}{4}}^3$	$\mathcal{D}_{\frac{3}{4},-\frac{7}{4}}^3$	$\mathcal{D}_{1,-2}^3$
		$\mathcal{D}_{\frac{1}{2},-2}^3 \cong \mathcal{D}_{1,-\frac{3}{2}}^3$	$\mathcal{D}_{0,-3}^3 \cong \mathcal{D}_{2,-1}^3$
	$\mathcal{D}_{0,-\frac{3}{2}}^3 \cong \mathcal{D}_{\frac{1}{2},-1}^3$	$\mathcal{D}_{\frac{3}{2},-1}^3 \cong \mathcal{D}_{0,-\frac{5}{2}}^3$	$\mathcal{D}_{1+\frac{\sqrt{3}}{3},-2+\frac{\sqrt{3}}{3}}^3 \cong \mathcal{D}_{1-\frac{\sqrt{3}}{3},-2-\frac{\sqrt{3}}{3}}^3$

On vérifie facilement que chaque module de la table ci-dessus s'écrit sous l'une des formes (1), (2) ou (3) du théorème 3.3.(b).

Le théorème 3.3 est prouvé. ■

On achève la démonstration des théorèmes 3.1 et 3.2 par une méthode analogue. On obtient la table des modules singuliers qui correspondent à  $\chi_p^j = 0$  pour les opérateurs d'ordres 1 et 2 :

	$\delta = -1$	$\delta = -\frac{3}{2}$	$\delta = -2$
$k = 1$	$\mathcal{D}_{0,-1}^1$		
$k = 2$	$\mathcal{D}_{0,-1}^2$	$\mathcal{D}_{0,-\frac{3}{2}}^2 \cong \mathcal{D}_{\frac{1}{2},-1}^2$	$\mathcal{D}_{\frac{1}{2},-\frac{3}{2}}^2$
			$\mathcal{D}_{0,-2}^2 \cong \mathcal{D}_{1,-1}^2$

La classification des  $sl(m+1)$ -modules  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k$  sur  $\mathbf{R}^m$  ( $m \geq 2$ ) a été obtenue dans un récent article de P. Lecomte [17].

### Remerciements.

Le problème m'a été posé par V.Yu.Ovsienko que je remercie pour la direction de ce travail. Je voudrais exprimer ma gratitude à P. Lecomte pour son aide à l'amélioration d'une version préliminaire de cet article. Je remercie également C. Duval, et C. Roger pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail. Une partie de ce travail a été effectuée dans le service de géométrie et théorie des algorithmes de l'Université de Liège, que je remercie pour son soutien.

## Références

- [1] S. Bouarroudj, V. Ovsienko, *Three cocycles on  $\text{Diff}(\mathbb{S}^1)$  generalizing the Schwarzian derivative*, Int. Math. Res. Not., to appear.
- [2] E. Cartan, *Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective*, Gauthier -Villars, Paris - 1937.
- [3] H. Cohen, *Sums involving the values at negative integers of  $L$  functions of quadratic characters*, Math. Ann. 217 (1975) 181-194.
- [4] P. Cohen, Yu. Manin & D. Zagier, *Automorphic pseudodifferential operators*, Preprint MPI (1995).
- [5] C. Duval, V. Ovsienko, *Space of second order linear differential operators as a module over the Lie algebra of vector fields*, Advances in Math, to appear.
- [6] B. L. Feigin & D. B. Fuks, *Homology of the Lie algebra of vector fields on the line*, Func. Anal. Appl., 14 (1980), 201-212.
- [7] D. B. Fuks, "Cohomology of infinite-dimensional Lie algebras," Consultants Bureau, New York, 1987.
- [8] D. Garageu, *Gonformally and projective covariant differential operators*, Preprint CPT, 1997.
- [9] H. Gargoubi, V. Ovsienko, *Space of linear differential operators on the real line as a module over the Lie algebra of vector fields*, Int. Math. Res. Not., (1996) N.5, 235-251.
- [10] I.M. Gel'fand & L.A. Dikii, *A family of hamiltonian structures connected with integrable nonlinear differential equations*, in : I.M. Gel'fand collected papers (S.G Gindikin et al, eds) - Vol. 1 - Springer-Verlag - 1987 - p. 625 à 646.
- [11] P. Gordan, *Invariantentheorie*, Teubner, Leipzig, 1887.
- [12] P.Ya. Grozman, *Classification of bilinear invariant operators over tensor fields*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. 14 (1980), no. 2, 58-59; English trans. in Functional Anal. Appl. 14 (1981).
- [13] A. A. Kirillov, *Infinite dimensional Lie groups : their orbits, invariants and representations. The geometry of moments*, Lect. Notes in Math., 970 Springer-Verlag (1982) 101-123.
- [14] A. A. Kirillov, *Geometric Quantisation*, in "Encyclopedia of Math. Sci.," Vol.4, Springer-Verlag, 1990.
- [15] B. Kostant, *Quantisation and Unitary Representations*, in "Lecture Notes in Math.," Springer-Verlag, Vol. 170, 1970.
- [16] P.B.A. Lecomte, *On the cohomology of  $sl(m+1, \mathbf{R})$  acting on differential operators and  $sl(m+1, \mathbf{R})$ -equivariant symbol*, Preprint University of Liège (1998).
- [17] P.B.A. Lecomte, *Classification projective des espaces d'opérateurs différentiels agissant sur les densités*, à paraître dans : c.r.a.s. Paris.

- [18] P.B.A. Lecomte, P. Mathonet & E. Tousset, *Comparison of some modules of the Lie algebra of vector fields*, Indag. Math., N.S., 7(4), 461-471.
- [19] P.B.A. Lecomte, V. Ovsienko, *Projectively invariant symbol map and cohomology of vector fields Lie algebras intervening in quantisation*, Preprint C.P.T (1996).
- [20] P. Mathonet, *Intertwining operators between some spaces of differential operators on a manifold*, Comm. in Algebra, to appear.
- [21] J. Peetre, *Une caractérisation abstraite des opérateurs différentiels*, Math. Scand. 7 (1959), 211-218 and 8 (1960), 116-120.
- [22] R. A. Rankin, *The construction of automorphic forms from the derivatives of a given form*, J. Indian Math. Soc. 20 (1956) 103-116.
- [23] E. J. Wilczynski, *Projective differential geometry of curves and ruled surfaces*, Leipzig - Teubner - 1906.

Hichem GARGOUBI  
Centre de Physique Théorique CPT-CNRS,  
Luminy Case 907, F-13288 Marseille, Cedex 9  
FRANCE