

Chapitre 2

Théorie du phénomène de mirage gravitationnel

Nous voulons faire entrer à tout prix la finesse et la rigueur des mathématiques dans toute science, afin d'établir notre relation humaine aux choses.

F. Nietzsche, "Le gai savoir"

Ce chapitre est consacré à un rappel de la théorie fondamentale sous-jacente au phénomène de mirage gravitationnel. Il n'est pas dans notre intention de développer ici un panorama complet de la théorie des lentilles gravitationnelles, mais seulement d'introduire les principes fondamentaux de l'optique gravitationnelle ainsi que les concepts de la section efficace et de la probabilité associées au phénomène de lentille et auxquels nous ferons appel dans la suite de notre travail. De la sorte, nous pensons donner à notre étude l'auto-suffisance requise pour sa compréhension par un lecteur non averti. D'autre part, le lecteur désireux d'en connaître davantage sur les arcanes théoriques du phénomène de lentille gravitationnelle trouvera dans la monographie "Gravitational Lenses" (Schneider, Ehlers & Falco 1992-SEF) un excellent point de départ. Signalons également l'existence sur Internet¹ d'une base de données bibliographiques quasiment exhaustive, développée et fréquemment remise à jour par Pospieszalska-Surdej, Surdej et Véron.

Le présent chapitre est divisé en quatre parties principales. La première présente les hypothèses, les notations et le formalisme général de l'optique gravitationnelle ; la seconde décrit plus précisément les modèles de lentille gravitationnelle rencontrés dans la suite de notre étude (à savoir, le modèle ponctuel et le modèle isotherme – sphérique singulier, sphérique non singulier et elliptique singulier) ; la troisième partie aborde le concept de section efficace ou de profondeur optique associée à un événement mirage ; enfin, la quatrième et dernière partie est une introduction au traitement du phénomène de microlentille.

¹ Adresse : http://vela.astro.ulg.ac.be/grav_lens

2.1 L'optique gravitationnelle

2.1.1 Introduction : de Newton à Einstein

À partir du moment où l'on conçoit que la lumière puisse être déviée de sa trajectoire rectiligne, le phénomène de mirage devient naturel. En effet, la position de l'image perçue ne coïncidera plus avec celle de la source et, suite à l'existence d'un ensemble de solutions possibles pour la trajectoire de la lumière entre deux points de l'espace, la formation d'images multiples devient imaginable. La réflexion et la réfraction dans un milieu inhomogène furent les premières causes physiques reconnues de la déviation de la lumière. L'explication phénoménologique des différents types de mirages atmosphériques en découle aussitôt (voir par exemple Refsdal et Surdej 1994).

Bien qu'à l'aide de sa théorie corpusculaire de la lumière, Newton ait suggéré en 1704 la déviation de la lumière par l'action gravitationnelle d'un corps massif, cette prophétie s'intégrait mal dans le contexte théorique de la physique classique. Seules les descriptions cinématiques d'objets ayant la vitesse de la lumière étaient pensables, et il était impossible d'intégrer au formalisme la nature – essentiellement ondulatoire à l'époque – de la lumière. C'est en 1919, dans le cadre de la théorie de la Relativité Générale, que la déviation d'un rayon lumineux passant à proximité d'un corps massif acquit le statut supérieur de prédiction théorique. L'espace-temps est conçu en Relativité Générale comme une variété géométrique à 4 dimensions, dont la géométrie dépend du contenu matériel et dont les géodésiques sont les trajectoires suivies par la lumière. Un objet massif dévie la lumière dans son voisinage par l'intermédiaire de la courbure qu'il imprime à l'espace-temps. En 1937, Zwicky affirma que les "nébuleuses extragalactiques" pouvaient jouer le rôle de lentilles gravitationnelles, capables de déformer et de démultiplier les images de sources encore plus distantes ; il prédit également qu'un tel phénomène finirait par être observé (Zwicky 1937). Ce fut chose faite 42 ans plus tard, en 1979, lors de la découverte du quasar "double" Q0957+561 (Walsh, Carswell & Weymann 1979).

Ainsi donc, le phénomène de lentille gravitationnelle peut se comparer à une expérience d'optique de laboratoire, mais où le laboratoire est remplacé par l'Univers tout entier, où une inhomogénéité matérielle se substitue à la lentille de verre et où le rôle de la source lumineuse est joué par une galaxie ou un quasar très distant. Globalement, la loi de propagation de la lumière est définie par la métrique (ou structure) spatio-temporelle associée à l'Univers (elle est fournie par un modèle cosmologique solution des équations du champ d'Einstein), tandis que près de la lentille, la loi de propagation est gouvernée par l'angle de déflexion dû à la perturbation locale de cette métrique. Afin de quantifier cette approche, certaines hypothèses de travail sont requises.

2.1.2 Hypothèses générales de travail

Les hypothèses discutées dans ce chapitre sous-tendent la plupart des études quantitatives du phénomène de lentille gravitationnelle. Les hypothèses plus spécifiques à nos études sont présentées dans les chapitres concernés.

Optique géométrique

L'optique géométrique n'est plus valable lorsque le rayonnement est cohérent et que la différence de chemin optique est comparable à la longueur de cohérence. C'est le cas pour des images d'une même source ponctuelle formées sur la ligne critique, pour lesquelles la différence de temps de parcours (ou délai temporel) tend vers zéro. L'optique géométrique prévoit alors une amplification lumineuse formellement infinie, alors que l'amplification est physiquement limitée par le phénomène de diffraction (voir par exemple Benson & Cooke 1979).

Cependant, il n'existe pas de source ponctuelle et l'extension spatiale de sources astrophysiques compactes aussi petites que les quasars est suffisante pour à la fois supprimer la divergence de l'optique géométrique, rompre la cohérence du rayonnement et rendre les corrections de l'optique ondulatoire négligeables (voir SEF, Chap. 7).

Univers homogène et isotrope FLRW

Les observations des structures à grande échelle montrent que l'Univers peut être considéré globalement comme homogène et isotrope. L'hypothèse du caractère homogène et isotrope à tout instant de l'Univers érige le fait observationnel en un principe, appelé le *Principe Cosmologique*. Les modèles cosmologiques homogènes et isotropes de Friedmann - Lemaître - Robertson - Walker (FLRW) sont construits à partir de ce principe et en assimilant le contenu de l'Univers à un gaz de poussière sans interaction, ce qui est une très bonne approximation aux redshifts observables.

Cette description de l'Univers est contradictoire avec l'existence même de mirages gravitationnels, lesquels sont exclusivement créés par les *inhomogénéités* présentes dans l'Univers. En outre, le traitement du phénomène de lentille gravitationnelle dans un Univers homogène conduit à des incohérences telles que la violation de la loi de conservation du flux (Weinberg 1976, Ehlers & Schneider 1986) : les amplifications lumineuses des faisceaux passant à proximité des objets compacts ne sont pas compensées par les désamplifications des faisceaux passant loin de tout objet. Malheureusement, il n'existe pas de solution exacte aux équations de la Relativité Générale pour un Univers inhomogène, et pour cause, puisque le problème revêt alors un aspect statistique (la probabilité de rencontre d'un objet sur la ligne de visée intervient dans le calcul de la distance). L'approximation la plus populaire consiste à distribuer une fraction de la masse de l'Univers sous forme d'inhomogénéités, de telle sorte que l'homogénéité à grande échelle soit vérifiée. Par construction, cette approximation *ad hoc* conserve les propriétés dynamiques des modèles d'Univers de type FLRW. L'approximation suivante revient à ne considérer que les lignes de visée passant *loin* de toutes les inhomogénéités (pas de cisaillement du faisceau lumineux). L'étude de la propagation d'un faisceau lumineux sous de telles hypothèses permet enfin de calculer l'expression de la distance angulaire en fonction du redshift et dans un Univers "inhomogène" (Dyer & Roeder 1973). Quoique cette nouvelle formulation des distances restaure la loi de conservation du flux, nous affirmons, contrairement à Ehlers & Schneider, qu'elle n'est d'aucune utilité pratique car i) soit la fraction d'inhomogénéités est faible et les nouvelles distances calculées sont semblables à celles obtenues dans un Univers FLRW (la violation de la conservation du flux est très faible); ii) soit cette fraction est importante et les distances calculées pour des lignes de visée éloignées de toute inhomogénéité ne sont pas représentatives (alors que le modèle FLRW continue de fournir une distance "moyenne"). Pour plus de détails sur le par-

cours de la lumière dans les modèles inhomogènes et sur la comparaison entre les modèles homogènes et inhomogènes, le lecteur se référera à l'Annexe A.

Face à cette difficulté pour décrire un Univers inhomogène de façon réaliste, nous avons préféré nous en tenir au choix classique d'un modèle cosmologique FLRW.

Champs gravitationnels faibles

Un champ gravitationnel stationnaire ϕ présent en un point de l'espace est faible lorsque l'énergie potentielle d'une particule en ce point est largement inférieure à son énergie de masse propre, c'est-à-dire lorsque $\phi \ll c^2$ où c est la vitesse de la lumière. Dans ce cas, le potentiel newtonien ϕ suffit à décrire la structure de l'espace-temps perturbé. On obtient ainsi la métrique dite à champ faible, qui est une solution exacte des équations du champ linéarisées :

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (2.1)$$

En pratique, les paramètres d'impact des rayons lumineux sont supérieurs à plusieurs kpc, voire plusieurs dizaines de kpc, du centre des galaxies ou des amas de galaxies, ce qui implique que $\phi/c^2 \sim 10^{-5} - 10^{-6}$. La métrique à champ faible peut dès lors être utilisée pour calculer l'angle de déflexion. Ce dernier est toujours très faible ($< 1'$), ce qui permet de confondre sa valeur avec celle de la tangente.

Lentilles minces

La taille propre des lentilles constituées par des galaxies ou des amas de galaxies isolés est de l'ordre d'un dixième à un mégaparsec, alors que les distances extragalactiques séparant la source de la lentille et cette dernière de l'observateur sont environ mille fois supérieures. Ceci permet d'adopter le formalisme des lentilles minces et de considérer la déviation de la lumière *localement* dans le plan du déflecteur².

Lentilles transparentes

Du point de vue purement géométrique, les lentilles gravitationnelles sont achromatiques. Elles produisent une focalisation convergente du faisceau et les images sont formées préférentiellement loin de la partie centrale du déflecteur ("effet de contournement"), où l'extinction est la plus forte³. Les premières observations de lentilles semblaient montrer peu d'effets d'extinction. La situation actuelle est plus mitigée (voir par exemple le cas de MG1131+0456, Larkin et al. 1994). Cependant, la loi d'extinction dans les galaxies extérieures est pour ainsi dire inconnue, et l'inhomogénéité spatiale de l'extinction est peut-être forte. La modélisation de l'extinction est donc un problème mal contraint.

²En ce sens, la géométrie des mirages gravitationnels est plus simple que celle des mirages atmosphériques, dans lesquels l'atmosphère traversée joue le rôle d'une lentille épaisse.

³Seule une image fortement désamplifiée, donc difficilement détectable par nature, est formée près du centre du déflecteur.

Dans ce travail, nous conserverons l'hypothèse de lentille transparente même si elle est sans doute erronée dans certaines situations. Nous tenterons dans ces cas d'estimer au moins qualitativement l'effet de l'extinction dans la lentille sur les propriétés étudiées.

Remarquons au passage que le modèle de lentille ponctuelle ne satisfait pas l'hypothèse des champs faibles pour les images secondaires formées très près du déflecteur. D'autre part, les rayons lumineux passant très près du déflecteur peuvent être rétrodiffusés ou piégés, de sorte que la lentille n'est pas strictement transparente.

2.1.3 L'angle de déflexion

Soit une distribution matérielle respectant les hypothèses de la Section 2.1.2. L'angle de déflexion α d'un rayon lumineux de paramètre d'impact b par rapport à cette distribution peut être calculé au moyen de l'équation des géodésiques dans la métrique à champ faible (pour les détails du calcul, on lira Van Drom 1989, Chapitre 1). Il s'exprime en fonction de Σ , la densité de matière projetée dans le plan associé au déflecteur :

$$\alpha(b) = -\frac{4G}{c^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\Sigma(\mathbf{b}')(\mathbf{b} - \mathbf{b}')db'_1 db'_2}{|\mathbf{b} - \mathbf{b}'|^2}. \quad (2.2)$$

Lorsque la distribution de matière projetée est à *symétrie circulaire*, l'équation précédente se simplifie considérablement :

$$\alpha(b) = -\frac{8\pi G}{c^2 b} \int_0^b \Sigma(b')b' db' \frac{b}{b} = -\frac{4GM(b)}{c^2 b^2} b, \quad (2.3)$$

où $M(b)$ est la masse projetée à l'intérieur du paramètre d'impact b .

Notons au passage que la dépendance linéaire de l'angle de déflexion en fonction de la densité surfacique de matière permet de considérer celui-ci comme la somme des angles de déflexion dus à des contributions matérielles distinctes.

2.1.4 Détermination de l'équation de la lentille

L'équation de la lentille relie la position d'une source ponctuelle à celle de son image⁴ suite aux effets de lentille gravitationnelle. Elle est obtenue en considérant le parcours des rayons lumineux. Selon que l'on aborde le problème de façon intuitive ou de manière plus physique, l'équation de la lentille apparaît comme une contrainte géométrique ou comme la solution imposée par le principe de Fermat en Relativité Générale. Nous présentons successivement les deux approches.

⁴Il ne s'agit pas d'une image formée par la lentille gravitationnelle mais d'un déplacement et d'une déformation de la source vue à travers la lentille; par analogie avec l'optique géométrique, on peut parler d'une "image virtuelle".

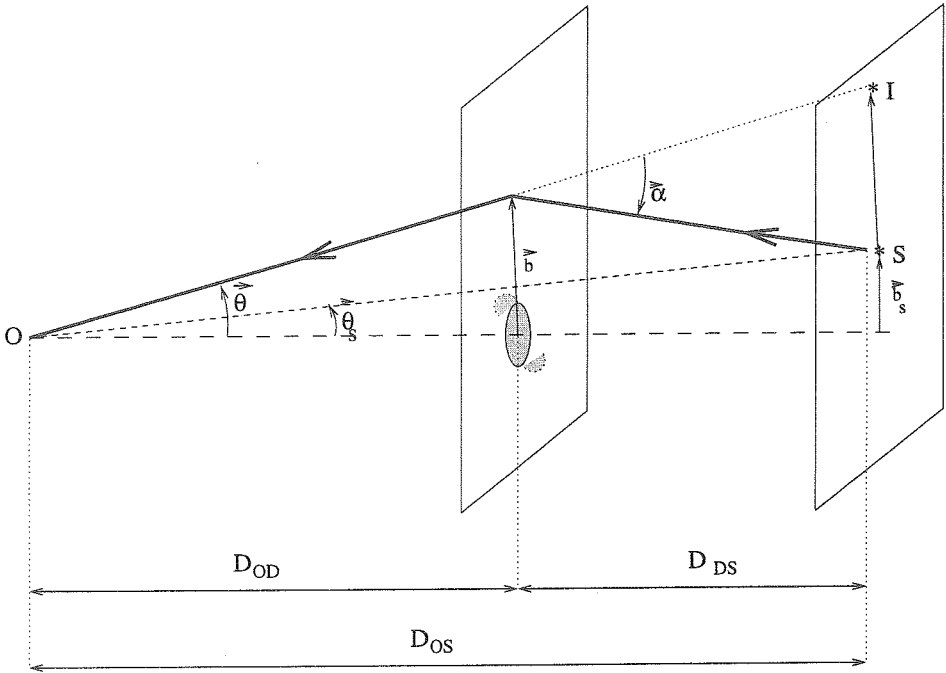


FIG. 2.1: Phénomène de mirage gravitationnel : schéma fondamental.

2.1.4.1 Approche géométrique

À l'aide du graphique fondamental illustrant le phénomène de mirage gravitationnel sous les approximations de la Section 2.1.2 (Fig. 2.1), on remarque que le vecteur SI joignant la source à son image (dans le plan de la source) peut s'exprimer de deux manières différentes. Ceci permet d'établir l'équation de la lentille :

$$\theta_s = \theta + \frac{D_{DS}}{D_{OS}} \alpha(D_{OD}\theta), \quad (2.4a)$$

$$\mathbf{b}_s = \frac{D_{OS}}{D_{OD}} \mathbf{b} + D_{DS} \alpha(\mathbf{b}), \quad (2.4b)$$

où θ_s et θ sont les positions angulaires sur le ciel de la source et de l'image par rapport à la lentille (qui définit l'axe optique avec l'observateur O) ; $\mathbf{b}_s = \theta_s D_{OS}$ et $\mathbf{b} = \theta D_{OD}$ sont les distances propres correspondantes ; α est l'angle de déflexion. Les distances D_{OD} , D_{DS} et D_{OS} , respectivement entre l'observateur et le déflecteur, le déflecteur et la source, et l'observateur et la source, sont les distances *angulaires* calculées dans le cadre des modèles cosmologiques FLRW (voir Annexe A). Elles contiennent les influences de la géométrie et de l'expansion du modèle cosmologique et autorisent les raisonnements dans le cadre familier de la géométrie euclidienne (Fig. 2.1).

Le calcul de la position des images d'une source ponctuelle au sein d'un modèle de lentille et pour une position fixée de la source nécessite l'inversion de l'équation (2.4a) ou (2.4b). Les solutions correspondant aux images multiples ne peuvent être trouvées analytiquement que pour des déflecteurs simples, à symétrie circulaire.

Une approche numérique simple permet d'éviter l'inversion de l'équation de la lentille et de calculer l'image d'un objet étendu. Elle est due à Schramm et Kayser (1987). Elle fait appel au principe de retour inverse de la lumière, à la conservation de l'intensité spécifique et à la surjectivité de l'équation de la lentille, c'est-à-dire qu'à un point image correspond un et un seul point source. L'algorithme consiste alors à diviser le plan image en une grille de points (les pixels) et à attribuer à chacun de ces points l'intensité du point source calculé à l'aide de l'équation de la lentille (2.4a). Cette méthode a été appliquée dans le programme qui a permis de générer les illustrations de la Section 2.2.6.

2.1.4.2 Approche physique

Les trajectoires de la lumière sont des géodésiques nulles de l'espace-temps. Le Principe variationnel de Fermat est nécessairement vérifié en Relativité Générale (voir par exemple SEF, p100). Le rayon lumineux joignant une source donnée à un observateur donné est donc la trajectoire sur laquelle le temps de parcours de la lumière est stationnaire vis-à-vis des trajectoires voisines (Schneider 1985, Blandford & Narayan 1986). Explicitons ce principe lorsqu'une inhomogénéité matérielle réside à proximité de la ligne de visée d'une source ponctuelle.

La métrique à champ faible peut être utilisée à proximité du déflecteur et la condition $ds^2 = 0$ pour les trajectoires suivies par la lumière fournit le temps de parcours de l'arc de géodésique séparant la source de l'observateur (voir éq. (2.1)) :

$$t = \frac{1}{c} \int_S^O \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right) dl = \frac{D}{c} - \frac{2}{c^3} \int_S^O \phi dl, \quad (2.5)$$

où le premier terme décrit le temps de parcours géométrique à la vitesse de la lumière, tandis que le second, ou terme "potentiel", concrétise le ralentissement de la lumière dans le champ gravitationnel, qui équivaut au ralentissement produit par la réfraction dans un milieu dense d'indice effectif $n = 1 - 2\phi/c^2$; l est l'abscisse curviligne.

Au premier ordre, le rayon lumineux joignant la source (située en \mathbf{b}_s) à l'observateur et passant dans le plan déflecteur au paramètre d'impact \mathbf{b} peut être approximé par deux segments de droite définis par ses asymptotes et la Fig. 2.1 permet d'évaluer le terme géométrique :

$$D = D_{DS} + D_{OD} + \frac{1}{2D_{DS}}(\mathbf{b} - \mathbf{b}_s)^2 + \frac{\mathbf{b}^2}{2D_{OD}}. \quad (2.6)$$

D'autre part, l'intégrale du potentiel newtonien sur la ligne de visée passant au paramètre d'impact \mathbf{b} définit un nouveau potentiel à deux dimensions, $\phi_2(\mathbf{b})$. Pour une masse ponctuelle M , on trouve que $\phi_2(\mathbf{b}) = 2GM \ln b$ à une constante additive C près ; dans le cas général où le déflecteur est modélisé par une densité surfacique de masse $\Sigma(\mathbf{b})$, le potentiel ϕ_2 est obtenu par intégration sur tous les éléments de masse :

$$\int_S^O \phi dl = \phi_2(\mathbf{b}) = 2G \int_{\mathbb{R}^2} \Sigma(\mathbf{b}') \ln |\mathbf{b} - \mathbf{b}'| db'_1 db'_2 + C. \quad (2.7)$$

Signalons au passage que ce potentiel à 2 dimensions satisfait une équation-source à 2 dimensions obtenue par l'intégration de l'équation de Poisson à 3 dimensions le long de la ligne de visée :

$$\nabla^2 \phi_2 = 4\pi G \Sigma. \quad (2.8)$$

Dès lors, en omettant les constantes additives, le temps de parcours s'écrit :

$$t(\mathbf{b}; \mathbf{b}_s) = \frac{1}{c} \left[\frac{1}{2D_{DS}} (\mathbf{b} - \mathbf{b}_s)^2 + \frac{\mathbf{b}^2}{2D_{OD}} \right] - \frac{2}{c^3} \phi_2(\mathbf{b}), \quad (2.9)$$

et le Principe de Fermat impose la condition suivante sur le paramètre d'impact \mathbf{b} :

$$\nabla_{\mathbf{b}} t = 0 \Leftrightarrow \mathbf{b}_s = \mathbf{b} \frac{D_{OS}}{D_{OD}} - \frac{2}{c^2} \nabla_{\mathbf{b}} \phi_2(\mathbf{b}) D_{DS}. \quad (2.10)$$

Il suffit de prendre le gradient par rapport à \mathbf{b} de la relation (2.7), pour obtenir :

$$\nabla_{\mathbf{b}} \phi_2(\mathbf{b}) = 2G \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\Sigma(\mathbf{b}') (\mathbf{b} - \mathbf{b}') db'_1 db'_2}{|\mathbf{b} - \mathbf{b}'|^2}, \quad (2.11)$$

et en remplaçant dans l'équation (2.10), on retrouve l'équation de la lentille (2.4b) obtenue de façon géométrique, avec $\alpha(\mathbf{b}) = -\frac{2}{c^2} \nabla_{\mathbf{b}} \phi_2(\mathbf{b})$. Les images sont les solutions de cette équation et correspondent donc aux extréma à 2 dimensions du potentiel de Fermat. Elles se rangent en trois catégories physiques distinctes selon qu'elles correspondent à un minimum, à un maximum, ou à un point en "selle de cheval" (qui est un minimum dans une direction et un maximum dans l'autre, voir Section 2.1.5.2).

On remarque donc que l'angle de déflexion dérive d'un potentiel ψ , appelé potentiel de déflexion :

$$\alpha(\mathbf{b}) = -\nabla \psi(\mathbf{b}), \quad (2.12)$$

où :

$$\psi(\mathbf{b}) = \frac{2\phi_2}{c^2} = \frac{4G}{c^2} \int_{\mathbb{R}^2} \Sigma(\mathbf{b}') \ln |\mathbf{b} - \mathbf{b}'| db'_1 db'_2 \quad (2.13)$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{8\pi G}{c^2} \Sigma. \quad (2.14)$$

2.1.5 Propriétés des images

Dans cette section, nous introduisons les propriétés générales des images produites par une lentille gravitationnelle. Parmi celles-ci, nous discuterons l'amplification lumineuse des images et le comportement de celles-ci au voisinage des caustiques. Nous évoquerons les cas particuliers des défecteurs à symétrie circulaire et des défecteurs singuliers. Mais avant cela, dans le souci de simplifier le formalisme, nous introduisons l'expression normalisée de l'équation de la lentille.

2.1.5.1 Grandeurs normalisées

L'équation de la lentille (2.4b) relie la position de la source dans le plan source b_s au paramètre d'impact b du rayon lumineux dans le plan du défecteur. Dans le but d'une analyse qualitative de la relation $b_s(b)$, on peut toujours, à l'aide d'un changement de variables, éliminer les facteurs numériques tels que les distances ou la masse du défecteur au profit d'un seul paramètre b_o , appelé le facteur d'échelle. Ce dernier est donc associé au plan du défecteur et permet de définir la grandeur normalisée $\mathbf{x} = b/b_o$. On peut réécrire l'équation de la lentille (2.4b) en fonction de \mathbf{x} , après l'avoir multipliée par le rapport de distance D_{OD}/D_{OS} :

$$b_s \frac{D_{OD}}{D_{OS}} = b_o \mathbf{x} + \frac{D_{OD} D_{DS}}{D_{OS}} \alpha(b_o \mathbf{x}).$$

Après division des deux membres par b_o , nous pouvons remplacer le membre de gauche par la variable normalisée \mathbf{y} et choisir la valeur numérique de b_o de telle sorte que le second terme du membre de droite ne fasse intervenir que la variable \mathbf{x} sous la forme d'une fonction normalisée $\hat{\alpha}(\mathbf{x})$. Ainsi donc, la normalisation de l'équation de la lentille se résume par le changement de variables suivant :

$$\mathbf{x} = \frac{b}{b_o}, \quad (2.15a)$$

$$\mathbf{y} = \frac{b_s D_{OD}}{b_o D_{OS}}, \quad (2.15b)$$

b_o est tel que :

$$\alpha(b_o \mathbf{x}) \frac{D_{OD} D_{DS}}{D_{OS} b_o} = \hat{\alpha}(\mathbf{x}) = -\nabla_{\mathbf{x}} \hat{\psi}(\mathbf{x}), \quad (2.15c)$$

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}) = \frac{D_{OD} D_{DS}}{D_{OS} b_o^2} \psi(b_o \mathbf{x}). \quad (2.15d)$$

Et l'équation de la lentille normalisée s'écrit simplement :

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \hat{\alpha}(\mathbf{x}). \quad (2.16)$$

Le facteur d'échelle b_o dépend donc du modèle de lentille. Dans le cas des modèles à symétrie circulaire, b_o détermine le rayon de l'anneau formé lors de l'alignement parfait entre l'observateur, la lentille et la source, et pour cette raison est appelé *rayon d'Einstein*. La grandeur

$\theta_E = b_o/D_{OD}$ est le rayon angulaire d'Einstein et est typique de la demi-séparation angulaire entre les images mirages (voir Section 2.2).

Satisfaire l'équation (2.16) revient à annuler le gradient d'un potentiel Φ , baptisé potentiel de Fermat, puisque, comme on l'a vu, l'équation de la lentille est l'expression du Principe de Fermat (2.10) :

$$\nabla_{\mathbf{x}}\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad (2.17a)$$

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 - \psi(\mathbf{x}). \quad (2.17b)$$

D'autre part, en substituant les expressions (2.2) et (2.13) de l'angle et du potentiel de déflexion dimensionnés dans les relations (2.15c) et (2.15d) respectivement, on obtient :

$$\hat{\alpha}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\kappa(\mathbf{x}')(\mathbf{x} - \mathbf{x}')dx'_1 dx'_2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \quad (2.18)$$

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \kappa(\mathbf{x}') \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| dx'_1 dx'_2, \quad (2.19)$$

$$\nabla^2\psi = 2\kappa, \quad (2.20)$$

où :

$$\kappa(\mathbf{x}) = \frac{\Sigma(b_o\mathbf{x})}{\Sigma_{crit}}, \quad (2.21a)$$

$$\Sigma_{crit} = \frac{c^2 D_{OS}}{4\pi G D_{DS} D_{OD}}. \quad (2.21b)$$

Par la suite, nous omettrons l'accent circonflexe sur les grandeurs normalisées.

2.1.5.2 Amplification lumineuse, convergence et cisaillement

L'effet de lentille gravitationnelle ne conduit pas seulement à la formation d'images multiples d'une source lumineuse. Abandonnons à présent la description simpliste de la lumière par un seul rayon et remplaçons-la par le concept d'un faisceau. La déflexion différentielle agissant sur ce faisceau lumineux induit une déformation de celui-ci. Cette distorsion n'est apparente que si l'image est résolue par l'instrument d'observation (cas des galaxies déformées en arcs ou en arçlets). Puisque la lentille est transparente par hypothèse, l'intensité spécifique de l'image est identique à celle de la source (Etherington 1933). Lorsque l'image n'est *pas* résolue, l'observateur assiste à une *amplification* A du flux intrinsèque égale au rapport entre l'angle solide de l'image et celui de la source. Ce rapport d'angles solides est directement donné par l'inverse du déterminant de la matrice jacobienne \mathcal{J} de l'équation de la lentille, qui est alors considérée comme un changement de variables univoque à deux dimensions du plan image vers le plan source ($\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$) :

$$A(\mathbf{x}) = \text{dtm}^{-1}\mathcal{J}(\mathbf{x}). \quad (2.22)$$

La matrice jacobienne \mathcal{J} est souvent appelée matrice d'amplification \mathcal{A} . On peut la calculer au moyen de l'équation de la lentille (2.16) :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} & -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} \\ -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial x_1} & 1 - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} & -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) \\ -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) & 1 - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

où le dernier terme donne \mathcal{A} en coordonnées polaires (r, φ) . Le formalisme est largement simplifié dans ces coordonnées pour tous les déflecteurs à symétrie circulaire.

La matrice d'amplification étant réelle et symétrique, il existe un référentiel constitué par les vecteurs propres dans lequel elle est diagonale. Exprimons les valeurs propres de façon paramétrique, en séparant la contribution isotrope K – appelée convergence car associée au grandissement de l'image – et la contribution anisotrope, γ – le cisaillement :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} K - \gamma & 0 \\ 0 & K + \gamma \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

La trace et le déterminant de \mathcal{A} sont identiques dans les deux systèmes de référence, ce qui fournit deux équations pour déterminer K et γ en fonction du potentiel de déflexion. En tenant compte de l'équation de Poisson (2.20), on obtient successivement :

$$K = \frac{\text{tr} \mathcal{A}}{2} = 1 - \kappa, \quad (2.25)$$

$$\gamma^2 = \left(\frac{\text{tr} \mathcal{A}}{2} \right)^2 - \text{dtm} \mathcal{A} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} \right) \right]^2 - \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial x_1} \right]^2, \quad (2.26)$$

$$A(\mathbf{x}) = \text{dtm}^{-1} \mathcal{A} = \frac{1}{(1 - \kappa(\mathbf{x}))^2 - \gamma^2(\mathbf{x})}. \quad (2.27)$$

Classification des images : La matrice d'amplification \mathcal{A} est également la matrice des dérivées secondes (ou matrice Hessienne \mathcal{H}) du potentiel de Fermat Φ (voir éqs (2.17b) et (2.23)). Or, les images se forment aux points stationnaires de Φ et la nature de ces points stationnaires (minimum, maximum ou selle de cheval) est dictée par le signe des valeurs propres de \mathcal{H} , qui sont donc les valeurs propres $K \pm \gamma$ de la matrice \mathcal{A} . Trois combinaisons de signes sont possibles, pour les trois types d'images :

1. *Minimum de Φ* : il s'agit du temps de parcours le plus court, et de l'image dite "régulière". Les deux valeurs propres sont positives, ce qui implique que $\text{dtm} \mathcal{A}$ et $\text{tr} \mathcal{A}$ sont positifs et :

$$\begin{cases} \kappa < 1 \\ \gamma < 1 - \kappa \\ A_i \geq 1 \end{cases}. \quad (2.28)$$

Schneider (1984) a montré qu'une lentille transparente, finie et non singulière produit *toujours* une image de ce type.

2. *Maximum de Φ* : les deux valeurs propres sont négatives, ce qui impose $\text{dtm}\mathcal{A} > 0$, $\text{tr}\mathcal{A} < 0$ et :

$$\begin{cases} \kappa > 1 \\ \gamma^2 < (1 - \kappa)^2 \\ A_i > 0 \end{cases} . \quad (2.29)$$

Cette image ne peut être formée que dans une zone “surcritique” du plan déflecteur.

3. *Minimum en selle de cheval de Φ* : chaque valeur propre est de signe différent, et donc $\text{dtm}\mathcal{A}$ est négatif :

$$\begin{cases} \gamma^2 > (1 - \kappa)^2 \\ A_i < 0 \end{cases} . \quad (2.30)$$

La parité de cette image est négative.

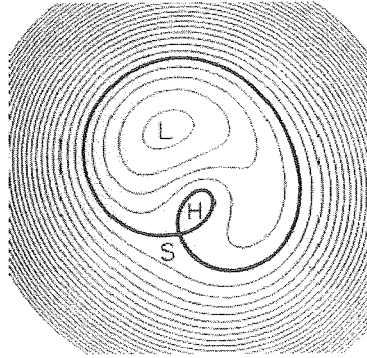


FIG. 2.2: Contours du potentiel de Fermat pour un déflecteur elliptique produisant 3 images (extrait de Blandford et Narayan 1986). Les images de type 1, 2 et 3 se forment aux points L, H et S respectivement.

2.1.5.3 Lignes critiques et caustiques

Le lieu du plan image où le déterminant de la matrice jacobienne s’annule est appelé la *ligne critique*. En raison de la relation (2.22), l’amplification est infinie sur la ligne critique. La (ligne) *caustique* est définie mathématiquement comme la transformation de la ligne critique dans le plan source au moyen de l’équation de la lentille (voir les illustrations pour le modèle elliptique à la Fig. 2.3). La (ligne) caustique est donc le lieu des points du plan source subissant une amplification infinie pour un système observateur-lentille fixé. Pour une approche plus intuitive, considérons la propagation des photons émis par une source ponctuelle. Suite à la présence d’une condensation matérielle dans le faisceau, les rayons lumineux qui le composent forment une enveloppe à deux dimensions, qui est constituée par les points de tangence de deux ou trois de ces rayons. Cette enveloppe porte le nom de caustique et est un élargissement du concept de foyer ; l’intersection de cette enveloppe caustique avec le plan de l’observateur décrit une courbe fermée : la *ligne caustique* au sens mathématique

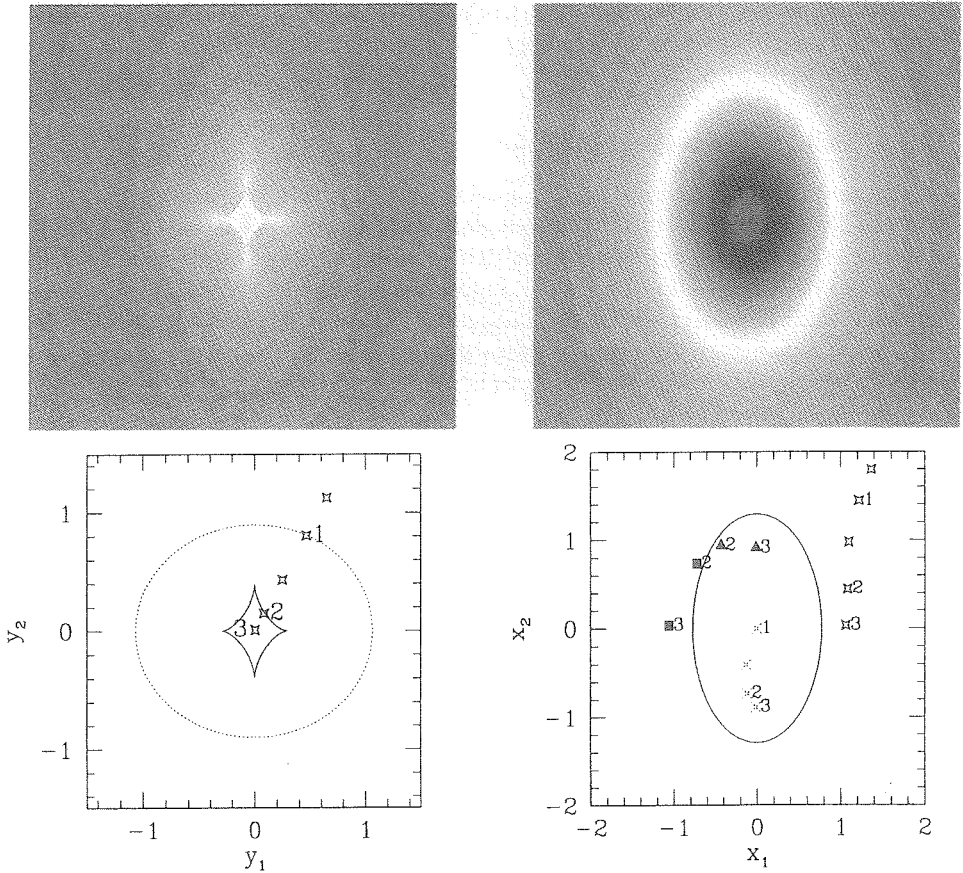


FIG. 2.3: Cartes d'amplification dans les plans source et image, respectivement en haut à gauche et à droite, dans le cas d'une lentille elliptique singulière (voir modèle EIS, Section 2.2.5). La ligne caustique caractéristique en forme de diamant et ses 4 sommets ("cusps" en anglais) sont très bien visibles dans le plan source. Les figures du bas illustrent les positions des images (à droite) en fonction de celle de la source (à gauche). Il y a formation d'une image additionnelle lorsque la source (ponctuelle) traverse la "coupure" (positions 1) et d'une nouvelle paire d'images lorsque la source traverse la caustique tangentielle (positions 2).

défini plus haut⁵. Sur la ligne caustique, les rayons tangents engendrent une image intense tandis qu'à l'intérieur, les rayons lumineux se croisent et provoquent la formation d'images multiples. Si, par suite d'un déplacement relatif entre la source, la lentille et l'observateur, ce dernier est amené à traverser une caustique, il assistera à l'apparition ou à la disparition

⁵En général les lentilles gravitationnelles sont astigmatiques, mais l'enveloppe caustique peut dégénérer en un segment de droite pour les lentilles symétriques singulières, voire en un point (foyer) pour une lentille constituée par un plan infini de matière. Dans ces cas de haute symétrie, les rayons ne sont plus tangents mais se croisent sur la caustique et la ligne caustique dans le plan de l'observateur est réduite à un point.

d'une paire d'images au niveau de la ligne critique correspondante (voir rangée inférieure de la Fig. 2.3). Le lecteur intéressé par une approche théorique des propriétés des caustiques est renvoyé au Chapitre 6 de SEF.

2.1.5.4 Déflecteurs à symétrie circulaire

Lorsque la distribution matérielle du déflecteur est à symétrie circulaire, le formalisme est à une seule dimension. y est la distance normalisée (positive) de la source dans le plan source. x est la distance normalisée entre l'image et le déflecteur dans le plan déflecteur ; elle est positive ou négative selon que l'image se trouve dans la direction de la source ou bien dans la direction opposée. L'amplification dans le plan déflecteur est évidemment à symétrie circulaire et s'obtient aisément à partir du déterminant de la relation (2.23) exprimé en coordonnées polaires où x joue le rôle de la coordonnée radiale r :

$$\begin{aligned} A^{-1}(x) &= \left(1 - \frac{d^2\psi}{dx^2}\right) \left(1 - \frac{1}{x} \frac{d\psi}{dx}\right) \\ &= \left(1 + \frac{d\alpha}{dx}\right) \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right). \end{aligned} \quad (2.31)$$

L'annulation de chacun des 2 termes de l'équation (2.31) entraîne une amplification infinie, et fournit par définition les rayons x_r et x_t des lignes critiques radiale et tangentielle respectivement :

$$\left. \frac{d(-\alpha(x))}{dx} \right|_{x=x_r} = 1, \quad (2.32a)$$

$$x_t = -\alpha(x_t). \quad (2.32b)$$

La ligne critique *radiale* est le lieu de fusion de 2 images suivant la direction du déflecteur, tandis que sur la ligne critique *tangentielle*, les images se joignent tangentiellement à la direction du déflecteur, comme lors de la formation de l'anneau d'Einstein (voir Fig. 2.4).

Les caustiques correspondantes sont obtenues en injectant la solution des équations (2.32a) et (2.32b) dans l'équation de la lentille (2.16). On obtient successivement pour les rayons y_r et y_t des caustiques radiale et tangentielle :

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{y=y_r} = 0, \quad (2.33a)$$

$$y_t = 0. \quad (2.33b)$$

La caustique *tangentielle* se réduit donc toujours au point origine dans un modèle à symétrie circulaire. L'équation de la caustique *radiale* reste implicite.

Dans le cas des déflecteurs à symétrie circulaire, l'équation de la lentille (2.16) peut toujours s'écrire sous forme scalaire à une dimension. Les solutions de cette équation peuvent

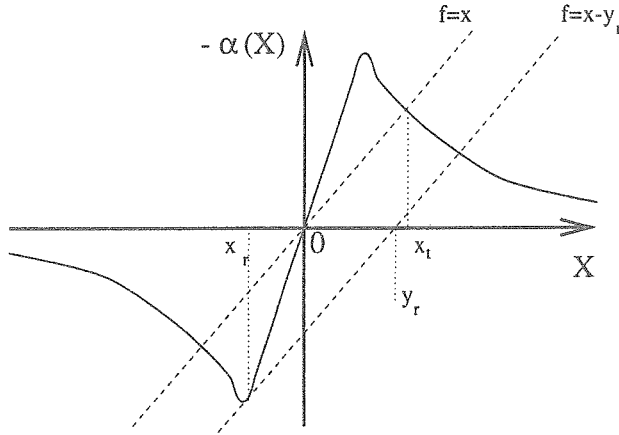


FIG. 2.4: Résolution graphique de l'équation de la lentille pour un déflecteur dont la densité de masse surfacique est à symétrie circulaire et décroissante avec x .

être déterminées graphiquement, au moyen des intersections de la courbe $-\alpha(x)$ avec la droite à 45° d'équation $f(x) = x - y$ où $y > 0$ est la position de la source. Sur la Fig. 2.4, les droites à 45° (traits interrompus) correspondent à une source sur la caustique tangentielle ($y = 0$) et à une source sur la caustique radiale ($y = y_r$). Leurs intersections avec la courbe $-\alpha(x)$ (trait continu) définissent les positions des images. Dans ce cas particulier, les intersections de la première fournissent le rayon de la ligne critique tangentielle x_t (par symétrie autour de l'axe vertical, on obtient une image circulaire : l'anneau d'Einstein). La seconde droite est tangente à $\alpha(x)$. L'abscisse de ce point de tangence (en valeur absolue) donne le rayon x_r de la ligne critique, en accord avec l'équation (2.32a). Le signe négatif montre que l'image critique se forme toujours du côté du déflecteur opposé à celui de la source. Pour $y < y_r$, 3 images sont formées par cette lentille.

2.1.5.5 Déflecteurs singuliers

En toute généralité, il s'agit de déflecteurs dont la densité surfacique de masse diverge au centre :

$$\kappa(x) \propto x^{-\beta}, \quad \beta > 0.$$

Bien que cette distribution de matière ne soit pas physique, elle reproduit bien en première approximation le profil très piqué observé dans les galaxies. Le profil isotherme correspond à $\beta = 1$ (voir Section 2.2.3). On démontre facilement que la masse centrale projetée ne diverge pas tant que $\beta < 2$. D'autre part, l'expression de l'angle de déflexion en coordonnées normalisées (voir éq. (2.15c)) permet d'affirmer que si $\beta \leq 1$, l'angle de déflexion α ne diverge pas ; par contre, le gradient de α diverge en $x = 0$ pour toute valeur de $\beta > 0$, ce qui implique que l'image centrale est infiniment désamplifiée lorsque la source est alignée avec le déflecteur. Enfin, lorsque $\beta < 1$, la divergence de κ est suffisamment lente pour permettre la formation de 3 images et l'existence d'une caustique radiale (voir Fig. 2.5). Dans la suite, un modèle sera considéré réellement singulier si la condition restrictive suivante est

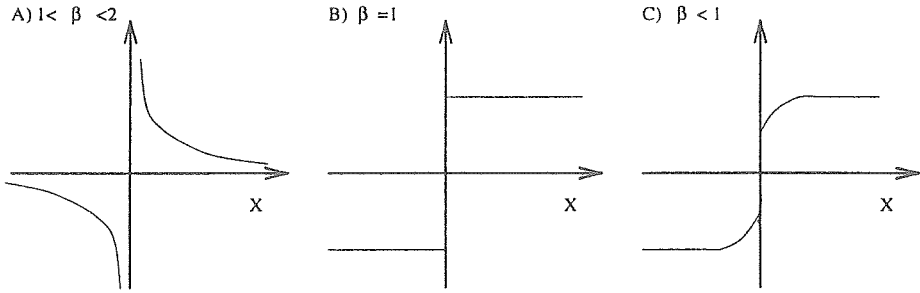


FIG. 2.5: Angle de déflexion pour des déflecteurs avec une densité de masse $\kappa(x) \propto x^{-\beta}$, pour 3 valeurs différentes de β . Seuls les cas -A) et -B) (déflecteur isotherme) sont retenus comme modèles singuliers.

satisfaite :

$$1 \leq \beta < 2. \quad (2.34)$$

Ces modèles singuliers sont privés de ligne critique radiale ; ils incluent le modèle isotherme ($\beta = 1$) et le modèle ponctuel ($\kappa = \delta(x)$).

2.1.6 Résumé

Résumons ici les résultats acquis dans cette section.

- Nous avons défini les hypothèses suivantes : les lentilles sont supposées minces, transparentes et elles génèrent un champ gravitationnel faible. L'Univers est correctement décrit par la métrique homogène et isotrope FLRW et l'optique géométrique est applicable.
- L'équation de la lentille (équations (2.4a)-(2.4b), (2.10), (2.16) ou (2.17a)-(2.17b)) est l'expression du Principe de Fermat dans la métrique à champ faible de la Relativité Générale. Ses solutions correspondent aux positions des images.
- L'amplification lumineuse d'une image non résolue est donnée par l'inverse du déterminant de la matrice jacobienne de l'équation de la lentille, exprimé à la position de l'image. Elle est égale au grandissement de l'image par rapport à la source. Celui-ci est constitué d'une contribution isotrope (la convergence K) et d'une contribution anisotrope (le cisaillement γ). Les lignes critiques sont les lieux d'amplification infinie du plan déflecteur et leur transformation par l'équation de la lentille fournit les caustiques dans le plan source.
- Les propriétés génériques des modèles de déflecteur peuvent être synthétisées selon les 4 cas suivants (voir Fig. 2.6) :

1. **Modèle circulaire singulier (CS)** : la caustique tangentielle est dégénérée au point origine ; la ligne critique et la caustique radiales n'existent pas mais cette dernière est remplacée par une "coupure" circulaire délimitant la zone de création de 2 images lorsque $\beta = 1$; formation de 2 images pour $1 < \beta < 2$ et de 1 ou 2 images si $\beta = 1$.

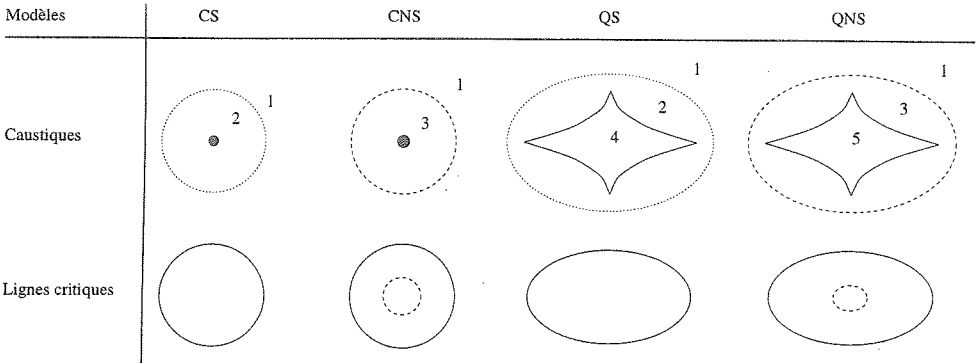


FIG. 2.6: Formes génériques des caustiques et des lignes critiques pour les modèles CS, CNS, QS et QNS (voir texte). Les traits continus (respectivement interrompus) représentent les caustiques ou les lignes critiques *tangentielles* (respectivement *radiales*). En pointillés figurent les “coupures” des modèles singuliers. Le nombre d’images formées est indiqué sur les surfaces respectives ; sur les caustiques, un nombre d’images intermédiaire est obtenu, par création/fusion de 2 images sur la ligne critique correspondante. Dans le cas d’une “coupure”, une seule nouvelle image apparaît au centre du déflecteur.

2. **Modèle circulaire non singulier (CNS)** : la caustique tangentielle est dégénérée au point origine ; existence d’une ligne critique et d’une caustique radiales circulaires ; formation de 1, 2 ou 3 images.
3. **Modèle quadrupolaire singulier (QS)⁶** : la caustique tangentielle a une forme en diamant et la ligne critique tangentielle est elliptique ; la ligne critique et la caustique radiales n’existent pas mais cette dernière est remplacée par une “coupure” elliptique délimitant la zone de formation d’images multiples lorsque $\beta = 1$; lorsque l’ellipticité est supérieure à une valeur seuil ϵ_s , la caustique “perce” la “coupure” (“naked cusps” en anglais ; voir Section 2.2.5) ; formation de 1, 2, 3 ou 4 images.
4. **Modèle quadrupolaire non singulier (QNS)** : la caustique tangentielle a une forme en diamant et la ligne critique tangentielle est elliptique ; existence d’une ligne critique et d’une caustique radiales elliptiques ; cependant, une variété de contours pour les caustiques et les lignes critiques correspond aux différentes valeurs possibles pour l’ellipticité et la taille du noyau (“naked cusps”, “ombilic” et “lips”, voir Kassiola et Kovner 1993) ; formation de 1, 2, 3, 4 ou 5 images.

2.2 Propriétés des déflecteurs simples

Les caractéristiques des images d’un mirage gravitationnel sont en rapport étroit avec les propriétés de la distribution matérielle de la lentille. De là surgit la possibilité attrayante de déterminer certains paramètres physiques d’objets astronomiques très distants au moyen de

⁶Le moment quadrupolaire peut être induit par une ellipticité intrinsèque ou par une perturbation extérieure comme le cisaillement dû à une distribution matérielle voisine.

l'observation de mirages. Cependant, ces déterminations ne peuvent être menées à bien que dans le cadre d'un modèle théorique, sélectionné au préalable au moyen d'hypothèses les plus vraisemblables quant à la nature du défecteur. Des modèles simples contenant peu de paramètres doivent être considérés, dans la mesure où l'observation d'images multiples fournit un nombre relativement limité de contraintes ($3(n - 1)$ si n est le nombre d'images et si la lentille n'est pas observable). Dans cette section, nous accomplissons la tâche préliminaire de décrire les propriétés analytiques de modèles simples. Certains de ces modèles seront utilisés dans la suite du travail.

2.2.1 Le modèle ponctuel (MP)

Origine physique

L'idéalisation mathématique qui consiste à confondre un objet physique avec un "point massif" (aussi appelé "lentille de Schwarzschild") est justifiée dans les situations où l'objet considéré est dense et compact à l'échelle du paramètre d'impact des rayons lumineux déviés. Dans cette classe de défecteurs se rangent les trous noirs, les étoiles et tous les objets compacts hypothétiques composés de matière sombre. De plus, cette approximation est également valable pour décrire l'influence gravitationnelle d'un objet astrophysique tel qu'une galaxie sur des rayons lumineux passant à grande distance du centre de masse.

Angle de déflexion et positions des images

Le modèle ponctuel est circulaire et singulier.

À partir des équations (2.3) et (2.15c) pour l'angle de déviation, on obtient aisément dans le cas du défecteur ponctuel :

$$\alpha(\mathbf{b}) = -\frac{4GM}{c^2 b^2} \mathbf{b}, \quad (2.35a)$$

$$\hat{\alpha}(\mathbf{x}) = -\frac{\mathbf{x}}{x^2}, \quad (2.35b)$$

$$b_o = \sqrt{\frac{4GM D_{OD} D_{DS}}{c^2 D_{OS}}}. \quad (2.35c)$$

Il s'ensuit que le rayon angulaire d'Einstein s'exprime de la manière suivante :

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM D_{DS}}{c^2 D_{OD} D_{OS}}}. \quad (2.35d)$$

L'équation de la lentille à 2 dimensions s'écrit :

$$\begin{cases} y_1 = (1 - \frac{1}{x_1^2 + y_1^2}) x_1 \\ y_2 = (1 - \frac{1}{x_1^2 + y_2^2}) x_2 \end{cases} \quad (2.36)$$

Cependant, l'équation de la lentille peut se mettre sous forme scalaire et possède toujours deux solutions (voir graphique de gauche de la Fig. 2.7), correspondant aux positions des 2 images par rapport au défecteur :

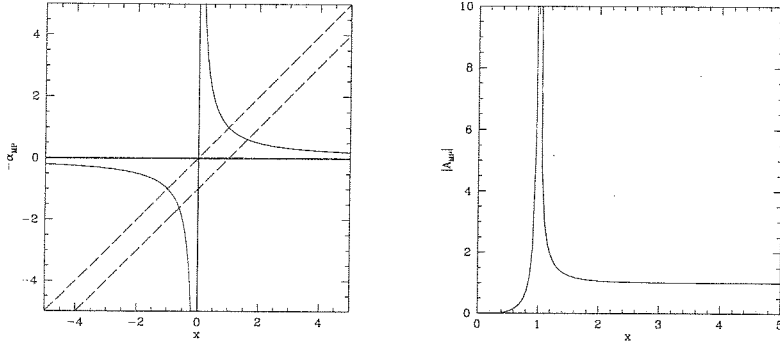


FIG. 2.7: Modèle ponctuel : à gauche : solution graphique de l'équation de la lentille ; à droite : profil d'amplification dans le plan image (ligne critique en $x_t = 1$).

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \left(y \pm \sqrt{y^2 + 4} \right). \quad (2.37)$$

Densité surfacique, cisaillement, amplification, lignes critiques et caustiques

Au moyen des relations (2.15c) et (2.35b), on déduit sans peine que le potentiel de déflexion vaut

$$\psi(x) = \ln x. \quad (2.38a)$$

Par suite, les relations (2.20) et (2.26) montrent que le modèle ponctuel produit uniquement du cisaillement :

$$\kappa = 0, \quad (2.38b)$$

$$\gamma = \frac{1}{x^2}. \quad (2.38c)$$

L'amplification lumineuse dans le plan image s'obtient directement à partir de l'équation (2.31) :

$$A^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{x^4}, \quad (2.39)$$

et la ligne critique tangentielle est le cercle de rayon $x_t = 1$. Il n'y a pas de ligne critique radiale et la caustique tangentielle, projection du cercle $x_t = 1$ dans le plan source, est dégénérée au point $y_t = 0$. Le profil de l'amplification en fonction de x est illustré sur la partie gauche de la Fig. 2.7. L'amplification totale dans le plan source est obtenue en

calculant la somme des modules des amplifications des deux images, au moyen des équations (2.37) et (2.39) :

$$A(y) = \frac{y^2 + 2}{y\sqrt{y^2 + 4}}. \quad (2.40)$$

2.2.2 Le plan de matière (PM)

Origine physique

Le plan de matière de densité surfacique constante Σ_o décrit assez bien la contribution d'un amas de galaxies projeté dans le plan défecteur. Le modèle idéal suppose un plan infini ; une approche physique d'un tel défecteur nécessite de tronquer le modèle et de considérer par exemple l'amas comme un objet ponctuel à grande distance du centre.

Angle de déflexion et positions des images

Le plan de matière est un modèle circulaire non singulier. À partir des équations (2.3) et (2.15c) pour l'angle de déviation, on obtient aisément dans le cas du plan de matière :

$$\alpha(b) = -\frac{4\pi G\Sigma_o}{c^2}b, \quad (2.41a)$$

$$\hat{\alpha}(x) = -\kappa x, \quad (2.41b)$$

$$\kappa = \frac{\Sigma_o}{\Sigma_{crit}}, \quad (2.41c)$$

et Σ_{crit} est donné par la formule (2.21b). On remarque qu'il n'existe pas de facteur d'échelle dans ce modèle.

La loi de déviation des rayons lumineux est comparable à celle d'une lentille de verre convergente (α proportionnel à x).

L'équation de la lentille à 2 dimensions s'écrit :

$$\begin{cases} y_1 &= (1 - \kappa)x_1 \\ y_2 &= (1 - \kappa)x_2 \end{cases} \quad (2.42)$$

Cependant, l'équation de la lentille peut se mettre sous forme scalaire et possède une seule solution (avec $\kappa \neq 1$) (voir Fig. 2.8) :

$$x = \frac{y}{1 - \kappa}. \quad (2.43)$$

La transformation (2.43) constitue un grandissement isotrope de l'image. Ce grandissement est supérieur à 1 si $\kappa \leq 2$ (rayons convergents) et il est inférieur à 1 sinon (rayons divergents). L'image est renversée si $\kappa > 1$ (densité surcritique). Lorsque $\kappa = 1$, le plan image est entièrement illuminé par le point source situé en $\mathbf{y} = (0, 0)$ (équation (2.42)) : l'observateur se trouve au foyer de la lentille gravitationnelle.

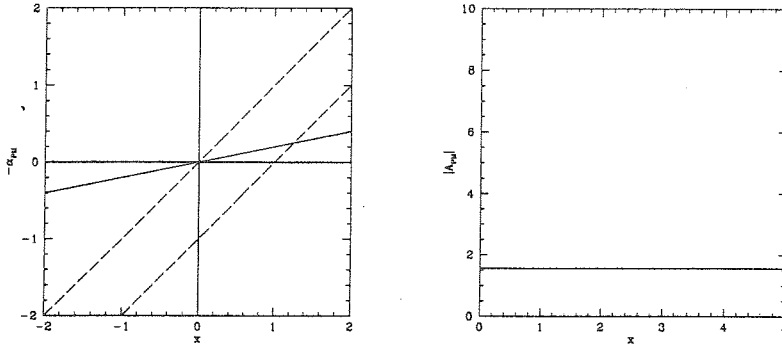


FIG. 2.8: Plan de matière : à gauche : solution graphique de l'équation de la lentille ($\kappa = 0, 2$) ; à droite : profil d'amplification dans le plan image.

Densité surfacique, cisaillement, amplification, lignes critiques et caustiques

Le plan de matière produit uniquement de la convergence, comme l'indiquent les relations (2.25) et (2.26) :

$$\kappa = C^{ste} \quad (2.44a)$$

$$\gamma = 0 \quad (2.44b)$$

L'amplification lumineuse dans les plans image et source est constante. Elle s'obtient directement à partir de l'équation (2.31) :

$$A^{-1} = (1 - \kappa)^2. \quad (2.45)$$

Il n'y a pas de ligne critique, sauf si $\kappa = 1$, auquel cas elle s'étend à tout le plan image et la caustique correspondante est réduite au point $y = 0$.

2.2.3 La sphère isotherme singulière (SIS)

Origine physique

Ce modèle décrit particulièrement bien le halo des galaxies spirales ou tout autre système dynamiquement relaxé, comme les galaxies elliptiques. Le halo des galaxies spirales est sphérique en première approximation ; il est constitué de matière sombre et contient environ 90% de la masse des galaxies. Sa présence est révélée par les mesures de la vitesse constante de rotation des étoiles en fonction du rayon des galaxies (voir Fig. 2.9). Ces mesures ne peuvent en effet pas être expliquées par le seul effet gravitationnel de la matière visible. La distribution de matière au sein du halo capable de produire une courbe de rotation *exactement* plate, du centre au bord de la galaxie, est la sphère isotherme singulière. En effet, le

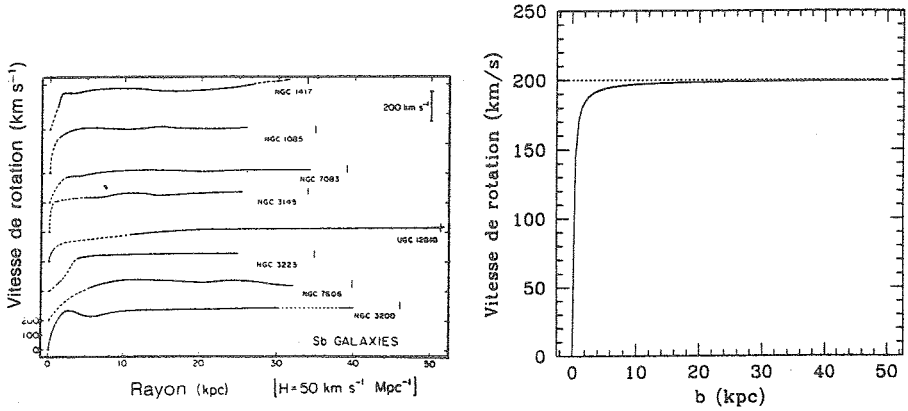


FIG. 2.9: À gauche : Exemples de courbes de rotation observées pour quelques galaxies spirales (Combes et al. 1991) ; à droite : courbes de rotation théoriques, pour le modèle SIS (trait pointillé) et pour le modèle non singulier SINS (trait continu).

potentiel gravitationnel ϕ du halo fournit l'accélération centripète nécessaire à la rotation avec la vitesse v des étoiles situées au paramètre d'impact b :

$$\frac{\partial \phi}{\partial b} = \frac{v^2}{b}. \quad (2.46)$$

Dès lors, au moyen de l'équation de Poisson exprimée en coordonnées sphériques, on obtient la distribution de la masse volumique du halo :

$$\rho(b) = \frac{v^2}{4\pi G b^2}. \quad (2.47)$$

La distribution de matière décrite par l'équation (2.47) est singulière en son centre. Nous allons montrer qu'elle est identique à celle d'un gaz parfait *isotherme* en équilibre hydrostatique, ce qui explique la dénomination du déflecteur. En effet, l'application de l'équation de l'équilibre hydrostatique pour un gaz autogravitant distribué selon la loi (2.47) indique que la pression à l'intérieur de ce gaz est proportionnelle à la masse volumique :

$$\begin{cases} \frac{dp}{db} = -g(b)p(b) \\ g(b) = \frac{v^2}{b} \end{cases} \Rightarrow p(b) = \frac{v^4}{8\pi G b^2} = \frac{v^2}{2} \rho(b), \quad (2.48)$$

où g est l'accélération de la gravité. Soit un gaz parfait en équilibre thermique à la température T . Si σ est la dispersion des vitesses des particules dans une direction donnée, on a la relation thermodynamique suivante :

$$m\sigma^2 = kT.$$

Grâce à l'équation d'état des gaz parfaits, $p = \rho kT/m$, on peut réécrire la relation précédente sous la forme suivante :

$$\sigma^2 = \frac{p}{\rho} \Rightarrow p = \sigma^2 \rho.$$

En comparant avec l'équation (2.48), on remarque que le gaz formant le halo se comporte comme un gaz parfait isotherme à l'équilibre. La dispersion des vitesses des particules par agitation thermique dans le halo est reliée simplement à la rotation des étoiles du disque :

$$\sigma^2 = v^2/2.$$

Les étoiles du halo peuvent être considérées comme les particules du gaz. L'élargissement des raies dans le spectre intégré d'une galaxie fournit une mesure simple et directe de σ^2 . Dans le cas des galaxies elliptiques, il s'agit même de la seule information disponible puisqu'il n'y a pas de rotation d'ensemble des étoiles dans un disque. On remplacera donc $\frac{v^2}{2}$ par σ^2 dans l'équation (2.47)⁷ :

$$\rho(b) = \frac{\sigma^2}{2\pi G b^2}, \quad (2.49a)$$

$$\Sigma(b) = \frac{\sigma^2}{2G b}, \quad (2.49b)$$

où la dernière relation est obtenue par projection dans le plan du déflecteur.

Angle de déflexion et positions des images

Le modèle SIS est circulaire et singulier. À partir des équations (2.3) et (2.15c) pour l'angle de déviation, et de l'équation (2.49b) pour la densité surfacique de matière, on obtient aisément dans le cas du modèle SIS :

$$\alpha(b) = -\frac{4\pi\sigma^2 b}{c^2} \frac{1}{b}, \quad (2.50a)$$

$$\hat{\alpha}(x) = -\frac{x}{x}, \quad (2.50b)$$

$$b_o = \frac{4\pi\sigma^2 D_{DS} D_{OD}}{c^2 D_{OS}}. \quad (2.50c)$$

L'angle de déviation est donc constant en fonction du paramètre d'impact.

L'équation de la lentille à 2 dimensions s'écrit :

⁷De manière rigoureuse, σ représente la dispersion des vitesses dans le halo ; cependant, celui-ci est sombre et le σ mesuré au moyen d'un spectre est fourni par la moyenne des vitesses des *étoiles*, pondérée par leur distribution spatiale. Or, le profil spatial observé des étoiles est en b^{-3} plutôt qu'en b^{-2} (cfr. éq. (2.47)) ; Turner, Ostriker & Gott (1984) prescrivent un facteur de correction égal à $\sqrt{1,5}$ pour obtenir la dispersion des vitesses dans le halo à partir de celle mesurée au moyen des étoiles. Kochanek (1994) a montré à partir d'un échantillon de 37 galaxies elliptiques de van der Marel (1991) que ce facteur de conversion n'est pas approprié, car la mesure de la dispersion des vitesses est confinée au centre de la galaxie, soit en raison de la taille limitée de la fente du spectrographe, soit en raison de la diminution de l'intensité de surface des galaxies distantes (Kochanek 1993b). Quoi qu'il en soit, nous resterons attentifs au cours de notre étude à l'existence éventuelle d'un tel facteur de correction.

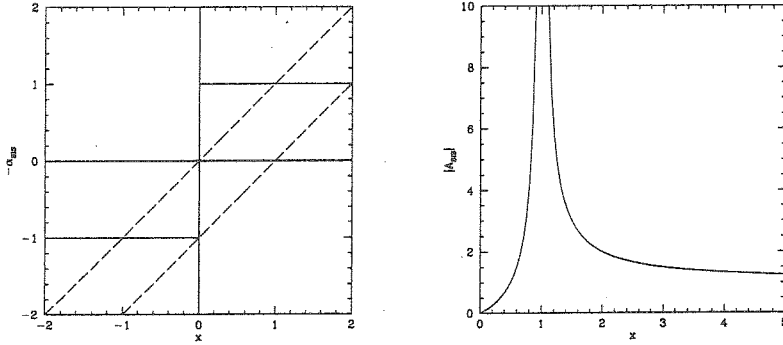


FIG. 2.10: Modèle SIS : à gauche : solution graphique de l'équation de la lentille ; à droite : profil d'amplification dans le plan image (ligne critique en $x_t = 1$).

$$\begin{cases} y_1 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right)x_1 \\ y_2 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right)x_2 \end{cases} \quad (2.51)$$

Cependant, l'équation de la lentille peut se mettre sous forme scalaire ; elle possède deux solutions si $y < 1$ et une seule solution dans le cas contraire (signe + dans la relation suivante ; voir Fig. 2.10) :

$$x = y \pm 1. \quad (2.52)$$

Densité surfacique, cisaillement, amplification, lignes critiques et caustiques

La densité surfacique de masse du modèle SIS est identique au cisaillement. En effet, $\psi = x$ (éq. (2.15c)) et par les relations (2.20) et (2.26) on montre facilement que

$$\kappa = \gamma = \frac{1}{2x}. \quad (2.53)$$

La densité surfacique diverge en $x \rightarrow 0$: le modèle SIS est bien un modèle singulier (avec $\beta = 1$, voir Section 2.1.5.5).

L'amplification lumineuse dans le plan image s'obtient directement à partir de l'équation (2.31) et de la relation (2.50b) :

$$A^{-1}(x) = \frac{x-1}{x}, \quad (2.54)$$

et la ligne critique tangentielle est le cercle de rayon $x_t = 1$ (voir Fig. 2.10). Il n'y a pas de ligne critique radiale et la caustique tangentielle, projection du cercle $x_t = 1$ dans le

plan source, est dégénérée au point $y_t = 0$. Le cercle dans le plan source de rayon $y = 1$ délimite la zone de formation de 2 images.

L'amplification totale dans le plan source est obtenue en calculant la somme des amplifications des deux images, au moyen des équations (2.52) et (2.54) :

$$\begin{cases} A(y) = \frac{2}{y} & \text{si } y \leq 1 \\ A(y) = \frac{1+y}{y} & \text{si } y > 1 \end{cases} \quad (2.55)$$

2.2.4 La sphère isotherme non singulière (SINS)

Origine physique

La singularité en $b = 0$ de la densité de matière du modèle SIS est supprimée par l'introduction d'un noyau ou d'un cœur de densité finie. Le rayon de cœur est un paramètre supplémentaire de ce nouveau modèle. Les modèles de King (1962) appartiennent à cette famille, dont la sphère isotherme est un cas particulier. En réalité, les observations avec le Hubble Space Telescope (HST) des galaxies E/SO révèlent que leurs noyaux sont quasiment singuliers, avec une augmentation continue de la brillance de surface à mesure que l'on s'approche du centre suivant la loi b^β ($1 > \beta > 0$) (Crane et al. 1993). Il est cependant intéressant de considérer les effets de lentille gravitationnelle provoqués par une telle distribution de matière : l'existence d'une caustique radiale augmente l'amplification totale moyenne comparée à celle produite par le modèle SIS. Dans le souci de conserver des relations analytiques simples, certains auteurs ont introduit la présence d'un cœur directement au niveau du potentiel de déflexion (par exemple Blandford et Kochanek 1987). Cependant, il est possible d'introduire le comportement non singulier du déflecteur directement au niveau de la densité de matière. Nous suivrons cette approche plus physique, qui fut introduite par Hinshaw & Krauss en 1987.

Si b_c est le rayon de cœur, les densités de matière volumique et surfacique du modèle SINS s'écrivent successivement⁸ (cfr. Eqs. (2.49a) et (2.49b) pour le modèle SIS) :

$$\rho(b) = \frac{\sigma^2}{2\pi G(b^2 + b_c^2)}, \quad (2.56a)$$

$$\Sigma(b) = \frac{\sigma^2}{2G\sqrt{b^2 + b_c^2}}. \quad (2.56b)$$

Angle de déflexion et positions des images

À partir des équations (2.3) et (2.15c) pour l'angle de déviation, et de l'équation (2.56b) pour la densité de matière, on obtient aisément dans le cas du modèle SINS :

⁸À l'aide des équations (2.56a), (2.46) et de l'équation de Poisson en coordonnées sphériques, on peut montrer que la courbe de rotation du modèle SINS est donnée par $v^2 = 2\sigma^2(1 - b_c/b \arctan(b/b_c))$; voir illustration Fig. 2.9.

$$\alpha(b) = -\frac{4\pi\sigma^2}{c^2} \left[\frac{\sqrt{b^2 + b_c^2} - b_c}{b} \right] \frac{b}{b}, \quad (2.57a)$$

$$\hat{\alpha}(x) = -\frac{\sqrt{x^2 + x_c^2} - x_c}{x} \frac{x}{x}, \quad (2.57b)$$

$$b_o = \frac{4\pi\sigma^2}{c^2} \frac{D_{DS} D_{OD}}{D_{OS}}. \quad (2.57c)$$

L'équation de la lentille à 2 dimensions s'écrit :

$$\begin{cases} y_1 = \left(1 - \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_c^2} - x_c}{x_1^2 + x_2^2}\right) x_1 \\ y_2 = \left(1 - \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_c^2} - x_c}{x_1^2 + x_2^2}\right) x_2 \end{cases} \quad (2.58)$$

Cependant, l'équation de la lentille est à symétrie circulaire et elle peut se mettre sous forme scalaire :

$$y = x - \frac{\sqrt{x^2 + x_c^2} - x_c}{x}. \quad (2.59)$$

L'inversion est encore possible ; elle produit une équation cubique pour la position radiale x des images en fonction du rayon de cœur x_c et de la position radiale de la source y :

$$x^3 - 2yx^2 + (y^2 + 2x_c - 1)x - 2yx_c = 0.$$

Cette équation peut être résolue analytiquement (Abramowitz & Stegun 1964) ; elle possède 1, 2 ou 3 solutions selon que le discriminant D est positif, nul ou négatif, avec :

$$D = s^3 + t^2, \quad (2.60a)$$

$$s = \frac{1}{3} \left[2x_c - 1 - \frac{y^2}{3} \right], \quad (2.60b)$$

$$t = \frac{y}{3} \left[x_c + 1 - \frac{y^2}{9} \right]. \quad (2.60c)$$

Les solutions s'écrivent dans les différents cas de la manière suivante :

- Si $D > 0$:

$$x_1 = \left(t + \sqrt{D}\right)^{1/3} + \left(t - \sqrt{D}\right)^{1/3} + \frac{2y}{3}. \quad (2.61)$$

- Si $D < 0$:

$$x_1 = 2\rho^{1/3} \cos(\varphi/3) + \frac{2y}{3}, \quad (2.62a)$$

$$x_2 = -\rho^{1/3} \cos(\varphi/3) - \sqrt{3}\rho^{1/3} \sin(\varphi/3) + \frac{2y}{3}, \quad (2.62b)$$

$$x_3 = -\rho^{1/3} \cos(\varphi/3) + \sqrt{3}\rho^{1/3} \sin(\varphi/3) + \frac{2y}{3}, \quad (2.62c)$$

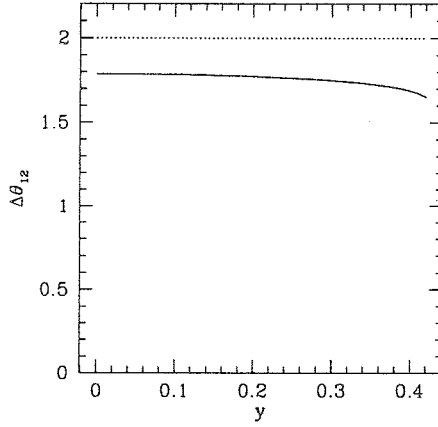


FIG. 2.11: Séparation angulaire entre les images 1 et 2 du modèle SINS ($x_c = 0.1$) (trait continu) et du modèle SIS (trait pointillé) en fonction de la position normalisée de la source.

où :

$$\begin{cases} \rho = (-s)^{3/2}, \\ \varphi = \arctan\left(\sqrt{-D/t^2}\right). \end{cases} \quad (2.63)$$

- Si $D = 0$:

$$x_1 = 2\rho^{1/3} + \frac{2y}{3}, \quad (2.64a)$$

$$x_2 = x_3 = -\rho^{1/3} + \frac{2y}{3}. \quad (2.64b)$$

Renormalisation du rayon d'Einstein

La séparation angulaire entre les images 1 et 2 peut être calculée au moyen des expressions (2.62a) et (2.62b). Lorsque $y \rightarrow 0$, on a :

$$\Delta\theta_{12} = 2b_o/D_{OD}\sqrt{1 - 2x_c}. \quad (2.65)$$

La dernière relation est *exacte* dans le cas où $y = 0$, mais, comme le montre la Fig. 2.11 elle reste une très bonne approximation pour tout le régime de formation des images multiples ($y \leq y_r$, voir éq. (2.69a)).

Ainsi donc, la séparation angulaire entre les images mirages est *inférieure* à celle obtenue dans le cas du modèle SIS ($\Delta x_{12,SIS} = 2$, voir éq. (2.52)). Cela provient du fait que la présence d'un noyau de cœur diminue la masse centrale du déflecteur SINS comparée à celle du déflecteur SIS; cela provoque également une baisse de la dispersion des vitesses de rotation des étoiles. Cependant, la séparation angulaire entre les images multiples d'un mirage gravitationnel est une grandeur observée qui *doit* être reproduite par le modèle de lentille, quel qu'il soit. L'addition d'un noyau de cœur implique une augmentation de la

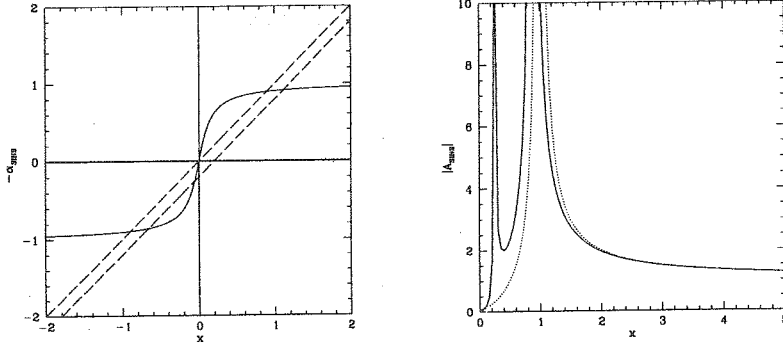


FIG. 2.12: Modèle SINS : à gauche : solution graphique de l'équation de la lentille ($x_c = 0, 1$) ; à droite : profil d'amplification dans le plan image (lignes critiques en $x_r = 0, 251$ et $x_t = 0, 894$) ; le trait en pointillé représente le profil du modèle SIS.

dispersion des vitesses dans le halo – et donc du rayon d'Einstein de la galaxie– de manière à *conserver* la séparation angulaire des images attendue avec le modèle SIS. Il faut donc satisfaire la relation suivante :

$$b_o \sqrt{1 - 2x_c} = b_{o,SIS},$$

où $b_{o,SIS} = \frac{4\pi\sigma_{SIS}^2 D_{DS}D_{OD}}{c^2}$ (cfr. éq. 2.50c). Puisque par définition, $x_c = b_c/b_o = \frac{b_c}{b_{o,SIS}} \frac{b_{o,SIS}}{b_o} = x_{c,SIS} \frac{b_{o,SIS}}{b_o}$, on peut remplacer dans l'équation précédente et résoudre pour b_o . On obtient alors la renormalisation suivante du rayon d'Einstein :

$$b_o = b_{o,SIS} (x_{c,SIS} + \sqrt{x_{c,SIS}^2 + 1}). \quad (2.66a)$$

Quant au rayon de cœur renormalisé, il peut s'écrire en fonction de son expression normalisée dans le modèle SIS :

$$x_c = x_{c,SIS} (\sqrt{x_{c,SIS}^2 + 1} - x_{c,SIS}). \quad (2.66b)$$

Amplification, lignes critiques et caustiques

L'expression analytique de l'amplification lumineuse dans le plan image s'obtient directement à partir de l'équation (2.31) et de la relation (2.57b) :

$$A(x, x_c) = \frac{x^4 \sqrt{x^2 + x_c^2}}{(x^2 + x_c - \sqrt{x^2 + x_c^2})(x_c^2 + (x^2 - x_c) \sqrt{x^2 + x_c^2})}. \quad (2.67)$$

On retrouve la relation correspondante pour le modèle SIS (éq. 2.54) lorsqu'on pose $x_c = 0$. Le profil de l'amplification dans le plan image est illustré à la Fig. 2.12.

Les rayons des lignes critiques radiale et tangentielle sont obtenus au moyen des relations (2.32a) et (2.32b) dans lesquelles l'angle de déviation est substitué par son expression (2.57b). Après un peu d'algèbre, on obtient respectivement :

$$x_r = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2x_c - x_c^2 - \sqrt{x_c^3(x_c + 4)}}, \quad (2.68a)$$

$$x_t = \sqrt{1 - 2x_c}. \quad (2.68b)$$

On remarque que si $x_c \geq 1/2$, les lignes critiques ne sont pas définies et l'existence d'images multiples est *impossible*, quelle que soit la position relative de la source par rapport au défecteur.

Les rayons des caustiques radiales et tangentielles sont calculés (pour $x_c < 1/2$) à partir des équations (2.33a) et (2.33b) explicitées pour l'équation de la lentille scalaire du modèle SINS (éq. (2.59)) :

$$y_r = \sqrt{1 + 5x_c - \frac{x_c^2}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{x_c(x_c + 4)^3}}, \quad (2.69a)$$

$$y_t = 0. \quad (2.69b)$$

Le modèle SINS produit des images triples des sources situées à l'intérieur de la caustique radiale. Nous discuterons de façon plus détaillée la probabilité de création d'images multiples à la Section 2.3.

L'amplification totale dans le plan source est obtenue en calculant la somme des amplifications des images (au nombre de 1, 2 ou 3), au moyen des équations (2.61-2.62c) et (2.67). Cependant, il n'existe pas de relation analytique simple en fonction de la position y de la source.

2.2.5 L'ellipsoïde isotherme singulier (EIS)

Origine physique

Le défecteur isotherme singulier s'avère donc être une très bonne approximation pour décrire les potentiels gravitationnels simples comme les halos des galaxies spirales ou les galaxies elliptiques. Cependant, l'approximation de la géométrie sphérique n'est pas suffisante pour rendre compte des observations de mirages gravitationnels avec 4 images. Ceux-ci sont engendrés par un moment quadrupolaire dans la distribution de matière. Ce moment quadrupolaire peut être soit d'origine extrinsèque au défecteur (cisaillement "externe" dû à la perturbation d'objets massifs voisins), soit d'origine intrinsèque (ellipticité du défecteur principal). La première hypothèse correspond aux modèles sphériques perturbés, du type SIS+cisaillement extérieur ou MP+cisaillement extérieur (Chang & Refsdal 1979, 1984). La seconde hypothèse est appuyée par le fait que les isophotes des galaxies sont souvent elliptiques, bien que l'on ne puisse pas affirmer que la matière cachée soit distribuée comme la matière lumineuse. L'ellipsoïde isotherme singulier (EIS) est un modèle relativement simple qui rend compte qualitativement de toutes les configurations observées à 2, 3 ou 4 images.

Il permet donc de comparer et d'interpréter les propriétés d'un ensemble de mirages gravitationnels dans le contexte d'une étude statistique comme la nôtre.

Le modèle EIS résulte de la projection d'un ellipsoïde. Il est construit en tant que généralisation de la *densité surfacique de matière* du modèle SIS et a été présenté indépendamment par Kassiola & Kovner (1993) et par Kormann et al. (1994), comme une amélioration du modèle à *potentiel* elliptique (par exemple Kovner 1987, Blandford et Kochanek 1987). Nous adopterons dans la suite le formalisme proposé par Kormann et al. (1994).

L'approche la plus simple consiste à conserver la dépendance isotherme en $1/b$ de la densité surfacique de masse du modèle SIS, et à remplacer la symétrie circulaire par une symétrie elliptique. Pour ce faire, on substitue à b la fonction $b\sqrt{\cos^2 \varphi + f^2 \sin^2 \varphi}$, constante sur des contours elliptiques dont le demi-grand-axe b/f est vertical et le demi-petit-axe vaut b ($f < 1$ est donc le rapport des axes). On a donc en coordonnées polaires :

$$\Sigma(b, \varphi) = \frac{\sqrt{f}\sigma^2}{2Gb\sqrt{\cos^2 \varphi + f^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (2.70a)$$

$$f \equiv \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon}, \quad (2.70b)$$

où ϵ est l'ellipticité. Grâce au facteur de normalisation \sqrt{f} , la masse à l'intérieur d'un contour d'iso-densité est identique à celle du modèle SIS.

Angle de déflexion et équation de la lentille

La symétrie n'est plus circulaire et l'angle de déviation doit être calculé à partir du potentiel de déflexion ψ (éq. (2.12)). Celui-ci est déterminé au moyen de l'expression (2.70a) de la densité de matière et de l'équation de Poisson (2.14) en coordonnées polaires. On recherche les solutions particulières de la forme :

$$\psi(b, \varphi) = bg(\varphi), \quad (2.71)$$

où g est une fonction quelconque de φ uniquement. Cette formulation conserve la dépendance radiale du potentiel de déflexion du modèle SIS. On obtient finalement un angle de déflexion anisotrope et uniquement fonction de l'angle φ . Dans les axes principaux de l'ellipse, on obtient ($f \neq 1$; $f' = \sqrt{1 - f^2}$) :

$$\alpha_1 = -\frac{4\pi\sigma^2}{c^2} \frac{\sqrt{f}}{f'} \operatorname{arcsh}\left(\frac{f'}{f} \cos \varphi\right), \quad (2.72a)$$

$$\alpha_2 = -\frac{4\pi\sigma^2}{c^2} \frac{\sqrt{f}}{f'} \arcsin(f' \sin \varphi), \quad (2.72b)$$

$$\hat{\alpha}_1 = -\frac{\sqrt{f}}{f'} \operatorname{arcsh}\left(\frac{f'}{f} \cos \varphi\right), \quad (2.72c)$$

$$\hat{\alpha}_2 = -\frac{\sqrt{f}}{f'} \arcsin(f' \sin \varphi), \quad (2.72d)$$

$$b_o = \frac{4\pi\sigma^2}{c^2} \frac{D_{DS}D_{OD}}{D_{OS}}. \quad (2.72e)$$

L'équation de la lentille à deux dimensions s'écrit donc à partir des relations précédentes :

$$y_1 = x_1 + \hat{\alpha}_1 \quad (2.73a)$$

$$y_2 = x_2 + \hat{\alpha}_2. \quad (2.73b)$$

L'équation de la lentille ne peut pas être inversée. Cependant, il est possible de trouver deux équations scalaires pour x et φ . En effet, il suffit de multiplier la relation (2.73a) par $\cos \varphi$, la relation (2.73b) par $\sin \varphi$ et de les additionner pour obtenir $x(\varphi)$; on obtient ensuite une équation implicite pour φ après substitution de $x(\varphi)$ et soustraction des deux composantes de l'équation de la lentille, préalablement multipliées par $\sin \varphi$ et par $\cos \varphi$ respectivement :

$$x(\varphi) = \left[y_1 + \frac{\sqrt{f}}{f'} \operatorname{arcsh} \left(\frac{f'}{f} \cos \varphi \right) \right] \cos \varphi + \left[y_2 + \frac{\sqrt{f}}{f'} \arcsin (f' \sin \varphi) \right] \sin \varphi, \quad (2.74a)$$

$$\left[y_1 + \frac{\sqrt{f}}{f'} \operatorname{arcsh} \left(\frac{f'}{f} \cos \varphi \right) \right] \sin \varphi - \left[y_2 + \frac{\sqrt{f}}{f'} \arcsin (f' \sin \varphi) \right] \cos \varphi = 0. \quad (2.74b)$$

Amplification, lignes critiques et caustiques

Grâce à la propriété (2.71) du potentiel de déflexion, on peut montrer simplement, à l'aide de la matrice d'amplification en coordonnées polaires (éq. (2.23)), que l'amplification dans le plan image obéit à la relation générique suivante :

$$A(\mathbf{x}) = \frac{1}{1 - \nabla^2 \psi(\mathbf{x})} = \frac{1}{1 - 2\kappa(\mathbf{x})}, \quad (2.75)$$

où la dernière égalité est fournie par l'équation de Poisson (2.20). Dans le cas du modèle EIS, l'amplification dans le plan image s'écrit donc :

$$A^{-1}(x, \varphi) = 1 - \frac{\sqrt{f}}{x \sqrt{\cos^2 \varphi + f^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (2.76)$$

Il n'existe pas de ligne critique radiale puisque le déflecteur est singulier. Au vu de la relation (2.75), la ligne critique tangentielle est donnée par le contour d'iso-densité $\kappa = 1/2$:

$$x_t(\varphi) = \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{\cos^2 \varphi + f^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (2.77)$$

Il est impossible d'expliciter une relation analytique pour l'amplification dans le plan source. Des images multiples sont formées lorsque la source se situe dans la région délimitée

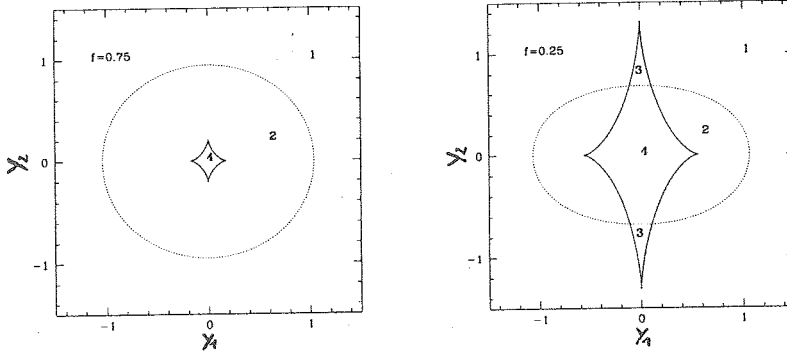


FIG. 2.13: Modèle EIS : à gauche : caustiques pour $f = 0,75 (> f_{min})$; à droite : caustiques pour $f = 0,25 (< f_{min})$. Le nombre d'images est indiqué en gras. Trait continu : caustique tangentielle ; pointillé : "coupure".

par la "coupure" (qui tient lieu de caustique radiale pour les déflecteurs singuliers). Si une source ponctuelle se trouve exactement sur la "coupure", une image est formée en $(0,0)$. L'équation de la "coupure" est donc obtenue en posant $x = (0,0)$ dans l'équation de la lentille :

$$\begin{cases} y_{r,1}(\varphi) = -\frac{\sqrt{f}}{f'} \operatorname{arcsh}\left(\frac{f'}{f} \cos \varphi\right) \\ y_{r,2}(\varphi) = -\frac{\sqrt{f}}{f'} \arcsin(f' \sin \varphi) \end{cases} \quad (2.78)$$

La dégénérescence de la caustique tangentielle en un point est levée grâce à la rupture de la symétrie circulaire. Il s'agit d'un diamant composé de 4 pointes (ou "cusps") selon les 4 directions des axes, et dont l'équation est obtenue en injectant celle de la ligne critique tangentielle dans l'équation de la lentille (voir Fig. 2.13) :

$$\begin{cases} y_{t,1}(\varphi) = \frac{\sqrt{f} \cos \varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + f^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{\sqrt{f}}{f'} \operatorname{arcsh}\left(\frac{f'}{f} \cos \varphi\right) \\ y_{t,2}(\varphi) = \frac{\sqrt{f} \sin \varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + f^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{\sqrt{f}}{f'} \arcsin(f' \sin \varphi) \end{cases} \quad (2.79)$$

La rangée supérieure de la Fig. 2.3 montre, de gauche à droite, les cartes d'amplification dans les plans source et image.

Remarques :

1. L'angle φ est l'angle polaire dans le plan image, mais non dans le plan source, où il est un simple paramètre permettant la description analytique de la caustique et de la "coupure".
2. Pour $\varphi = \pi/2$, les pointes de la caustique selon l'axe OY percent la "coupure" ("naked cusps" en anglais), si $y_{t,2} > y_{r,2}$, c'est-à-dire si $f < f_{min} \sim 0,3942\dots$. Si la source se trouve dans une telle région, le déflecteur EIS produit 3 images. Les sommets de la caustique ne percent jamais la "coupure" selon l'axe OX (voir illustration Fig. 2.13).

Position des images

L'équation (2.74b) est résolue numériquement, à l'aide d'un algorithme de recherche de racines, tel que la méthode de Newton-Raphson (par exemple Press et al. 1990). L'efficacité de l'algorithme est toujours fonction des connaissances a priori de la fonction. Parmi celles-ci, nous avons :

1. Les dérivées 1^{ère} et 2^{nde} de la fonction ;
2. Le nombre d'images (1, 2, 3 ou 4) en fonction de la position de la source par rapport aux caustiques et en fonction de ϵ ;
3. L'image 1 se trouve toujours dans le même quadrant que la source ;
4. L'image 2 se trouve toujours dans le quadrant opposé à celui de la source ;
5. Si la source se trouve sur un axe, les images 1 et 2 sont sur le même axe ; si en outre, la source est à l'intérieur de la caustique, les images 3 et 4 sont symétriquement réparties de part et d'autre de l'image 1 (respectivement 2) si la source est sur OX (respectivement OY) ;
6. Soit une source ponctuelle dans la direction θ du plan source. L'angle φ permettant de calculer la position de la caustique tangentielle dans cette direction est l'azimuth du lieu de formation des images 3 et 4 lorsque la source est *sur* la caustique. Lorsque la source est à l'intérieur de la caustique, les images 3 et 4 se situent de part et d'autre de cet azimuth.

À l'aide de ces contraintes, nous avons réalisé un programme numérique efficient afin de calculer les positions des images d'une source ponctuelle vue au travers d'un défecteur EIS, orienté d'un angle ϑ quelconque par rapport au plan du ciel. Ce programme sera au cœur de toutes les applications ultérieures faisant appel au modèle EIS. La rangée inférieure de la Fig. 2.3 illustre les positions des images (à droite) pour différentes positions de la source (à gauche) et pour une orientation $\vartheta = 0$.

2.2.6 Résumé : les différents types de mirage

Dans cette section, nous voulons illustrer qualitativement les différents types de mirages gravitationnels observés. Pour ce faire, nous combinons deux modèles simples de défecteur (le modèle SIS et le modèle PM) afin de reproduire les propriétés génériques des différentes familles de défecteurs circulaires ; l'addition d'une perturbation quadrupolaire (cisaillement) permet de rendre compte des mirages à 4 images engendrés par les défecteurs elliptiques (EIS). Les mirages sont simulés sur une image extraite du Hubble Deep Field⁹, en calculant les effets produits par des défecteurs situés à un redshift $z = 0,5$ et en supposant que toutes les sources lumineuses se trouvent à une distance beaucoup plus grande que celle des défecteurs. L'algorithme employé est celui de Schramm & Kayser (1987) et est décrit à la Section 2.1.4.1.

⁹Le Hubble Deep Field (HDF) est un champ sans étoiles brillantes, situé dans la constellation de la Grande Ourse, et dont des images très profondes ont été obtenues avec le HST à travers différents filtres en vue d'étudier les propriétés de l'Univers très lointain. La résolution angulaire est de $0,1''/\text{pixel}$; les images extraites ($20'' \times 20''$) sont observées à travers un filtre rouge ($R_{\text{lim}} \sim 28$).

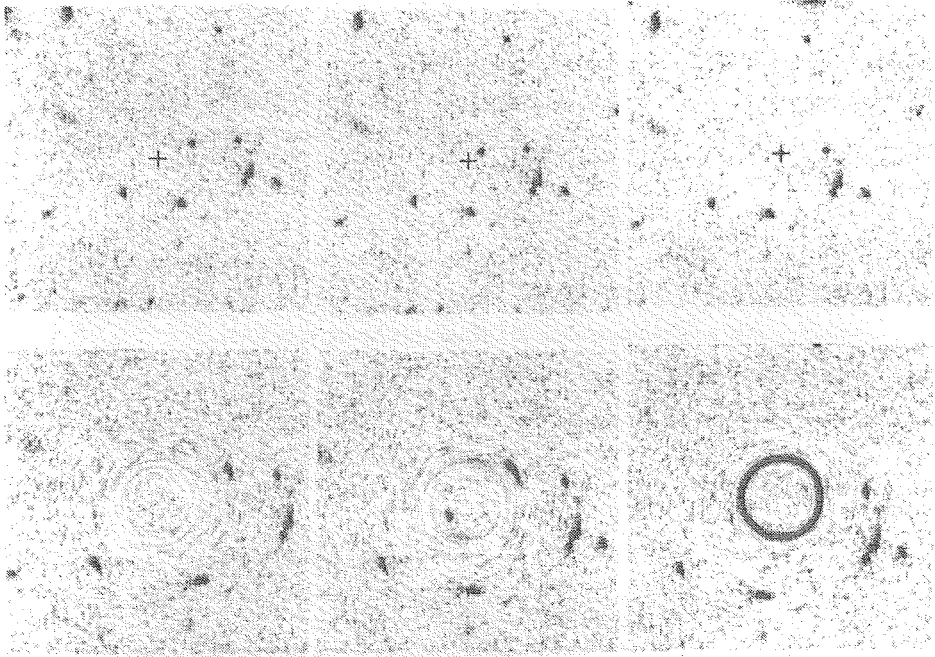


FIG. 2.14: Mirages produits par un défecteur SIS massif ($\theta_E = 2,5''$) sur une image ($20'' \times 20''$) extraite du Hubble Deep Field. En haut : images de référence (= plans sources) ; la croix indique la position du défecteur ; en bas : images mirages (= plans images)

Un modèle circulaire singulier : le modèle SIS

On applique l'équation de la lentille à deux dimensions spécifiée pour le modèle SIS (éq. (2.51)). La Fig. 2.14 présente trois types de mirage engendrés par le modèle SIS (rangée inférieure), en fonction de la position du défecteur par rapport aux sources d'arrière-plan (rangée supérieure). À gauche, le défecteur ne produit aucune image multiple, car son désalignement est supérieur à b_o pour toutes les sources d'arrière-plan ; on identifie cependant deux effets "secondaires" : i) l'élongation tangentielle des images environnant le centre de masse du défecteur (phénomène de cisaillement) ; vu la conservation de la brillance de surface, il résulte que le flux des images est supérieur à celui des sources correspondantes (amplification lumineuse) ; ii) la *diminution* du nombre apparent de sources par unité de surface (phénomène de dilution géométrique, dû à la focalisation de la lentille). En réalité, cette diminution de la densité de surface des sources peut être compensée par l'apparition de nouvelles sources, intrinsèquement plus faibles que le seuil de détection, mais dont le flux est amplifié par la lentille ; la simulation de ce dernier effet fait appel à la connaissance de la fonction de luminosité des sources et ne peut être calculé uniquement à partir de l'image originale. Sur la colonne centrale de la Fig. 2.14, une des sources est dédoublée en deux images distinctes, avec des amplifications différentes ; la colonne de droite illustre la formation d'un anneau lorsque le défecteur est parfaitement aligné sur une des sources ; on continue à percevoir les phénomènes de cisaillement et de dilution géométrique des sources lumineuses

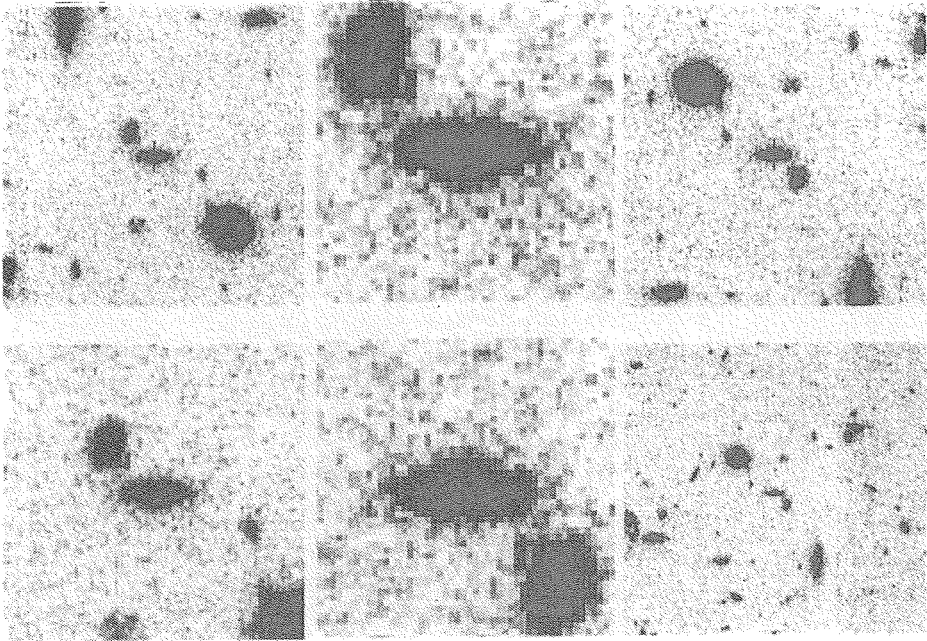


FIG. 2.15: Mirages produits par un plan infini de matière sur une image ($20'' \times 20''$) extraite du Hubble Deep Field. En haut à gauche : image de référence (= plan source); la croix indique la position du déflecteur; de haut en bas et de gauche à droite : images mirages (= plans images), avec $\kappa = 0,5, 0,75, 1,25, 2$ et 3 successivement. Rappelons que pour $\kappa = 1$, le plan image serait illuminé avec une intensité égale à celle du point sur lequel est centré le PM.

situées à plus grande distance du déflecteur.

Focalisation par un plan de matière (PM)

Le plan infini de matière produit uniquement de la convergence. Par conséquent, il provoque un grandissement de l'image entière, sans induire de déformations ni d'images multiples. La Fig. 2.15 montre en effet différents grandissements d'une même image d'origine (en haut à gauche), en fonction de la densité de surface κ . La transformation entre le plan image et le plan source est assurée par la relation (2.42). On distingue 3 régimes différents, selon que l'observateur se trouve avant ($\kappa < 1$), juste derrière ($1 < \kappa \leq 2$) ou loin derrière ($\kappa > 2$) le foyer de la lentille. Pour $\kappa_1 < 1$, on obtient une image droite et le grandissement est supérieur à 1 (cfr. images avec $\kappa = 0,5$ et $0,75$). Pour $1 < \kappa_2 \leq 2$, les rayons lumineux sont divergents et l'image est renversée; le grandissement est identique au cas précédent, avec $\kappa_1 = 2 - \kappa_2$ (voir colonne centrale de la Fig. 2.15). Enfin, pour $\kappa_3 > 2$, l'image est renversée et le grandissement devient *inférieur* à 1 (voir la dernière image de la Fig. 2.15).

L'existence de plans de matière étendus, avec une densité surfacique de matière égale à plusieurs fois la densité critique, n'est pas confirmée par l'observation. Par contre, lorsqu'une

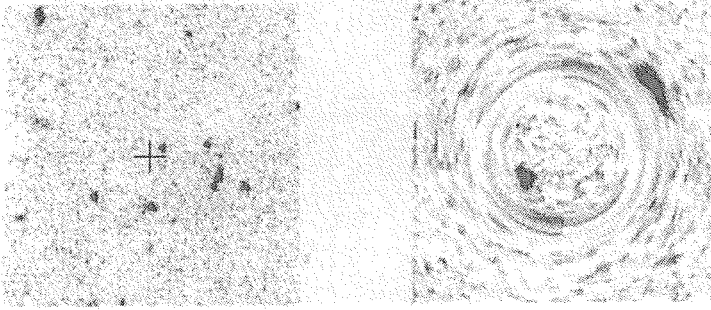


FIG. 2.16: Mirages produits par un déflecteur SIS + plan de matière ($\kappa = 0,5$), sur une image (20"X20") extraite du Hubble Deep Field. À gauche : image de référence (= plan source) ; la croix indique la position du déflecteur. À droite : image mirage (= plan image).

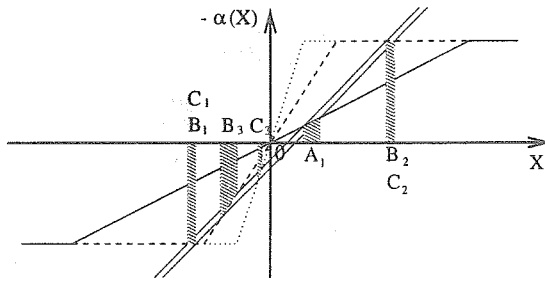


FIG. 2.17: Angle de déflexion et formation des images pour un modèle non singulier (PM central et modèle SIS à l'extérieur), en fonction de κ . Les traits fins parallèles définissent la position de la source et les zones hachurées matérialisent la largeur des images. i) $\kappa = 0,5$: trait continu et image A_1 ; ii) $\kappa = 1,5$: trait interrompu et images B_1 , B_2 et B_3 ; iii) $\kappa = 3$: trait pointillé et images $C_1(= B_1)$, $C_2(= B_2)$ et C_3 .

galaxie lentille est immergée dans un amas de galaxie, celui-ci agit localement et superpose son influence à celle du déflecteur principal, en augmentant la séparation angulaire des images multiples produites par ce dernier ; cela est illustré à la Fig. 2.16, où le modèle de déflecteur est constitué par une galaxie SIS et un plan de matière (comparer avec la colonne centrale de la Fig. 2.14).

Un modèle circulaire non singulier : le modèle SIS et le plan de matière central

Les propriétés déflectrices d'un modèle circulaire non singulier, tel que le modèle SINS, peuvent être imitées qualitativement en reliant continûment le profil de l'angle de déflexion d'un plan de matière, au profil (constant) de l'angle de déflexion du modèle SIS. La jonction continue entre le modèle SIS et le plan de matière central a lieu au rayon $b_{lim} = b_o/\kappa$, où b_o est le rayon d'Einstein du modèle SIS et κ la densité surfacique de masse du modèle PM. L'équation de la lentille est l'équation (2.42) ou (2.51), selon que b est inférieur ou supérieur

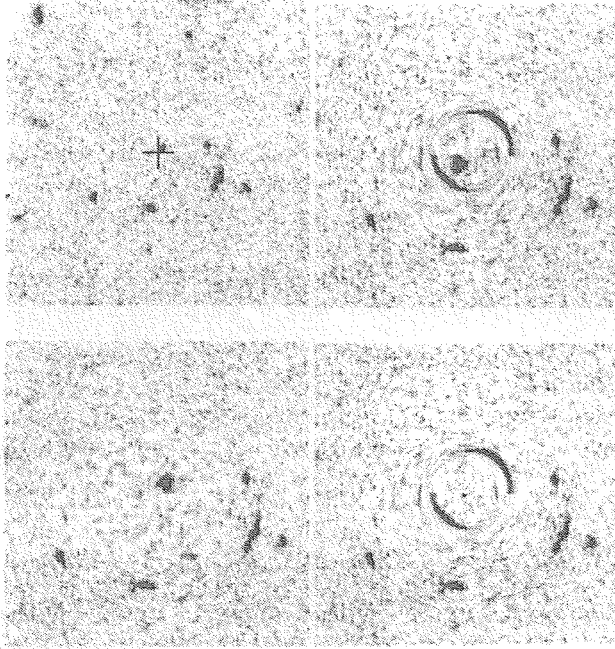


FIG. 2.18: Mirages produits par une distribution de matière non singulière (plan de matière central et modèle SIS à l'extérieur), sur une image (20"X20") extraite du Hubble Deep Field. En haut à gauche : image de référence (= plan source); la croix indique la position du défecteur; en bas à gauche et colonne de droite : images mirages pour $\kappa = 0,5, 1,5$ et 3 successivement (= plans images), correspondant aux séries A, B et C de la Fig. 2.17.

à b_{im} .

Comme l'indique la Fig. 2.17, un tel modèle non singulier est incapable de produire des images multiples si $\kappa < 1$ (image A_1). Par contre, si $\kappa > 1$, trois images sont produites (images B_1, B_2 et B_3). Le nombre d'images est toujours impair. Cependant, lorsque la densité centrale continue à augmenter, l'image centrale est progressivement désamplifiée (image C_3); elle disparaît totalement lorsque le modèle devient singulier ($\kappa \rightarrow \infty$), et le nombre d'images redevient pair. Les images A_1, B_1 - B_3 et C_1 - C_3 sont illustrées sur les simulations de la Fig. 2.18.

Un modèle singulier non circulaire : le modèle SIS avec cisaillement extérieur

Nous avons vu que pour produire des mirages avec 4 images, tels que certains mirages observés, il faut lever la dégénérescence sur la caustique tangentielle en brisant la symétrie circulaire.

La perturbation la plus simple, simulant un modèle elliptique, peut être trouvée à partir du raisonnement suivant :

- L'angle de déflexion d'un modèle symétrique peut s'écrire de la façon suivante :

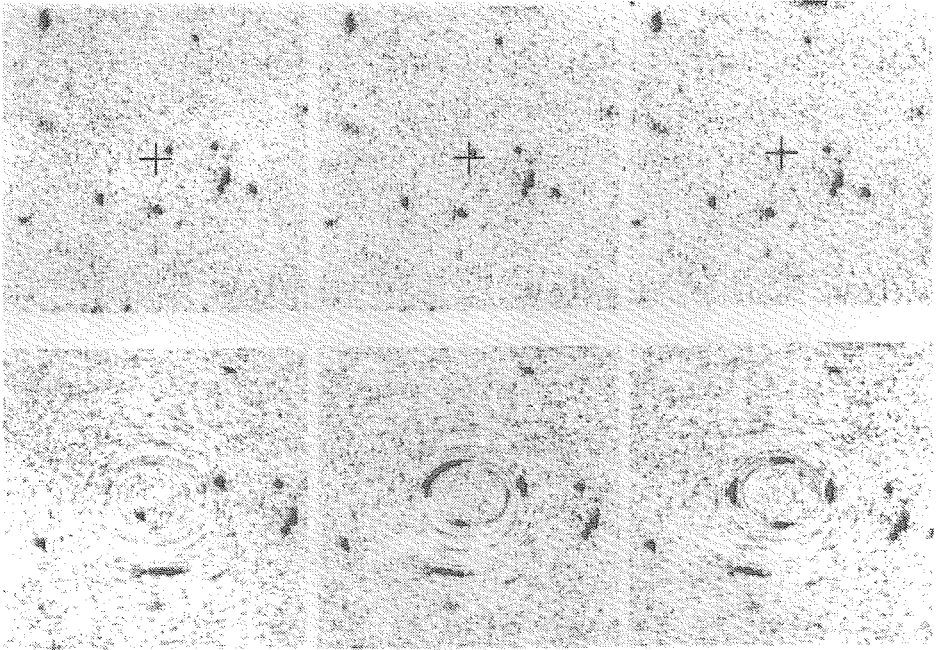


FIG. 2.19: Mirages produits par un défecteur SIS perturbé par un cisaillement extérieur ($\gamma = 0, 2$; $\vartheta = 0$) sur une image ($20'' \times 20''$) extraite du Hubble Deep Field. En haut : images de référence (= plans sources) ; la croix indique la position du défecteur. En bas : images mirages (= plans images) de multiplicité 2, 3 et 4, respectivement de gauche à droite.

$$\hat{\alpha}_{\text{circ}}(x) = \begin{pmatrix} a(x) & \\ & a(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (2.80)$$

où a est une fonction du rayon normalisé x .

- Dans le cas général, les dépendances de $\hat{\alpha}$ selon les axes Ox_1 et Ox_2 sont différentes, mais peuvent s'écrire selon une composante isotrope (à symétrie circulaire) et une composante anisotrope :

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{\text{gen}}(x_1, x_2) &= \begin{pmatrix} a_1(x_1, x_2) & \\ & a_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{a_1+a_2}{2} & \\ & \frac{a_1+a_2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a_1-a_2}{2} & \\ & -\frac{a_1-a_2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.81)$$

- Les choix non triviaux les plus simples pour les fonctions $(a_1 + a_2)/2$ et $(a_1 - a_2)/2$ sont respectivement un modèle symétrique et une contribution anisotrope constante :

$$\begin{cases} \frac{a_1+a_2}{2} = a(x) = 1/x \text{ (SIS)} \\ \frac{a_1-a_2}{2} = C \end{cases} \quad (2.82)$$

– Il vient finalement :

$$\hat{\alpha}_{\text{gen}}(x_1, x_2) = \hat{\alpha}_{\text{SIS}}(x) + \hat{\alpha}_2(x_1, x_2), \quad (2.83)$$

où :

$$\hat{\alpha}_2(x_1, x_2) = C \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

En remplaçant $\hat{\alpha}_2(x_1, x_2)$ dans la relation (2.26), on remarque que $C = \gamma$.

La perturbation la plus simple est donc provoquée par un cisaillement constant *extérieur* au déflecteur SIS. Ce cisaillement peut être provoqué par une distribution importante de masse “voisine”, mais suffisamment distante pour qu’il puisse être considéré constant. L’équation de la lentille est donnée par la relation générale (2.16) où l’on substitue $\hat{\alpha}$ par son expression précédente.

– En toute généralité, l’axe du cisaillement peut être orienté d’un angle ϑ par rapport à l’axe Ox_1 . Si S est la matrice de rotation dans le plan Ox_1x_2 et si $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ est l’opérateur (linéaire) de l’angle de déflexion associé au cisaillement et exprimé dans les axes principaux, l’angle $\hat{\alpha}_2$ s’écrit finalement dans le référentiel Ox_1x_2 comme suit :

$$\hat{\alpha}_2 = \gamma S^* \mathcal{A} S x,$$

c’est-à-dire :

$$\hat{\alpha}_2 = \gamma \begin{pmatrix} \cos 2\vartheta & \sin 2\vartheta \\ \sin 2\vartheta & -\cos 2\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (2.84)$$

Les images (2, 3 ou 4 en fonction de la position du déflecteur) formées par le déflecteur SIS plongé dans un cisaillement extérieur sont illustrées à la Fig. 2.19, en tant qu’exemples représentatifs simples des effets produits par un déflecteur non circulaire. La formation d’un arc est ici due à la fusion de deux images très proches d’une source étendue. On remarque que le cisaillement extérieur affecte également les autres objets du champ.

2.3 Probabilités d’observation d’un mirage gravitationnel

La statistique du phénomène de mirage gravitationnel au sein d’un échantillon de sources permet d’imposer des contraintes sur certaines propriétés physiques des lentilles ou sur les paramètres du modèle cosmologique décrivant l’Univers. Cependant, pour appliquer un outil statistique, il faut disposer au préalable d’une loi de probabilité associée à l’occurrence de l’évènement étudié. Dans notre travail, nous nous intéressons plus particulièrement à trois types d’évènements : les images multiples de quasars distants, les associations angulaires entre ces quasars et des galaxies d’avant-plan, et enfin la présence de raies en absorption

saturées Ly_α dans le spectre des QSOs. Dans les trois cas, nous considérons les effets produits par un défecteur unique : nous négligeons les situations – rarissimes – dans lesquelles plusieurs défecteurs comparables se situent sur la même ligne de visée.

Dans cette section, nous introduisons le concept de probabilité d'observation d'un effet de lentille gravitationnelle en général, à partir de ses trois éléments constitutifs : la section efficace géométrique associée au phénomène étudié, l'*observabilité* du phénomène au moyen des dispositifs instrumentaux accessibles et enfin l'influence du *biais en amplification*. Les applications particulières sont reportées aux Chapitres 4, 5 et 6, afférents aux études respectives. En guise de résumé, la dernière partie est consacrée à des résultats analytiques simples obtenus pour le modèle SIS.

2.3.1 La section et le volume efficaces géométriques

Quel qu'il soit, un mirage gravitationnel est formé lors de l'alignement presque parfait entre une source lumineuse et un objet massif sur une même ligne de visée. Soit une source au redshift z_s et un défecteur, de nature connue ou supposée connue, au redshift z . Le problème consiste à déterminer la surface au redshift z , centrée sur la source, et dans laquelle doit se trouver le défecteur pour produire le type de mirage attendu (ou de façon équivalente, la surface centrée sur le défecteur et dans laquelle doit se trouver la source par projection). Il s'agit donc d'une section efficace au sens de la physique nucléaire. L'intégration ultérieure de cette section efficace le long de la ligne de visée, entre l'observateur et la source, engendre un volume efficace dans lequel doit se trouver le défecteur (Nemiroff (1988) fut le premier à introduire ce concept de volume efficace). La probabilité d'observer réellement un défecteur à l'intérieur de ce volume est liée à son abondance dans l'Univers.

Revenons à la section efficace proprement dite. Nous calculerons la surface S centrée sur le défecteur, car celui-ci constitue un référentiel naturel par rapport auquel nous pouvons mesurer la position des images. Nous pouvons la calculer soit dans le plan source - S_y est l'ensemble des points où doit se trouver la source (*invisible*) pour donner lieu au mirage -, soit dans le plan image ou plan du ciel - S_x est l'ensemble des points visibles sur le ciel où doit se trouver nécessairement *une* des images *observées*. La section efficace géométrique peut donc finalement s'écrire :

$$\Sigma_{geom} = b_o^2(z) \int_{S_y} dy_1 dy_2 = b_o^2(z) \int_{S_x} \frac{1}{A(\boldsymbol{x})} dx_1 dx_2, \quad (2.85a)$$

et dans la situation à symétrie circulaire :

$$\Sigma_{geom} = 2\pi b_o^2(z) \int_{y_-}^{y_+} y dy = 2\pi b_o^2(z) \int_{x_-}^{x_+} \frac{x}{A(x)} dx, \quad (2.85b)$$

où $b_o(z)$ est le facteur d'échelle satisfaisant la relation (2.15c).

Le changement de variables du plan source vers le plan du ciel ($\boldsymbol{y} \rightarrow \boldsymbol{x}$) est décrit par l'équation de la lentille inversée. Celle-ci possède généralement plus d'une solution, donc l'opération n'est licite qu'à condition de considérer une seule image i . Le jacobien de cette

transformation est à l'origine du facteur $1/A$ dans le dernier membre (cfr éq. (2.22)). Physiquement, ce facteur $1/A$ est dû à la *convergence* des rayons lumineux provoquée par la lentille gravitationnelle ; la convergence produit une *réduction* de la section efficace géométrique, tout comme une loupe grossissante entraîne une diminution du champ visuel. Ce phénomène est également responsable de "l'effet de contournement" suivant lequel les rayons lumineux évitent le centre des défecteurs, ce qui engendre un biais au niveau des absorptions dans les spectres (voir Chapitre 6).

Les surfaces d'intégration S_y et S_x (ou les bornes d'intégration $y_{+/-}$ et $x_{+/-}$ dans le cas circulaire) sont imposées par le type de mirages recherchés et par la nature du défecteur considéré. Par exemple, dans le cas du défecteur SINS, un mirage composé de 3 images est observé si la source est située à l'intérieur de la caustique radiale ($y_- = 0$ et $y_+ = y_r$), ou, de façon équivalente, si l'image la plus faible se trouve à l'intérieur de la ligne critique radiale ($x_- = 0$, $x_+ = x_r$), ou encore si l'image secondaire est entre les deux lignes critiques ($x_- = x_r$, $x_+ = x_t$). Dans le cas des associations QSO-galaxies, le critère d'association sur le plan du ciel entre la galaxie et l'image principale définit naturellement les bornes x_- et x_+ .

2.3.2 L'observabilité et la fonction de sélection angulaire (FSA)

Tous les mirages gravitationnels produits par une lentille donnée ne sont pas nécessairement *observables*. En effet, il se peut que les images multiples soient angulairement trop rapprochées ou qu'une des images soit trop faible comparativement aux autres pour que le mirage soit détecté en tant que tel à l'aide de l'instrumentation utilisée. Par instrumentation, nous entendons ici la résultante du télescope, du détecteur (généralement un CCD) et de la méthode de réduction (par exemple l'inspection visuelle, la déconvolution ou la soustraction de la fonction d'étalement du point (en anglais "point spread function" ou PSF)). Chaque instrumentation est caractérisée par une dynamique maximale et un pouvoir de résolution. Ce dernier dépend également des conditions atmosphériques lors des observations (le caractère piqué de l'image d'une source ponctuelle est lié au "seeing" et se mesure par la largeur à mi-hauteur du profil (full width at half maximum, FWHM)). La courbe de la dynamique en fonction de la séparation angulaire délimite la zone du plan $(\Delta\theta, \Delta m)$ dans laquelle les mirages sont détectables. Une telle courbe $\Delta m(\Delta\theta)$ est appelée fonction de sélection angulaire (FSA). Elle est obtenue au moyen de simulations numériques réalisées à partir d'images réellement obtenues avec l'instrumentation en question. Les FSAs relatives aux échantillons employés dans notre étude sont présentées au Chapitre 3, Sections 3.2.10 et 3.3.6.

Seuls les mirages détectables au moyen de la FSA doivent être pris en compte dans le calcul de la probabilité a priori d'observation. Cela revient à diminuer la section efficace d'un certain facteur. De manière tout à fait générale, ce but est atteint au moyen d'une fonction de sélection, S , qui vaut 1 pour les configurations observables en terme de la FSA et 0 pour les autres. Dès lors, la section efficace géométrique doit se réécrire comme suit :

$$\Sigma_{FSA} = b_o^2(z) \int_{S_y} S(\mathbf{y}) dy_1 dy_2 = b_o^2(z) \int_{S_x} \frac{1}{A(\mathbf{x})} S(\mathbf{x}) dx_1 dx_2, \quad (2.86a)$$

et pour les modèles à symétrie circulaire :

$$\Sigma_{FSA} = 2\pi b_o^2(z) \int_{y_-}^{y_+} y S(y) dy = 2\pi b_o^2(z) \int_{x_-}^{x_+} \frac{x S(x)}{A(x)} dx. \quad (2.86b)$$

Remarques :

1. Dans le cas particulier des défecteurs SIS, la fonction S peut être remplacée par une condition supplémentaire faisant intervenir le rapport de flux des images. Celle-ci se traduit alors au niveau des bornes d'intégration.
2. Dans le cas du modèle ponctuel, 2 images sont produites pour tous les paramètres d'impact, et une condition sur le rapport de flux des images est *nécessaire* à la définition de la section efficace (voir Section 4.1.2).

2.3.3 Le biais en amplification

Le flux dans chaque image non résolue du quasar d'arrière-plan est amplifié par rapport au flux intrinsèque (voir Section 2.1.5.2). La somme des flux dans chaque image, A_{tot} , est toujours supérieure au flux que l'on aurait perçu en l'absence du phénomène de lentille (Schneider 1984). Il en résulte un biais, appelé biais en amplification, dont le mécanisme et certaines conséquences ont été présentés dans l'introduction (Section 1.3). Il suffit ici de rappeler que les quasars sont découverts originellement dans des recensements d'objets limités en flux. À n'importe quelle magnitude de sélection, une certaine fraction d'entre eux est intrinsèquement plus faible et est incluse grâce à l'amplification du flux par effet de lentille gravitationnelle. Cette fraction est plus importante pour les quasars brillants lorsque le nombre de quasars en fonction de la magnitude augmente plus vite aux faibles magnitudes. Nous verrons que la recherche a posteriori de lentilles gravitationnelles au sein d'un échantillon de quasars brillants est donc biaisée favorablement.

En outre, tous les points de la section efficace ne sont pas équivalents : le quasar aura tendance à se trouver préférentiellement proche des caustiques, là où l'amplification des images est la plus forte. Pour exprimer ce biais, il faut adapter la formulation de la section efficace géométrique en tenant compte du nombre intrinsèque de quasars à la magnitude b_q par degré carré (et par intervalle de magnitude) $N_q(b_q)$. On obtient la section efficace "effective", Σ_{eff} :

$$\begin{aligned} \Sigma_{eff} &= \frac{b_o^2(z)}{N_q(b_q)} \int_{S_y} N_q(b_q + 2, 5 \log A_{tot}(\mathbf{y})) S(\mathbf{y}) dy_1 dy_2 \quad (2.87a) \\ &= \frac{b_o^2(z)}{N_q(b_q)} \int_{S_x} \frac{N_q(b_q + 2, 5 \log A_{tot}(\mathbf{x}))}{A(\mathbf{x})} S(\mathbf{x}) dx_1 dx_2, \end{aligned}$$

et pour les modèles à symétrie circulaire :

$$\begin{aligned} \Sigma_{eff} &= \frac{2\pi b_o^2(z)}{N_q(b_q)} \int_{y_-}^{y_+} N_q(b_q + 2, 5 \log A_{tot}(y)) y S(y) dy \quad (2.87b) \\ &= \frac{2\pi b_o^2(z)}{N_q(b_q)} \int_{x_-}^{x_+} \frac{N_q(b_q + 2, 5 \log A_{tot}(x)) x S(x)}{A(x)} dx, \end{aligned}$$

où :

$$A_{tot}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n |A_i(\mathbf{x})| = \sum_{i=1}^n |A(\mathbf{x}_i(\mathbf{x}))|. \quad (2.87c)$$

On remarque qu'il est nécessaire de résoudre l'équation de lentille pour obtenir les amplifications individuelles des images qui contribuent à A_{tot} .

Compétition entre le biais en amplification et la réduction du champ

Comme le montre la relation (2.87a) ou la relation (2.87b), l'amplification lumineuse joue simultanément deux rôles antagonistes : d'une part, elle entraîne une dilution du nombre d'objets d'arrière-plan par effet de focalisation (réduction du champ d'un facteur $1/A$) et, d'autre part, elle permet de voir des objets intrinsèquement plus faibles (biais en amplification). Généralement, les objets plus faibles sont plus nombreux, ce qui revient à augmenter la section efficace effective. Si le nombre d'objets augmente suffisamment vite avec la magnitude (pente importante des comptages), le phénomène de biais l'emporte, au point de créer une divergence de Σ_{eff} si la pente est supérieure à une certaine limite (si $\alpha > 0,8$ pour le modèle SIS, avec $N_q(b_q) \propto 10^{\alpha b_q}$). Si, par contre, $\alpha < 0,4$ pour le modèle SIS, la réduction du champ domine et le nombre d'objets d'arrière-plan sera réduit par rapport à une situation de référence sans effet de lentille.

Intégration dans le plan image et probabilité d'amplification

Lorsque le calcul de Σ_{eff} est poursuivi numériquement, l'intégration dans le plan image est préférable, car la présence de $A(x)$ au dénominateur stabilise la fonction à intégrer à l'approche des caustiques. C'est également dans le plan du déflecteur que l'effet microlentille trouve une description naturelle et peut être intégré au formalisme de la section efficace (voir Section 2.4).

Parce que les mirages avec très haute amplification sont rares, une approche encore meilleure en terme de stabilité numérique en présence de caustiques fait appel à la *probabilité* d'observer l'amplification totale A_{tot} , $P_{obs}(A_{tot})$:

$$\Sigma_{eff} = \frac{\Sigma_{geom}}{N_q(b_q)} \int_1^\infty N_q(b_q + 2,5 \log A_{tot}) P_{obs}(A_{tot}) dA_{tot} \triangleq \Sigma_{geom} \text{ Biais}. \quad (2.88)$$

La distribution de probabilité $P_{obs}(A_{tot})$ est calculée au sein d'un modèle de déflecteur donné, à partir de la section efficace géométrique du problème considéré et à partir de la FSA. Suivant les modèles, $P_{obs}(A)$ peut être calculée analytiquement (voir Section 4.1.2) ou doit être estimée au moyen de simulations Monte-Carlo (voir Section 4.2.3). De telles simulations rendent également possible la prise en compte de l'effet de microlentille. Finalement, par définition de Σ_{FSA} , la distribution $P_{obs}(A)$ satisfait la relation de normalisation suivante :

$$\int_1^\infty P_{obs}(A_{tot}) dA_{tot} = \frac{\Sigma_{FSA}}{\Sigma_{geom}}. \quad (2.89)$$

Formulation de la fonction $N_q(b_q)$

C'est ici le lieu d'expliciter l'expression adoptée pour décrire le comptage intrinsèque différentiel des QSOs par unité de surface sur la voûte céleste en fonction de leur flux. La connaissance de cette fonction est une condition *sine qua non* à la détermination du biais en amplification. L'ignorance de $N_q(S)$ dans le domaine radio (où S est le flux) nous prive de la possibilité d'analyser de façon statistique les échantillons de radio-sources dans lesquels ont été découvertes des lentilles gravitationnelles.

Dans le domaine optique, il semble que la fonction $N_q(b_q)$ puisse s'écrire sous la forme d'une loi de puissance, avec une pente plus forte pour les magnitudes bleues b_q inférieures à un seuil b_s ¹⁰ :

$$N_q(b_q) \propto \begin{cases} 10^{\alpha(b_q - b_s)} & \text{si } b_q < b_s \\ 10^{\beta(b_q - b_s)} & \text{si } b_q > b_s \end{cases} \quad (2.90)$$

Par l'ajustement de cette fonction aux comptages observés par Boyle et al. (1988), Narayan (1989) obtient les valeurs $\alpha = 0,86$, $\beta = 0,28$ et $b_s = 19,15$. Ces valeurs sont indépendantes de la tranche de redshift sélectionnée.

Il faut mentionner également l'absence de coude rapportée par Hawkins et Véron (1995, 1996) qui observent, au sein d'un échantillon de QSOs sélectionnés sur base d'un critère de variabilité, un comptage en loi de puissance avec une pente unique $\beta \sim 0,6$, quel que soit l'intervalle de redshift considéré. Si telle est la vraie fonction de comptage, le biais en amplification est constant en fonction de la magnitude du QSO. Une discussion plus approfondie de $N_q(b_q)$ est ajournée à la Section 4.2.4.5.

2.3.4 Expressions des probabilités d'observation

La probabilité d'observer un mirage créé par une galaxie-lentille, dont la luminosité L appartient à $[L, L + dL]$, et qui est située dans l'intervalle de redshift $[z, z + dz]$, est fournie par la relation suivante :

$$P_{LG}(z, L; z_s, b_q, FSA; p_i) dz dL = C_{sel} n(L, z) \frac{dV(z, L; z_s, b_q, FSA; p_i)}{dz} dz dL, \quad (2.91)$$

où :

- C_{sel} est un facteur de correction destiné à compenser le biais de sélection défavorable à l'inclusion de mirages gravitationnels dans les échantillons de HLQs actuels (Kochanek 1991). En effet, les quasars sont souvent sélectionnés en tant qu'objets ponctuels et avec un excès de rayonnement dans le bleu. Les images multiples engendrent une élongation apparente à faible résolution angulaire et la présence de la lentille peut éventuellement rougir le flux ; ces deux effets s'opposent aux critères de sélection des quasars. Kochanek (1991) estime qu'environ 30% des mirages sont manqués de la sorte et qu'une correction de complétude $C_{sel} = 0,7$ s'impose.

¹⁰Seule la pente des comptages intervient dans le calcul du biais en amplification

- $n(L, z)$ est le nombre de défecteurs de luminosité L au redshift z par unité de volume propre; dans le cas des galaxies, s'il n'y a pas d'évolution et si la densité spatiale comobile est constante, on a :

$$n(L, z) = (1 + z)^3 \phi(L) h^3 \text{Mpc}^{-3}, \quad (2.92a)$$

$$\phi(L) = \phi_* \left(\frac{L}{L_*} \right)^\alpha e^{-\frac{L}{L_*}} \frac{1}{L_*}. \quad (2.92b)$$

La forme analytique (2.92b) de la fonction de luminosité locale des galaxies a été introduite par Schechter en 1976. Elle est canonique pour tous les types de galaxies et est connue sous le nom de "distribution de Schechter". Elle possède également une expression plus populaire en fonction de la magnitude absolue M ($L/L_* = e^{0.92(M_* - M)}$):

$$\phi(M) = 0.92 \phi_* e^{(0.92(\alpha+1)(M_* - M) - e^{0.92(M_* - M)})}. \quad (2.92c)$$

L'ensemble des galaxies est bien décrit avec les paramètres suivants : $\alpha = -1,1$; $M_{*,b_j} = -19,4$ ($h = 1$); $\phi_* = 0,0156 \text{Mpc}^{-3}$ ($h = 1$) (Efstathiou et al. 1988).

- La grandeur

$$\frac{dV(z, L; z_s, b_q, FSA; p_i)}{dz} dz dL = \frac{cdt}{dz} \Sigma_{eff}(z, L; z_s, b_q, FSA; p_i) dz dL, \quad (2.93)$$

est l'élément de volume efficace dans lequel la galaxie crée un mirage observable ;

- Les p_i incluent les paramètres du modèle de défecteur approprié et les paramètres physiques définissant les bornes d'intégration de la section efficace dans les relations (2.87a-b) ou la probabilité $P_{obs}(A_{tot})$ dans la relation (2.88);
- la luminosité L intervient dans le calcul de la section efficace, car elle est corrélée à la masse par le biais de la relation empirique de Tully-Fisher (1977) (respectivement Faber-Jackson 1976) pour les spirales (respectivement les elliptiques) :

$$\frac{L}{L_*} = \left(\frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^\gamma, \quad (2.94)$$

avec $\gamma = 2,6$ (respectivement 4).

- Le tronçon de la ligne de visée au redshift z est l'élément de distance-lumière cdt/dz et vaut pour un modèle d'Univers FLRW (voir Annexe A) :

$$\frac{cdt}{dz} = \frac{c}{H_o(1+z)} \frac{1}{\sqrt{(1+z)^3 \Omega_o - (1+z)^2 (\Omega_o + \lambda_o - 1) + \lambda_o}}. \quad (2.95)$$

Comme nous allons le voir, les autres probabilités d'observation résultent de l'intégration sur z et/ou sur L de la relation (2.91).

2.3.4.1 Probabilité en fonction du redshift de la lentille

La probabilité d'observer une lentille située dans l'intervalle de redshift $[z, z + dz]$ vaut :

$$P_{LG}(z; z_s, b_q, FSA; p_i) dz = C_{sel} dz \int_{L_{inf}(z)}^{\infty} n(L, z) \frac{dV(z, L; z_s, b_q, FSA; p_i)}{dz} dL, \quad (2.96)$$

où $L_{inf}(z)$ est la luminosité minimale d'une galaxie située au redshift z pour qu'elle soit détectable, étant donnés la magnitude limite des observations, la correction-K et le modèle cosmologique ; ce paramètre n'a de sens que si la *détection* de la lentille fait partie de la définition du mirage étudié (par exemple pour l'établissement du redshift de la lentille, ou dans le cas des associations QSO-galaxies) ; la distribution de probabilité *intrinsèque* des galaxies en fonction du redshift est obtenue pour $L_{inf} = 0$.

2.3.4.2 Probabilité totale d'observation

La probabilité totale d'observation d'un mirage s'obtient directement en intégrant la relation (2.96) le long de la ligne de visée :

$$\begin{aligned} P_{LG,tot}(z_s, b_q, FSA; p_i) &= \int_0^{z_s} P_{LG}(z; z_s, b_q, FSA; p_i) dz \\ &= C_{sel} \int_0^{z_s} dz \int_{L_{inf}(z)}^{\infty} n(L, z) \frac{cdt}{dz} \Sigma_{eff}(z, L; z_s, b_q, FSA; p_i) dL. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Remarquons au passage que $P_{LG,tot}$ est en fait une profondeur optique. L'égalité entre la probabilité et la profondeur optique n'est licite que lorsque cette dernière est beaucoup plus petite que 1 (c'est le cas en pratique) ; sinon, la statistique de Poisson doit être utilisée.

2.3.4.3 Probabilité de configuration angulaire

Étant donné que l'on observe un mirage, quelle est la probabilité que la séparation angulaire entre les images soit $\Delta\theta$? Cette probabilité, dite de configuration angulaire, dépend bien entendu de la nature du défecteur, et de la fonction de sélection angulaire (FSA) caractéristique des observations.

Lorsque $\Delta\theta$ dépend à la fois de la masse du défecteur et du paramètre d'impact, ni la densité spatiale de défecteurs produisant une telle séparation angulaire, $n(\Delta\theta, z)$, ni le volume efficace associé ne peuvent être estimés analytiquement. La relation générale (2.97) doit alors être utilisée et la section efficace effective de production d'un mirage avec une séparation angulaire $\Delta\theta$ doit être calculée numériquement à chaque pas d'intégration.

Cependant, si le défecteur peut être décrit par un modèle isotherme, la séparation angulaire entre les images est *constante* au premier ordre en fonction du paramètre d'impact. Elle vaut $\Delta\theta \simeq 2\theta_E \simeq 2b_o/D_{OD}$ si le modèle est quasi-singulier, et la relation est exacte pour le modèle SIS. Il est alors plus physique de calculer la probabilité d'observer une lentille avec un rayon d'Einstein θ_E car ce dernier est lié à la dispersion des vitesses σ , qui est elle-même fonction de la luminosité des galaxies (relation de Tully-Fisher). De plus, pour les mirages à 4 images, la séparation angulaire n'est plus univoque, alors que l'ajustement du modèle EIS fournit la valeur de θ_E , qui agit comme un facteur d'échelle (voir Chapitre 4). On cherche donc à calculer la probabilité d'observer le rayon d'Einstein θ_E :

$$P_{conf}(\theta_E; z_s, b_q, FSA; p_i) d\theta_E = \frac{C_{sel} \int_0^{z_s} n(\theta_E, z) \frac{dV(z, \theta_E; z_s, b_q, FSA; p_i)}{dz} dz d\theta_E}{P_{LG, tot}(z_s, b_q, FSA; p_i)}. \quad (2.98)$$

Or, à partir des relations (2.94) et (2.92b), on obtient la distribution des dispersions de vitesses, σ :

$$\phi(\sigma) = \phi_* \left(\frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^{\alpha\gamma} e^{-\left(\frac{\sigma}{\sigma_*}\right)^\gamma} \gamma \frac{\sigma^{\gamma-1}}{\sigma_*^\gamma} d\sigma.$$

Et, puisque par la relation (2.50c) on a

$$(\sigma/\sigma_*)^2 = (\theta_E/\theta_{E,*}), \quad (2.99)$$

il vient finalement :

$$n(\theta_E, z) d\theta_E = (1+z)^3 \frac{\gamma}{2} \phi_* \left(\frac{\theta_E}{\theta_{E,*}(z)} \right)^{(\alpha+1)\gamma/2} e^{-\left(\frac{\theta_E}{\theta_{E,*}(z)}\right)^{\gamma/2}} \frac{d\theta_E}{\theta_E}. \quad (2.100)$$

Pour pouvoir exprimer analytiquement l'intégrand dans la relation (2.98) de $P_{conf}(\theta_E)$, il faut que la FSA soit constante, sinon le calcul de dV/dz doit se faire numériquement (voir le cas du modèle SIS, Section 2.3.5).

2.3.4.4 Évolution des galaxies

En tant qu'objets astrophysiques issus du Big Bang et que systèmes d'étoiles vivantes, les galaxies évoluent au cours du temps cosmique. Le nombre et la complexité des phénomènes physiques mis en jeu ne permettent guère à l'heure actuelle de présenter un scénario précis ; cependant, certains effets de l'évolution des galaxies se marquent sur les images, les comptages et les spectres de plus en plus profonds obtenus à l'aide des techniques observationnelles modernes (voir par exemple l'article de revue récent sur l'histoire des galaxies, par Fukugita et al. 1996).

Dans notre travail, nous nous sommes *abstenus* d'inclure l'évolution dans la modélisation du phénomène de mirage gravitationnel. Les raisons principales sont les suivantes :

1. Les modèles théoriques de formation et d'évolution des galaxies sur des échelles de temps comparables à l'âge de l'Univers sont complexes et dépendent du modèle cosmologique. On est obligé de leur substituer une description paramétrisée *ad hoc*, dont le sens physique des paramètres n'est pas toujours évident ; les résultats risquent de dépendre très fortement du modèle ;
2. L'introduction cohérente de l'évolution implique de nombreux nouveaux paramètres (et partant, de nouvelles sources d'incertitudes) que les données ne permettent pas de contraindre indépendamment ;
3. Une galaxie dont le redshift est compris entre 0,5 et 1 est la plus efficace pour jouer le rôle de lentille gravitationnelle vis-à-vis d'un quasar distant (voir Section 4.2.4.4).

Ainsi donc, c'est dans cet intervalle de redshift que l'on s'attend à trouver la majorité des lentilles. L'évolution à plus haut redshift n'aura statistiquement que peu d'influence sur les propriétés des mirages. Or, l'évolution apparente des galaxies pour $z < 1$ semble être dominée par celle des étoiles qui les constituent : les comptages profonds de galaxies en infra-rouge (bande K) sont sensibles aux étoiles vieilles et ne révèlent pas d'évolution rapide jusqu'au redshift $z \sim 1$ et même au-delà (par exemple Glazebrook et al. 1995). Les flambées d'étoiles qui se marquent dans la bande B n'affectent pas le potentiel gravitationnel d'ensemble (et en outre, elles ont rarement lieu dans les galaxies massives). On notera cependant que cette évolution apparente doit être prise en compte sous la forme de corrections-K évolutives lorsque la *détection* des galaxies est requise (cfr. redshift des galaxies-lentilles (Chapitre 4) et associations QSO-galaxies (Chapitre 5)).

4. Des observations spectroscopiques de galaxies spirales à un redshift $z \sim 1$ à l'aide du télescope Keck de 10m (Vogt et al. 1996) semblent indiquer que la relation de Tully-Fisher est toujours valable, hormis un décalage en luminosité, qui peut être dû à une translation de la fonction de luminosité et qui est sans conséquence sur notre formalisme.
5. Rix et al. (1994) ont montré que le processus de fusion des galaxies au cours du temps cosmique ("merging" en anglais) ne modifie pas la probabilité totale d'observer des images multiples de quasars, mais que leur séparation angulaire moyenne sera plus faible.

2.3.5 Résumé et résultats analytiques pour le modèle SIS

Dans les paragraphes précédents, nous avons dérivé l'expression de la probabilité qu'un quasar de redshift z_s et de magnitude bleue b_q subisse un effet de mirage gravitationnel par une population de déflecteurs distribués cosmologiquement (éq. (2.97)). La formule obtenue est valable à condition que $P_{LG} \ll 1$, c'est-à-dire si la chance d'obtenir un second déflecteur sur la même ligne de visée est négligeable ; c'est le cas en pratique pour les densités cosmologiques observées des galaxies ou des amas de galaxies. Nous avons vu qu'il est nécessaire d'incorporer les effets de sélection instrumentaux et ceux du biais en amplification dans le calcul de la section efficace proprement dite afin d'estimer correctement la probabilité a priori d'observation d'un mirage.

Nous avons signalé au passage que bien que les galaxies évoluent au cours du temps cosmique, cette évolution ne sera pas prise en compte dans ce travail pour les estimations des probabilités, essentiellement en raison du manque de contraintes physiques sur les nombreux nouveaux paramètres qu'elle implique et parce que l'effet attendu n'est pas très important. Il est cependant nécessaire d'inclure l'évolution de la luminosité là où le calcul de la *déteçtabilité* des galaxies l'impose (Chapitres 4 et 5).

Dans ce paragraphe, nous présentons les résultats analytiques qui peuvent être obtenus pour le modèle SIS, lorsque la FSA est soit idéale (c'est-à-dire que tous les mirages sont détectés), soit une constante en fonction de la séparation angulaire. Ces résultats serviront de guides et de termes de comparaison pour les estimations numériques réalisées au sein de modèles plus sophistiqués (Chapitres 4 et 5).

Résultats analytiques

Il est possible d'obtenir une expression entièrement analytique pour la probabilité qu'une galaxie elliptique interposée sur la ligne de visée d'un quasar crée des images multiples observables de ce dernier. Il faut adopter le modèle de lentille SIS, un modèle cosmologique plat ($\Omega_o + \lambda_o = 1$) et il faut que la FSA soit constante en fonction de l'angle θ (sélection en dynamique seulement).

Section efficace effective

Soit R , le rapport de flux maximum détectable entre les composantes du mirage; R est donc par définition le rapport maximum des amplifications des deux images. Grâce à l'équation de la lentille (2.51) et à la fonction (2.54) donnant l'amplification dans le plan du défecteur, on obtient sans peine que le désalignement maximum y_{max} entre la source et la lentille vaut :

$$y_{max} = \frac{R - 1}{R + 1}. \quad (2.101)$$

On remarque que si la dynamique instrumentale est infinie, $y_{max} = 1$ et on retrouve la section efficace géométrique; dans le cas contraire, $y_{max} < 1$. Il est important de noter que y_{max} est *indépendant* du redshift de la lentille, ce qui permet de factoriser la section efficace (voir éq. 2.102a); ce n'est plus le cas lorsque la dynamique instrumentale dépend de la séparation angulaire.

La section efficace effective, Σ_{eff} , est calculée dans le plan source en injectant la distribution observée des QSOs (2.90) et la relation (2.55) donnant l'amplification dans le plan source, dans l'équation (2.87b) où $y_- = 0$ et $y_+ = y_{max}$:

$$\Sigma_{eff}(b_q, z; y_{max}) = \pi b_o^2(z) Biais(b_q; y_{max}) \quad (2.102a)$$

où :

$$Biais(b_q; y_{max}) = \quad (2.102b)$$

$$\begin{cases} 8 \cdot 10^{(0,8-\alpha)(b_q-b_s)} \left(\frac{1}{2-2,5\beta} - \frac{1}{2-2,5\alpha} \right) + \frac{2^{(2,5\alpha+1)}}{2-2,5\alpha} y_{max}^{(2-2,5\alpha)} & \text{si } b_q < b_s - 2,5 \log \frac{2}{y_{max}} \\ \frac{2^{(2,5\beta+1)}}{2-2,5\beta} 10^{(\beta-\alpha)(b_q-b_s)} y_{max}^{(2-2,5\beta)} & \text{si } b_s - 2,5 \log \frac{2}{y_{max}} < b_q < b_s \\ \frac{2^{(2,5\beta+1)}}{2-2,5\beta} y_{max}^{(2-2,5\beta)} & \text{si } b_q > b_s \end{cases}$$

Lorsque $\alpha = 0,8$, on a simplement :

$$Biais(b_q; y_{max}) = 8 \left(\frac{1}{2 - 2,5\beta} + \ln y_{max} - 0,92(b_q - b_s) - \ln 2 \right). \quad (2.102c)$$

Dans le cas particulier où $\alpha = 0,86$ et $\beta = 0,28$ (Narayan 1989), le biais en amplification au sein du modèle SIS vaut :

$$Biais(b_q; y_{max}) = \begin{cases} 59,487 10^{0,06(b_s - b_q)} - 59,177 y_{max}^{-0,15} & \text{si } b_q < b_s - 2,5 \log \frac{2}{y_{max}} \\ 2,499 10^{0,58(b_s - b_q)} y_{max}^{1,3} & \text{si } b_s - 2,5 \log \frac{2}{y_{max}} < b_q < b_s \\ 2,499 y_{max}^{1,3} & \text{si } b_q > b_s \end{cases} \quad (2.102d)$$

Lorsque $y_{max} = 1$, l'équation précédente se ramène à celle du biais en amplification présentée par Fukugita et Turner (1991).

Si la distribution sans coude de Hawkins et Véron est d'application, le biais s'écrit à partir de la dernière relation de l'équation (2.102b) avec $\beta = 0,6$. Il ne dépend plus de la magnitude b_q :

$$Biais_{HV} = 11,314 y_{max}^{1/2}. \quad (2.102e)$$

L'étape suivante consiste à exprimer Σ_{eff} en fonction de la luminosité L . Grâce à la définition (2.50c) de b_o et à la relation de Faber-Jackson (2.94), on obtient :

$$\Sigma_{eff}(z, L, b_q; y_{max}) = 16\pi^3 \left(\frac{\sigma_*}{c}\right)^4 \left(\frac{D_{OD}D_{DS}}{D_{OS}}\right)^2 \left(\frac{L}{L_*}\right)^{4/\gamma} Biais(b_q; y_{max}).$$

Probabilité d'observation

En remplaçant dans l'équation (2.97) Σ_{eff} par l'équation ci-dessus, $n(L, z)$ par les relations (2.92a-b) et en adoptant $L_{inf} = 0$, l'intégrale sur la luminosité produit une fonction Γ , et on obtient :

$$P_{LG,tot}(z_s, b_q; y_{max}) = \quad (2.103a)$$

$$F \left(\frac{H_o}{c}\right)^3 \Gamma(1 + \alpha + 4/\gamma) Biais(b_q; y_{max}) \int_0^{z_s} (1+z)^3 \frac{cdt}{dz} \left(\frac{D_{OD}D_{DS}}{D_{OS}}\right)^2 dz,$$

où :

$$F = \frac{16\pi^3 \phi_* \sigma_*^4}{cH_o^3} \quad (2.103b)$$

est un facteur de normalisation *indépendant* de H_o (car $\phi_* \propto H_o^3$).

Finalement, l'intégration sur z s'effectue sans problème à l'aide des expressions des distances angulaires en fonction du redshift dans le modèle d'Einstein - de Sitter¹¹ (voir Annexe A) et de la relation (2.95). On a :

$$P_{LG,tot}(z_s, b_q; y_{max}) = \frac{4}{15} F \Gamma(1 + \alpha + 4/\gamma) Biais(b_q; y_{max}) \frac{(\sqrt{1+z_s} - 1)^3}{(1+z_s)^{3/2}}. \quad (2.104)$$

¹¹Une solution analytique existe également pour un modèle cosmologique euclidien ($\Omega_o + \lambda_o = 1$), en passant au formalisme des distances propres (éq. (2.106g)).

Probabilité de configuration angulaire

Lorsque la fonction de sélection angulaire est constante et dans un univers plat ($\Omega_o + \lambda_o = 1$), il est possible d'expliciter davantage la relation (2.98) de la distribution des séparations angulaires.

Tout d'abord, grâce à la relation (2.102a), le volume efficace associé à une galaxie dont le rayon d'Einstein est θ_E s'écrit :

$$\frac{dV}{dz} = \frac{cdt}{dz} 16\pi^3 \left(\frac{\sigma_*}{c}\right)^4 \left(\frac{\theta_E}{\theta_{E,*}}\right)^2 \left(\frac{D_{OD}D_{DS}}{D_{OS}}\right)^2 \text{Biais}(b_q, y_{max}).$$

En injectant cette expression de dV/dz ainsi que la formule (2.100) dans la relation (2.98), on obtient la forme explicite de la probabilité de configuration :

$$P_{conf}(\theta_E)d\theta_E = \frac{16\pi^3 \left(\frac{\sigma_*}{c}\right)^4 \phi_* \frac{\gamma}{2} \text{Biais} d\theta_E}{P_{GL,tot} \theta_E} \int_0^{z_s} (1+z)^3 \frac{cdt}{dz} \left(\frac{\theta_E}{\theta_{E,*}(z)}\right)^{(\alpha+1)\gamma/2+2} e^{-\left(\frac{\theta_E}{\theta_{E,*}(z)}\right)^{\gamma/2}} \left(\frac{D_{OD}D_{DS}}{D_{OS}}\right)^2 dz. \quad (2.105)$$

L'étape suivante consiste à changer de variables :

1. Expressions en fonction des *distances propres* (voir Annexe A) :

$$\frac{cdt}{dz} = \frac{1}{1+z} \frac{dD_p}{dz}, \quad (2.106a)$$

$$D_{p,DS} = (1+z_s)D_{DS}. \quad (2.106b)$$

2. Dans un Univers euclidien :

$$D_{p,DS} = D_{p,OS} - D_{p,OD}. \quad (2.106c)$$

3. On pose :

$$\mathcal{D} = D_{p,OD}/D_{p,OS}, \quad (2.106d)$$

$$\theta_E/\theta_{E,*} = \omega \frac{D_{p,OS}}{D_{p,DS}}, \quad (2.106e)$$

$$\omega = \theta_E/(4\pi\sigma_*^2/c^2). \quad (2.106f)$$

4. Enfin, on montre facilement que dans le formalisme des distances propres, et dans le cas d'un Univers plat, $P_{LG,tot}$ s'écrit de la manière suivante (numériquement équivalente à la formulation (2.104)) :

$$P_{LG,tot}(z_s, b_q; y_{max}) = \frac{1}{30} D_{p,OS}^3(z_s) F\Gamma(1 + \alpha + 4/\gamma) \text{Biais}(b_q; y_{max}), \quad (2.106g)$$

où la distance $D_{p,OS}(z_s)$ est ici exprimée en unité de c/H_o .

Après un peu d'algèbre, on obtient la probabilité de configuration normalisée, en fonction de la variable ω :

$$P_{conf}(\omega; \alpha, \gamma) = \frac{15\gamma}{\Gamma(1 + \alpha + 4/\gamma)} \omega^{(\alpha+1)\gamma/2+1} \int_0^1 \frac{\mathcal{D}^2}{(1 - \mathcal{D})^{(\alpha+1)\gamma/2}} e^{-(\frac{\omega}{1-\mathcal{D}})^{\gamma/2}} d\mathcal{D}, \quad (2.107)$$

On remarque avec intérêt que la probabilité de configuration ne dépend ni du redshift, ni de la magnitude de la source, mais essentiellement des paramètres de la fonction de luminosité de Schechter et du paramètre σ_* . L'intégration doit être effectuée numériquement¹².

2.4 Effet de microlentille

2.4.1 Introduction

Étymologiquement, le phénomène de microlentille regroupe l'ensemble des mirages gravitationnels dont la séparation angulaire entre les images est de l'ordre de la microarcseconde. De tels mirages sont produits par des défecteurs situés à des distances cosmologiques et dont la masse est comparable à celle d'une étoile (voir Fig. 1.1). Il est actuellement impossible de résoudre des séparations angulaires aussi petites. C'est le *déplacement* du microdéflecteur relativement à une source ponctuelle (c'est-à-dire dont la taille angulaire est $\lesssim 10^{-6}''$) qui est détectable par la variation qu'il induit sur le flux observé en provenance de la source. Le phénomène de microlentille est donc identifié au moyen de campagnes de surveillance photométrique.

On peut ranger la nature des effets microlentilles en trois grandes classes :

1. Les effets *locaux* produits par des objets sombres et compacts ou des étoiles du halo de notre galaxie sur des étoiles plus distantes (situées par exemple près du centre galactique, ou dans les Nuages de Magellan). Ces effets sont étudiés pour déduire la quantité de matière sombre présente dans le halo de notre galaxie sous forme d'objets compacts par les expériences DUO, EROS, MACHO ou OGLE (voir références dans l'article de revue de Paczyński 1996 et Section 1.1.2).
2. Les effets produits sur une population de quasars par des objets compacts de faibles masses distribués *cosmologiquement* (Schneider 1993).
3. Les effets produits sur les macroimages d'un mirage gravitationnel par les étoiles ou tous les autres objets compacts qui appartiennent à la galaxie lentille. Si une étoile passe sur la ligne de visée d'une des macroimages, cette dernière subit une variation de flux, une (dés)amplification supplémentaire à celle produite par le macrodéflecteur. En outre, parce que la zone d'émission du spectre continu des quasars est plus sensible à l'effet de microlentille que celle où se forme les raies en émission (car la première est nettement plus petite), on peut également détecter le phénomène microlentille par la variation de la largeur équivalente des raies en émission des QSOs. Des

¹²Le changement de variable $(\omega/(1-\mathcal{D}))^2 = u$ permet d'exprimer l'intégrale de la relation (2.107) en terme de "pseudo" fonctions gamma incomplètes (Kochanek 1993a); cependant leur argument est parfois négatif et leurs estimations sont entravées par des instabilités numériques.

campagnes de surveillance (spectro)photométrique de plusieurs lentilles gravitationnelles ont révélé de tels effets (par exemple pour Q0957+561 [Chang & Refsdal 1979], pour Q2237+0305 [Corrigan et al. 1991, Østensen et al. 1996] ou pour la composante D de H1413+117 [Angonin et al. 1990, Hutsemékers 1993, Østensen et al. 1997]).

2.4.2 Influence de l'effet microlentille sur la section efficace effective

Ce sont les effets du troisième type décrit dans la section précédente qui peuvent influencer notre étude statistique du phénomène de mirages gravitationnels dans un échantillon de quasars, car ils modifient les propriétés d'amplification lumineuse des lentilles, et donc le biais en amplification.

Dans cette section, nous montrons de quelle manière le phénomène microlentille doit être incorporé dans le calcul de la section efficace effective.

La probabilité du phénomène microlentille est décrite par la profondeur optique τ_μ et est reliée à la densité surfacique de masse associée aux objets compacts, κ_* . L'amplification lumineuse d'une macroimage ne dépend plus seulement de la macroamplification due à la lentille dans son ensemble (via la densité surfacique de masse κ_c et le cisaillement γ , cfr. éq. 2.27), mais également de la probabilité qu'un effet microlentille produise une (dés)amplification supplémentaire¹³. Dès lors, l'amplification lumineuse résultante d'une image revêt un aspect statistique.

Soit $A_{M\mu}$, l'amplification résultante d'une image produite par le macrodéflecteur et subissant de surcroît un effet microlentille. Les étoiles sont de très bons microdéflecteurs. Leur densité spatiale ou projetée diminue généralement du centre vers le bord de la galaxie. De même, la macroamplification est fonction de la position \mathbf{x} dans le plan de la galaxie (éq. 2.27). La probabilité $P(A_{M\mu}, \mathbf{x})$ d'observer $A_{M\mu}$ est donc fonction de la position \mathbf{x} . La distribution $P(A_{M\mu}, \mathbf{x})$ sera déterminée à la section suivante, en fonction des paramètres κ_c , γ et κ_* . Supposons dans un premier temps qu'elle soit connue. Elle doit obéir aux relations de normalisation suivantes :

$$\int_{A_{M\mu,0}}^{\infty} P(A_{M\mu}, \mathbf{x}) dA_{M\mu} = 1, \quad (2.108a)$$

$$\int_{A_{M\mu,0}}^{\infty} A_{M\mu} P(A_{M\mu}, \mathbf{x}) dA_{M\mu} = \langle A_{M\mu}(\mathbf{x}) \rangle = A_M(\mathbf{x}), \quad (2.108b)$$

où la seconde équation traduit la conservation du flux, et $A_M(\mathbf{x})$ est l'amplification créée par la distribution matérielle globale du macrodéflecteur uniquement (cfr. éq. 2.27); $A_{M\mu,0}$ est l'amplification minimale (voir section suivante).

Le phénomène microlentille étant associé au plan déflecteur, c'est dans ce plan qu'il faut exprimer la section efficace effective. L'équation (2.87a) doit donc être modifiée. Le terme d'amplification au dénominateur reste inchangé, puisqu'il gouverne la réduction du champ de la macrolentille; par contre l'amplification totale A_{tot} est maintenant la somme des amplifications des images individuelles, dont une est affectée d'un effet microlentille. En supposant que l'image $i = 1$ subisse un effet microlentille, nous avons finalement :

¹³Les désamplifications apparaissent lorsque la profondeur optique τ_μ est importante (Wambsganss 1992).

$$\Sigma_{eff} = \frac{b_o^2(z)}{N_q(b_q)} \int_{S_x} \frac{S(\mathbf{x})}{A_M(\mathbf{x})} dx_1 dx_2 \int_{A_{M\mu,0}}^{\infty} P(A_{M\mu}, \mathbf{x}) N_q(b_q + 2, 5 \log A_{tot}(A_{M\mu}, \mathbf{x})) dA_{M\mu}, \quad (2.109a)$$

et pour les modèles à symétrie circulaire :

$$\Sigma_{eff} = \frac{2\pi b_o^2(z)}{N_q(b_q)} \int_{x_-}^{x_+} \frac{xS(x)}{A_M(x)} dx \int_{A_{M\mu,0}}^{\infty} P(A_{M\mu}, x) N_q(b_q + 2, 5 \log A_{tot}(A_{M\mu}, x)) dA_{M\mu}, \quad (2.109b)$$

où :

$$A_{tot}(A_{M\mu}, x) = A_{M\mu}(x) + \sum_{i=2}^n |A_M(x_i(x))|. \quad (2.109c)$$

2.4.3 Recherche de l'expression de la probabilité $P(A_{M\mu}, x)$

La description analytique de la probabilité d'amplification valable pour toute valeur de $A_{M\mu}$ n'est possible que dans des situations idéales, difficilement extrapolables à la réalité (par exemple cas d'un plan isolé d'étoiles : $\gamma = 0$, $\kappa_c = 0$ et $\tau_\mu \ll 1$, Kofman et al. 1997). Schneider (1987b,c) a montré qu'il existe une expression analytique pour $P(A_{M\mu}, x)$, pour les images de sources ponctuelles se formant loin de toute ligne critique du macrodéflecteur et pour le régime des fortes microamplifications. Dans les autres cas, il est nécessaire de recourir à des simulations numériques.

Nous allons montrer dans cette section comment, sous le couvert de certaines hypothèses, on peut déterminer une expression empirique de $P(A_{M\mu}, x)$, à partir de résultats à la fois analytiques et numériques existant pour différents régimes d'amplification. Nous retrouvons l'expression pour $P(A_{M\mu}, x)$ proposée par Narayan en 1989. Les microdéflecteurs sont modélisés par des lentilles de Schwarzschild.

Hypothèse de source ponctuelle

Cette hypothèse n'est valable que si le rayon de la source R_s est beaucoup plus petit que le rayon d'Einstein de la microlentille $R_{E,\mu}$ projeté dans le plan source ; ce dernier est exprimé au sein du modèle ponctuel par :

$$R_s \ll R_{E,\mu} = 0,034 \sqrt{\frac{M}{M_\odot}} \sqrt{\frac{D_{DS} D_{OS}}{D_{OD}}} h^{-1/2} \text{pc},$$

où les distances sont les distances angulaires exprimées en unités de $2c/H_o$.

Le graphique de la Fig. 2.20 présente le rayon d'Einstein projeté dans le plan source ($z_s = 2$; $\Omega_o = 1$, $H_o = 50 \text{ km/s/Mpc}$) d'une microlentille stellaire en fonction du redshift de la galaxie déflectrice. Ce rayon est de l'ordre de 0,02 pc, soit nettement supérieur au rayon de la région d'émission du continu des quasars ($\sim 0,001 \text{ pc}$) ; il est par contre inférieur au rayon de la zone de production des raies en émission ($> 1 \text{ pc}$). L'hypothèse de source ponctuelle est donc

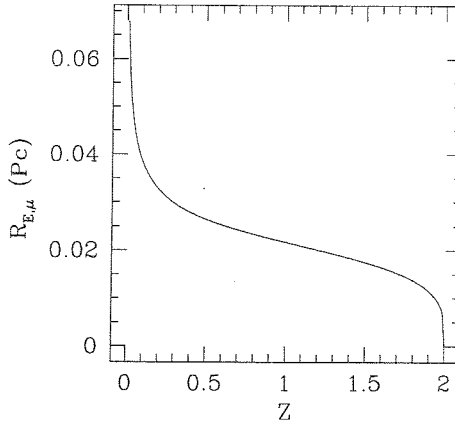


FIG. 2.20: Rayon d'Einstein d'une microlentille stellaire, projeté dans le plan d'un QSO ($z_s = 2$); ($\Omega_o = 1$, $H_o = 50$ km/s/Mpc).

essentiellement valable pour la source du continu spectral des quasars, qui est par conséquent beaucoup plus sensible à l'effet microlentille que les raies en émission¹⁴.

Hypothèse de faible profondeur optique microlentille

Lorsque la profondeur optique associée au phénomène de microlentille est faible, on peut supposer que le faisceau lumineux ne ressent l'influence que d'une seule microlentille, et que les autres ont un effet d'ensemble. Autrement dit, la profondeur optique est faible lorsque les sections efficaces individuelles des microlentilles ne se chevauchent pas. Cependant les faibles effets d'amplification se font sentir à plus grande distance du défecteur et la section efficace augmente pour les petites amplifications; elle diverge pour $A \rightarrow 1$ (voir Section 4.1.2). Tout ceci implique qu'il est plus facile de déterminer le comportement de la probabilité d'amplification pour le régime des fortes amplifications (voir plus loin).

Afin de fixer les idées, nous pouvons déterminer la profondeur optique du phénomène de microlentille dans le cas d'un halo SIS entièrement constitué d'objets compacts hypothétiques. Chaque objet est, quant à lui, décrit par un modèle ponctuel, dont la section efficace géométrique individuelle $\Sigma_{\mu,geom}$ est conventionnellement choisie égale à la surface intérieure au rayon d'Einstein dans le plan défecteur. En utilisant la densité surfacique de masse $\Sigma_{SIS}(b)$ du défecteur SIS (éq. (2.49b)), il vient :

¹⁴Dans le cas où le rayon de la source est nettement supérieur au rayon d'Einstein ($R_s > 5R_{E,\mu}$), Refsdal et Stabell (1991) ont montré que les fluctuations statistiques poissonniennes du nombre d'étoiles interposées devant la source sont responsables de variations détectables du flux en provenance de la source ($\sim 0, 1$ mag. pour $R_s \sim 10R_{E,\mu}$ et $\kappa_* = 0, 5$).

$$\begin{aligned}
\Sigma_{SIS}(b) &= \frac{\sigma^2}{2Gb} \rightarrow n_*(b) = \frac{\sigma^2}{2GMb} \\
\Sigma_{\mu,geom} &= \frac{4\pi GM}{c^2} \frac{D_{DS}D_{OD}}{D_{OS}} \\
\tau_\mu &= n_* \Sigma_{\mu,geom} = \frac{4\pi\sigma^2}{c^2} \frac{D_{DS}D_{OD}}{2bD_{OS}} = \frac{1}{2x},
\end{aligned} \tag{2.110}$$

où n_* est la densité spatiale d'étoiles et où la dernière égalité est obtenue en passant à la variable sans dimension $x = b/b_o$, avec b_o donné par la relation (2.50c).

On remarque donc que la probabilité qu'une macroimage ponctuelle d'un quasar soit affectée d'un effet de microlentille ne dépend pas de la masse des microdéflecteurs, ni du redshift de la galaxie. La profondeur optique du phénomène de microlentille est au maximum de 0,5 pour l'image *principale* du quasar formée par le macrodéflecteur ($x \geq 1$).

L'hypothèse de faible profondeur optique du phénomène microlentille est donc satisfaisante si l'on considère que seule l'image mirage *principale* est affectée d'un effet microlentille. Cette hypothèse supplémentaire peut être justifiée par le fait que les images secondaires formées à plus grande proximité du centre du déflecteur sont toujours désamplifiées par le macrodéflecteur et ne représentent ainsi qu'une faible contribution au flux total fourni par l'ensemble des macroimages. De plus, dans la région de formation des macroimages secondaires, la densité d'étoiles est plus grande et l'épaisseur optique associée au phénomène microlentille également. Des simulations numériques (Wambsganss 1992) montrent que la probabilité de désamplification par effet microlentille augmente fortement avec τ_μ et que les événements de fortes amplifications deviennent plus rares. Cette analyse montre que ce sont les effets microlentilles affectant la macroimage principale qui modifient le plus le flux total perçu en provenance du quasar, et donc le biais en amplification. Dans ce sens, l'hypothèse de faible profondeur optique est acceptable.

2.4.3.1 Comportement asymptotique de $P(A_{M\mu}, x)$ pour $A_{M\mu} \rightarrow \infty$

Qualitativement, on peut montrer que pour des amplifications A suffisamment élevées, la probabilité d'amplification est proportionnelle à $1/A^3$, quel que soit le déflecteur. Le raisonnement se base sur le calcul de la surface du plan déflecteur $S_x(\geq A)$ sur laquelle l'amplification est $\geq A$. Lorsque $A \rightarrow \infty$, les images se forment à proximité et de part et d'autre de la ligne critique. Or, au voisinage de la ligne critique l_c , l'équation (2.22) s'écrit au premier ordre : $A^{-1}(x) = dtm \mathcal{J}|_{l_c} + |\nabla dtm \mathcal{J}|_{l_c} x$. L'amplification de l'image est donc supérieure à A entre un point donné de la ligne critique et le point situé perpendiculairement à la distance $x = 1/(A |\nabla dtm \mathcal{J}|_{l_c})$. L'intégration de cette distance le long de la ligne critique donne lieu à une surface en forme de bande ; une seconde bande se trouve de l'autre côté de la ligne critique et correspond à l'amplification de la seconde image. La surface totale dans le plan image où l'amplification est supérieure à A s'écrit donc :

$$S(\geq A) = 2 \oint_{l_c} x dl = \frac{2C}{A},$$

où C est une constante. Le passage au plan source introduit un nouveau facteur $1/A$ et la différentiation par rapport à A fournit la grandeur cherchée :

$$P(A) dA = \frac{4C}{A^3} dA. \quad (2.111)$$

De manière plus intuitive mais moins générale, on peut montrer que cela est également vrai dans le cas de l'effet microlentille : pour être fortement amplifié, un faisceau infinitésimal doit passer à grande proximité d'une microlentille ; pour une amplification suffisamment grande, la probabilité qu'il passe à proximité d'une seconde microlentille est négligeable, et la première agit comme si elle était seule. La probabilité d'amplification est alors identique à celle obtenue avec le modèle ponctuel, dont on peut vérifier à l'aide de l'équation (2.40) qu'elle est en $1/A^3$ pour $A \rightarrow \infty$ ou $y \rightarrow 0$.

Le mérite de la relation découverte par Schneider (1987b,c) que nous présentons maintenant est de préciser la forme analytique exacte du coefficient de proportionnalité de la relation précédente, en fonction des paramètres κ_c , γ et κ_* et lorsque $A_{M\mu} \gg 1$.

Soit un faisceau infinitésimal passant au travers d'une distribution aléatoire de microlentilles. Le cisaillement du faisceau sortant est la somme des cisaillements aléatoires produits par chacune des microlentilles¹⁵. À partir de la probabilité d'observation du cisaillement du faisceau sortant (déjà présentée par Nityananda & Ostriker (1984)), Schneider obtient pour une source ponctuelle la forme exacte de la probabilité d'amplification A_μ d'une *microimage* située en \boldsymbol{x} (voir détails de calculs, Schneider 1987b,c ou SEF p. 320-330) :

$$P_x(A_\mu, \boldsymbol{x}) dA_\mu = \frac{\kappa_*}{\pi A_\mu^2} \frac{1}{(u-v)\sqrt{u+v}} E \left(\sqrt{\frac{2v}{u+v}} \right) dA_\mu, \quad (2.112a)$$

où E est l'intégrale elliptique complète du 2^{ème} genre et :

$$u(\boldsymbol{x}) = \kappa_*^2 + \gamma^2 + (1 - \kappa_c)^2 - 1/A_\mu, \quad (2.112b)$$

$$v(\boldsymbol{x}) = 2\gamma \sqrt{(1 - \kappa_c)^2 - 1/A_\mu}. \quad (2.112c)$$

κ_* , κ_c et γ sont bien sûr des fonctions de la variable spatiale \boldsymbol{x} . On note que, comme toujours pour le cas d'une source ponctuelle, la masse des microdéflecteurs n'intervient pas.

La dernière étape consiste à calculer l'amplification lumineuse de la *macroimage* d'une source ponctuelle. En toute généralité, la macroimage est constituée d'un nuage de microimages formées par toutes les microlentilles, et il est très difficile d'estimer le flux total produit par l'ensemble de ces microimages. C'est ici qu'intervient l'hypothèse de travail de se restreindre aux hautes amplifications. En effet, dans ce cas, la source dominante du flux dans la macroimage réside dans les 2 microimages fortement amplifiées par une et une seule microlentille. Soit S_x la surface d'un faisceau lumineux infinitésimal dans le plan déflecteur ; la fraction dS_x de ce faisceau qui subit une amplification microlentille A_μ vaut par définition :

$$dS_x = S_x P_x(A_\mu, \boldsymbol{x}) dA_\mu.$$

¹⁵Nityananda & Ostriker (1984) ont montré qu'en raison de la non linéarité de la relation entre le cisaillement et l'amplification (éq. 2.27), la superposition des effets microlentilles par multiplication des amplifications individuelles conduit à sous-estimer l'amplification résultante. L'addition des cisaillements doit donc être utilisée.

Dans le plan source, nous avons par transposition :

$$dS_y = S_y P_y(A_{M\mu}, \mathbf{x}) dA_{M\mu},$$

et nous recherchons $P_y(A_{M\mu}, x) dA_{M\mu}$, la probabilité que le flux de la macroimage soit amplifié d'un facteur $A_{M\mu}$ par rapport à celui de la source. Le résultat est obtenu en prenant le rapport des deux expressions précédentes et en tenant compte des identités suivantes :

$$\begin{cases} S_x = S_y A_M \\ dS_x = dS_y A_\mu \\ A_{M\mu} = 2A_\mu \end{cases} \text{ par hypothèse ,}$$

$$\rightarrow P_y(A_{M\mu}, \mathbf{x}) dA_{M\mu} = P_x(A_{M\mu}/2, \mathbf{x}) \frac{A_M}{A_{M\mu}} dA_{M\mu}.$$

Il vient donc explicitement, en remplaçant P_x par la relation (2.112a), et en omettant l'indice y puisqu'il s'agit en fait de la probabilité d'amplification d'une macroimage et que d'autres macroimages peuvent contribuer à l'amplification totale de la source :

$$P(A_{M\mu}, \mathbf{x}) = \frac{2\tau_\mu(\mathbf{x})}{A_{M\mu}^3} dA_{M\mu}, \quad (2.113a)$$

avec :

$$2\tau_\mu(\mathbf{x}) = A_M \frac{4\kappa_*}{\pi} \frac{1}{(u-v)\sqrt{u+v}} E \left(\sqrt{\frac{2v}{u+v}} \right), \quad (2.113b)$$

où les variables u et v se simplifient lorsque $A_\mu \rightarrow \infty$:

$$u(\mathbf{x}) = \kappa_*^2 + \gamma^2 + (1 - \kappa_c)^2, \quad (2.113c)$$

$$v(\mathbf{x}) = 2\gamma|1 - \kappa_c|. \quad (2.113d)$$

τ_μ est la généralisation de la profondeur optique du phénomène microlentille ; lorsque le déflecteur est constitué simplement d'un plan de microdéflecteurs ($\kappa_c = 0$, $\gamma = 0$ et $\kappa_* \ll 1$), on peut montrer facilement que τ_μ se ramène à la profondeur optique microlentille κ_* , multipliée par A_M , qui est le facteur d'agrandissement entre le plan déflecteur et le plan source (éq. 2.22).

La relation (2.113a) n'est valable que si la macroimage se trouve *loin* de toute ligne critique associée au macrodéflecteur, sans quoi $A_M \rightarrow \infty$. La raison de cette contrainte est assez intuitive. Dans la description du phénomène de microlentille interviennent deux échelles spatiales : l'échelle locale associée aux microdéflecteurs et à leur rayon d'Einstein ($\lesssim 0,1$ pc) et l'échelle globale du potentiel gravitationnel de la galaxie prise dans son ensemble (~ 1 kpc). Les paramètres décrivant ce dernier sont quasiment constants et agissent à la façon d'une perturbation à l'échelle locale du microdéflecteur. Au voisinage d'une ligne critique du macrodéflecteur, la macroimage résultante est formée par des faisceaux lumineux qui ont traversé des parties très différentes du déflecteur et l'approximation locale n'est plus valable.

2.4.3.2 Comportement de $P(A_{M\mu}, x)$ aux faibles amplifications

La section efficace pour avoir une amplification plus grande que $A_{M\mu}$ diverge à mesure que $A_{M\mu}$ tend vers 1. Les sections efficaces associées à des microdéflecteurs voisins se superposent, ce qui détruit l'espoir d'obtenir une relation analytique simple pour les faibles amplifications. Cependant, pour $\kappa_* \ll 1$, chaque étoile agit comme si elle était seule ; les autres étoiles et l'ensemble de la galaxie jouent le rôle d'une perturbation constante : c'est la lentille de Chang-Refsdal (1979, 1984). Schneider & Wagoner (1987) montrent dans l'appendice B de leur article que la probabilité d'amplification pour le modèle de Chang-Refsdal est comparable à celle de la lentille de Schwarzschild et retrouvent le résultat numérique obtenu par Nityananda & Ostriker (1984) que $P(A_{M\mu}) \propto A_{M\mu}^{-3}$ pour les fortes amplifications mais aussi pour les faibles amplifications. Ainsi donc, dans la limite où $\kappa_* \ll 1$, le comportement en $A_{M\mu}^{-3}$ de la probabilité d'amplification est conservé. Le modèle de Chang-Refsdal est une idéalisation et le comportement réel de $P(A)$ est légèrement différent (approche numérique par Wambsganss 1992). Schneider (1987c) estime analytiquement la contribution de la composante "diffuse" au flux, c'est-à-dire la contribution de l'ensemble des microimages secondaires produites par les microlentilles au flux total de la macroimage. Cette contribution modifie la probabilité d'amplification dans le régime des faibles amplifications, mais un nouveau paramètre est nécessaire pour raccorder les régimes des hautes et des faibles amplifications. Cependant, le profil exact de $P(A_{M\mu}, x)$ n'importe pas aux faibles amplifications puisque celles-ci ont peu de poids dans le calcul du biais en amplification.

Dans un souci de simplicité, nous conserverons la dépendance de $P(A_{M\mu}, x)$ en $1/A_{M\mu}^3$ même pour les faibles amplifications, en sachant que cette approximation n'est valable que dans le cas d'une source ponctuelle dont la macroimage se forme loin des lignes critiques du macrodéflecteur, et lorsque $\kappa_* \ll 1$.

2.4.3.3 Probabilité d'amplification près d'une ligne critique du macrodéflecteur

Lorsque $\kappa(x) \pm \gamma(x) = 1$ (avec $\kappa = \kappa_c + \kappa_*$), on se trouve sur une ligne critique du macrodéflecteur et l'amplification A_M est infinie (éq. 2.27). À l'aide de simulations numériques, on remarque qu'à l'approche d'une ligne critique, la distribution de $A_{M\mu}$ tend vers une gaussienne, centrée sur la valeur de A_M (Wambsganss 1992). Intuitivement, on peut comprendre que l'effet microlentille a de moins en moins de chances de produire une modification relative importante de l'amplification lorsque A_M tend vers l'infini.

2.4.3.4 Expression empirique de $P(A_{M\mu}, x)$

Pour une source ponctuelle, et lorsque la profondeur optique du phénomène de microlentille est faible, $P(A_{M\mu}, x)$ se comporte soit en $\sim 1/A_{M\mu}^3$ loin des lignes critiques du macrodéflecteur, soit de manière gaussienne à proximité de ces dernières. Ces deux comportements sont combinés de façon approximative au moyen de la distribution d'amplification empirique suivante :

$$\begin{cases} P(A_{M\mu}, x) = \frac{2\tau_\mu(x)}{A_{M\mu}^3} + C(x)\delta(A_{M\mu} - A_M) & \text{si } A_{M\mu} > A_{M\mu,0} \\ P(A_{M\mu}, x) = 0 & \text{si } A_{M\mu} \leq A_{M\mu,0} \end{cases} \quad (2.114)$$

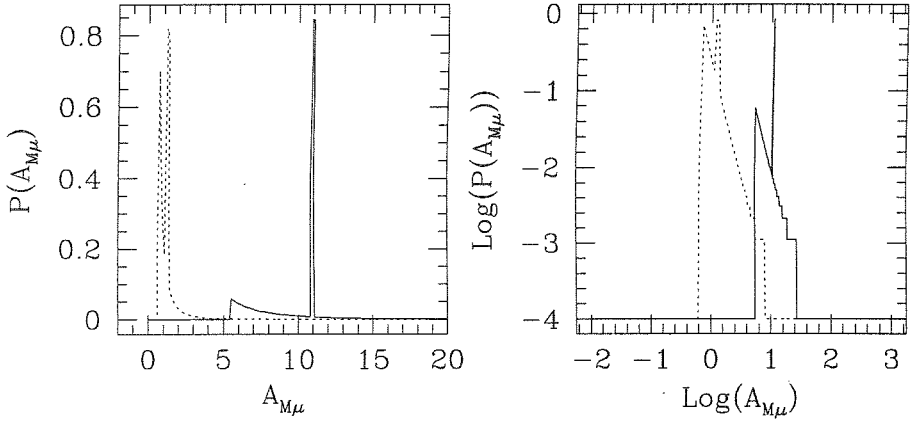


FIG. 2.21: Probabilité empirique d'amplification $P(A_{M\mu}, x)$ d'une macroimage avec effet de microlentille. La distribution des microlentilles est donnée par le modèle SIS. À gauche : unités linéaires ; à droite : unités logarithmiques. En pointillé : $x = 5$; en trait plein : $x = 1, 1$

La grandeur $C(x)$ et l'amplification minimale $A_{M\mu,0}$ sont calculées de manière à ce que $P(A_{M\mu}, x)$ satisfasse les relations de normalisation et de conservation du flux (éqs. 2.108a-b). On obtient finalement :

$$\begin{cases} P(A_{M\mu}, x) = \frac{2\tau_\mu(x)}{A_{M\mu}^3} + (1 - \frac{4\tau_\mu(x)}{A_M^2})\delta(A_{M\mu} - A_M) & \text{si } A_{M\mu} > A_M/2 \\ P(A_{M\mu}, x) = 0 & \text{si } A_{M\mu} \leq A_M/2 \end{cases}, \quad (2.115)$$

où $2\tau_\mu$ est donné par la formule (2.113b).

La Fig. 2.21 illustre la forme de $P(A_{M\mu}, x)$ pour $x = 1, 1$ et pour $x = 5$ dans le cas d'un modèle SIS dont toute la matière est distribuée sous forme d'objets compacts. Le graphique de droite est en unité logarithmique : il montre l'importance relative accrue du pic δ lorsque $x = 1, 1$, c'est-à-dire lorsque l'on se trouve à proximité d'une ligne critique du macrodéflecteur.

La probabilité d'amplification (2.115) a été proposée par Narayan (1989) dans le cadre d'une étude sur l'influence du biais en amplification dans les associations QSO-galaxies, sur laquelle nous reviendrons au Chapitre 5.

Outre les hypothèses limitant l'emploi de la relation empirique (2.115), celle-ci a l'inconvénient de prévoir l'existence possible de désamplifications pour certaines valeurs de A_M , ce qui n'est pas physique dans le cas d'une lentille mince et transparente (faible profondeur optique) (Schneider 1984). Schneider (1989) propose une forme de $P(A_{M\mu}, x)$ comparable en tout point à l'équation (2.114), sauf qu'elle est normalisée d'office sur l'intervalle $[1, \infty[$. C'est alors la position du pic δ qui se déplace de manière non physique en fonction de A_M . Quantitativement, les deux approches donnent des résultats comparables du point de vue du biais en amplification.

2.4.4 Résumé

Les galaxies-lentilles, qui créent des images multiples d'une source ponctuelle d'arrière-plan alignée avec l'observateur, sont constituées d'étoiles et peut-être d'objets compacts sombres. Lorsqu'une de ces étoiles ou un de ces objets compacts passe devant la ligne de visée d'une des macroimages, celle-ci est subdivisée en 2 ou plusieurs sub-images dont la séparation angulaire est de l'ordre de la microarcseconde. C'est le phénomène de microlentille. Il entraîne une (dés)amplification supplémentaire de la macroimage, dont il faut tenir compte dans le biais en amplification.

Dans cette section, nous avons tout d'abord montré comment une probabilité d'amplification doit être insérée dans le formalisme de la section efficace effective (voir éq. (2.109a)), en supposant que seule l'image principale du mirage est affectée par le phénomène de microlentille. Ensuite, nous avons tenté de découvrir l'expression de cette probabilité d'amplification, $P(A_{M\mu}, x)$. Il n'existe malheureusement pas de forme analytique générale, aussi avons-nous recherché une forme empirique, qui combine certains résultats analytiques et numériques.

Le résultat obtenu pour l'expression de $P(A_{M\mu}, x)$ (éq. (2.115)) englobe :

1. le comportement analytique exact en $1/A_{M\mu}^3$ pour le régime des hautes amplifications et à grande distance des lignes critiques du macrodéflecteur (Schneider 1987b,c) ;
2. le comportement analytique approximatif également en $1/A_{M\mu}^3$ pour le régime des faibles amplifications (Nityananda & Ostriker 1984, Schneider & Wagoner 1987) ;
3. le comportement gaussien visible numériquement au voisinage des lignes critiques (Wambsgans 1992).

La relation empirique trouvée est identique à celle présentée par Narayan (1989). Elle est valable pour des sources *ponctuelles* et pour une *faible* profondeur optique du phénomène microlentille. Nous avons montré que ces hypothèses sont approximativement vérifiées pour les images de quasars formées à l'extérieur de la ligne critique du macrodéflecteur.

L'influence de l'effet microlentille sur le phénomène d'associations entre des quasars et des galaxies d'avant-plan sera étudiée au Chapitre 5. C'est en effet pour des images formées loin de la ligne critique que la contribution relative du phénomène de microlentille à l'amplification totale de la macroimage est importante.