

# Annexe A

## Distances dans un Univers homogène et isotrope

*Le ciel est effrayant de transparence  
Le regard va si loin qu'il ne peut plus  
vous revenir.*

J. Supervielle, extrait de "Table"

### A.1 Introduction

Le concept de distance en astrophysique extragalactique est complexe car il dépend du contexte physique dans lequel il est utilisé. Que signifient distance comobile, distance propre, distance angulaire, distance lumière, ou distance luminosité ?

L'objectif de cette Annexe est de constituer, en matière de calcul des distances extragalactiques, le "chaînon manquant" entre les relations de la cosmologie théorique et les formules pragmatiques utilisées quotidiennement dans les études observationnelles. Hormis pour la dernière section, seules les notions fondamentales de la représentation de l'espace-temps en Relativité Générale sont nécessaires (voir par exemple Schutz 1985). La Section A.2 rappelle la définition et le formalisme sous-jacent à la métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) et introduit les différents concepts de distance. Ensuite, la Section A.3 progresse des équations du champ d'Einstein à l'Équation de Lemaître qui décrit le comportement temporel du facteur d'échelle de l'Univers en fonction du temps. Cette équation est ensuite exprimée en fonction du redshift et des paramètres cosmologiques dans la Section A.4, où les formules analytiques pour les différents types de distance sont présentées. Le calcul des distances angulaires dans les modèles "inhomogènes" est discuté à la Section A.5. Quelques graphiques permettent de comparer les différentes distances en fonction du redshift à la Section A.6. La dernière Section traite le transport d'un faisceau lumineux en Relativité Générale, dans le but d'établir rigoureusement l'équation différentielle à laquelle obéit la distance angulaire. Cette section n'est pas indispensable à la compréhension de ce qui précède ; elle requiert une connaissance plus approfondie du formalisme de la Relativité Générale.

## A.2 Concepts de distance dans un Univers homogène isotrope

### A.2.1 La métrique FLRW

La métrique décrit les propriétés géométriques génériques de l'espace-temps, en fonction d'hypothèses de symétrie sous-jacentes au problème physique posé. Elle permet de définir l'élément de distance  $ds^2$  dans l'espace-temps à 4 dimensions. Par définition, on a :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta,$$

où les indices grecs<sup>1</sup>  $\alpha, \beta$  décrivent les 4 dimensions de l'espace-temps,  $dx^\alpha$  est la composante  $\alpha$  de la forme différentielle  $dx$  et  $g_{\alpha\beta}$  est appelé le *tenseur métrique*. Ses composantes constituent les coefficients de la métrique. Du point de vue opératoire, le tenseur métrique est l'opérateur *produit scalaire généralisé* (sur un espace riemannien) entre deux vecteurs.

Par convention, l'élément de distance spatio-temporelle  $ds^2$  a la dimension d'une distance (spatiale) au carré. Ainsi donc, pour combiner la partie spatiale et la partie temporelle de la métrique, les composantes de  $g_{\alpha\beta}$  doivent avoir des dimensions différentes. Ainsi,  $g_{00} (= -c^2)$  possède la dimension du carré d'une vitesse. Quant aux  $g_{ij}$ , leur dimension dépend du choix des coordonnées spatiales (par exemple, en coordonnées sphériques  $[g_{\theta\theta}] = L^2$ ).

Le calcul des coefficients de la métrique est un problème découplé de celui de la résolution proprement dite des équations du champ ; il doit cependant incorporer tous les éléments de symétrie du problème que l'on se pose.

Dans notre cas, les  $g_{\alpha\beta}$  découlent uniquement du *Principe Cosmologique*, à savoir, qu'à tout instant l'Univers est *homogène et isotrope*. Il en résulte qu'à un instant donné, l'Univers apparaît identique à tout observateur lié au référentiel comobile (système de coordonnées attaché au fluide cosmologique au repos). Par définition, la métrique doit aussi être telle que les particules libres suivent des géodésiques de l'espace-temps. On peut montrer (voir par exemple le cours de cosmologie de J. Demaret, p20) que dans les coordonnées comobiles, la métrique doit s'écrire (forme de Robertson) :

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + R^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right). \quad (\text{A.1a})$$

Donc, le tenseur métrique s'écrit :

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R^2 r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1b})$$

où  $t$  est le temps cosmique. Les coordonnées comobiles  $r, \theta, \phi$  peuvent être choisies sans dimension. Dans ce cas,  $R(t)$  est le rayon de l'Univers et porte alors la dimension d'une distance ; sa dépendance fonctionnelle avec le temps est fixée par la *dynamique* de l'Univers,

<sup>1</sup>Par convention, les indices latins courent de 1 à 3 et décrivent uniquement les dimensions spatiales.

c'est-à-dire par les équations du champ d'Einstein.  $k$  est une constante qui vaut 0, +1 ou -1. Lorsque l'on décide de faire porter la dimension spatiale par la coordonnée radiale  $r$ ,  $R(t)$  est sans dimension : il est alors appelé "facteur d'échelle de l'Univers" (formalisme de Peebles).

La métrique spatiale comobile (indépendante du temps) s'exprime par :

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (\text{A.1c})$$

Le coefficient métrique associé à la coordonnée radiale dépend de  $k$ , tandis que la composante angulaire de la métrique est celle d'un espace euclidien. On peut échanger cette dépendance vis-à-vis de  $k$ , à l'aide d'une nouvelle coordonnée comobile radiale,  $\chi$ , satisfaisant le changement de variable "paramétrique" suivant :

$$\frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \rightarrow d\chi \Leftrightarrow r = \begin{cases} \chi & \text{si } k = 0 \\ \sin \chi & \text{si } k = 1 \\ \sinh \chi & \text{si } k = -1 \end{cases}. \quad (\text{A.2})$$

La métrique (A.1a) prend alors la forme suivante :

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + R^2(t)(d\chi^2 + f^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)), \quad (\text{A.3a})$$

avec :

$$\begin{cases} f(\chi) = \sin \chi & \text{si } k = 1 \\ f(\chi) = \chi & \text{si } k = 0 \\ f(\chi) = \sinh \chi & \text{si } k = -1 \end{cases}. \quad (\text{A.3b})$$

La métrique spatiale comobile s'écrit alors :

$$dl^2 = d\chi^2 + f^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (\text{A.3c})$$

La coordonnée  $\chi$  joue le rôle d'un angle. Il apparaît clairement par les formules (A.3a) que, selon que  $k$  vaut 0, +1 ou -1, la géométrie de l'Univers est euclidienne, sphérique ou hyperbolique.

Quoique la métrique ne soit totalement précisée qu'avec la résolution des équations du champ donnant  $R(t)$  (voir Section A.3), son expression permet déjà de définir les différents concepts de distance et de prédire le phénomène de redshift.

## A.2.2 Distances coordonnées

### A.2.2.1 Distance comobile radiale

Supposons un observateur situé à l'origine du référentiel de coordonnées comobiles. Pour cet observateur, la distance comobile (radiale)  $D_c$  d'un point dont les coordonnées sphériques

sont  $(r, 0, 0)$  est obtenue en intégrant la partie spatiale de la métrique FLRW réduite à sa composante radiale (voir éq. (A.1c)) :

$$D_c(r) = \int_0^r dl = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} = \begin{cases} r & \text{si } k = 0 \\ \arcsin r & \text{si } k = 1 \\ \operatorname{arcsinh} r & \text{si } k = -1 \end{cases} = \chi(r), \quad (\text{A.4})$$

où la dernière égalité est assurée par la relation (A.2). La distance comobile radiale d'un point de coordonnées  $(r, 0, 0)$  ne vaut  $r$  que dans le cas d'un Univers euclidien ( $k = 0$ ). La coordonnée comobile radiale  $\chi$  est *équivalente* à la distance comobile du point situé en  $(r, 0, 0)$  ; par la suite nous utiliserons souvent  $\chi$  pour désigner la distance comobile. Par construction, cette distance est *constante* au cours du temps.

Si cette notion de distance paraît peu maniable en pratique, elle est cependant la grandeur clé en matière de géométrie spatiale de l'Univers. Elle fixe de façon intrinsèque et indépendante de l'expansion la distance entre 2 points. Elle est notamment utilisée dans les problèmes de calcul des horizons cosmologiques.

### A.2.2.2 Composition des distances comobiles

La détermination de la distance entre 2 points quelconques de l'espace est cruciale dans toutes les études du phénomène d'amas et des structures à grande échelle. Puisque ce type de distance est une propriété intrinsèque du système physique étudié, il faut utiliser la distance *comobile*.

Ainsi donc, à partir des distances comobiles  $\chi_1$  et  $\chi_2$  entre l'observateur  $O$  et 2 objets  $Q_1$  et  $Q_2$  séparés sur la voûte céleste d'un angle  $\theta$  quelconque, nous voulons déterminer la distance comobile  $\chi_{12}$  entre ces 2 objets (il peut s'agir par exemple de la distance entre deux quasars) (voir Fig. A.1). Le lecteur trouvera à la Section 3.3.2 les formules explicites de  $\chi$  en fonction de  $z$  (éqs. (A.57) - (A.64)).

La relation  $\chi_{12}(\chi_1, \chi_2, \theta)$  s'obtient aisément à partir de l'expression (A.3c) de la métrique spatiale. En effet, cette dernière montre que l'espace à 3 dimensions à temps constant peut être immergé dans un espace euclidien à 4 dimensions, dont il définit une hypersurface sphérique si  $k = 1$ , hyperbolique si  $k = -1$  ou plane si  $k = 0$ . Ainsi donc, les distances  $\chi_1$ ,  $\chi_2$  et  $\chi_{12}$  définissent respectivement un triangle sphérique, hyperbolique, ou plat. De là découle la loi de composition des distances comobiles. Nous montrons dans la suite comment l'on parvient à cette conclusion pour les 3 géométries de l'Univers.

#### Univers fermé : $k = 1$

L'élément de distance de la métrique spatiale (A.3c) correspond à un élément de distance sur la surface d'une hypersphère, en coordonnées sphériques généralisées, où  $\chi$  joue le rôle d'un angle. En effet, en coordonnées cartésiennes, on peut exprimer l'élément de longueur (A.3c) par  $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2$ , où :

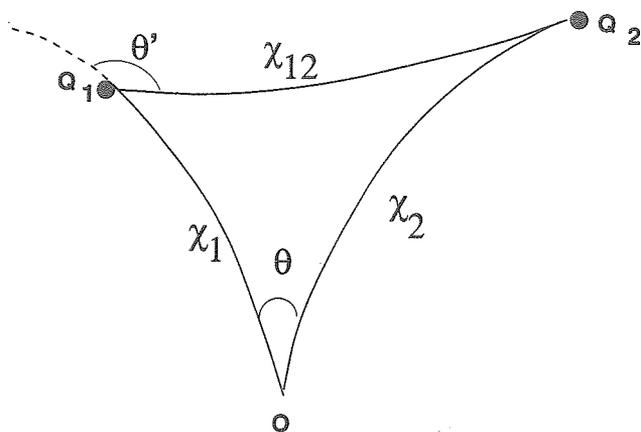


FIG. A.1: Composition des distances comobiles.

$$\begin{cases} x = R \sin \chi \sin \theta \cos \phi \\ y = R \sin \chi \sin \theta \sin \phi \\ z = R \sin \chi \cos \theta \\ w = R \cos \chi \end{cases}$$

Il s'agit bien de coordonnées sphériques généralisées puisque  $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2$ .  $R$  est le rayon de cette hypersphère ; il peut être choisi égal à 1 : il est constant et n'intervient pas dans la suite.

Le système de référence attaché au point  $O$  peut être orienté de telle sorte que  $Q_1$  se trouve dans la direction "radiale" :  $(R, \chi_1, \theta_1, \phi_1) = (1, \chi_1, 0, 0)$ , et donc  $(x_1, y_1, z_1, w_1) = (0, 0, \sin \chi_1, \cos \chi_1)$ . Dans le système de référence attaché à  $Q_1$ , la position de  $Q_1$  est évidemment  $(x'_1, y'_1, z'_1, w'_1) = (0, 0, 0, 1)$ . Connaissant les coordonnées de  $Q_1$  dans les deux référentiels, on obtient aisément la matrice de transformation d'un système de coordonnées à l'autre. Il s'agit d'une "rotation" d'angle  $\chi_1$  :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \cos \chi_1 & -\sin \chi_1 \\ & & \sin \chi_1 & \cos \chi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

Ainsi donc, en exprimant la transformation de la coordonnée  $w$  du quasar  $Q_2$  :

$$w'_2 = \sin \chi_1 z_2 + \cos \chi_1 w_2$$

en coordonnées sphériques, la loi de composition des distances pour un Univers fermé s'écrit :

$$\cos \chi_{12} = \cos \chi_1 \cos \chi_2 + \sin \chi_1 \sin \chi_2 \cos \theta. \quad (\text{A.5})$$

Cette dernière expression est la relation des angles d'un triangle sphérique.

Univers ouvert :  $k = -1$

Par le même raisonnement que dans le cas d'un Univers fermé, on obtient dans les coordonnées "hyperboliques généralisées" qui décrivent pour  $R = cste$  la surface hyperbolique correspondant à  $dl^2$  :

$$\begin{cases} x = R \sinh \chi \sin \theta \cos \phi \\ y = R \sinh \chi \sin \theta \sin \phi \\ z = R \sinh \chi \cos \theta \\ w = R \cosh \chi \end{cases},$$

la transformation de coordonnées nécessaire pour passer du référentiel attaché à  $O$  à celui attaché à  $Q_1$  :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \cosh \chi_1 & -\sinh \chi_1 \\ & & -\sinh \chi_1 & \cosh \chi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}.$$

De même, en exprimant la transformation de la coordonnée  $w$  du quasar  $Q_2$  :

$$w'_2 = -\sinh \chi_1 z_2 + \cosh \chi_1 w_2$$

en coordonnées hyperboliques, la loi de composition des distances pour un Univers ouvert s'écrit :

$$\cosh \chi_{12} = \cosh \chi_1 \cosh \chi_2 - \sinh \chi_1 \sinh \chi_2 \cos \theta. \quad (\text{A.6})$$

Univers plat :  $k=0$

Dans ce cas, la métrique décrit un espace plat plongé dans un espace euclidien à 4 dimensions en coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} x = \chi \sin \theta \cos \phi \\ y = \chi \sin \theta \sin \phi \\ z = \chi \cos \theta \\ w = Cste \end{cases},$$

Bien que le résultat soit trivial, on peut poursuivre la même procédure que dans les autres cas. La transformation de coordonnées correspond cette fois à une translation du référentiel de  $O$  à  $Q_1$  (= rotation avec rayon de courbure infini) :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\chi_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La transformation identité des coordonnées  $x$  et  $y$  de  $Q_2$  dans les 2 référentiels fournit :

$$\begin{cases} \phi' = \phi \\ \frac{\sin \theta'}{\sin \theta} = \frac{\chi_1}{\chi_{12}} \end{cases} .$$

Grâce à ces relations, on peut finalement écrire le carré de la loi de transformation de la coordonnée  $z$  de  $Q_2$  en coordonnées sphériques, pour obtenir la loi de composition des distances comobiles dans un Univers Euclidien :

$$\chi_{12}^2 = \chi_1^2 + \chi_2^2 - 2\chi_1\chi_2 \cos \theta. \quad (\text{A.7})$$

La dernière équation est en fait la loi de Pythagore pour les triangles irréguliers en géométrie euclidienne.

### A.2.2.3 Distance propre radiale

La distance propre  $D_p$  est la distance physique entre 2 points de l'espace ; elle est mesurable avec une règle à un instant donné.

La distance propre radiale entre un observateur situé en  $(0, 0, 0)$  et un point de coordonnées  $(r, 0, 0)$  s'obtient de la même manière que la distance comobile, mais en conservant le facteur  $R^2(t)$  devant l'expression de la métrique spatiale  $dl^2$  (éq. (A.1c)). Il vient :

$$D_p(r, t) = R(t) \int_0^r dl = R(t) \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} = R(t)\chi(r). \quad (\text{A.8})$$

Bien que cette distance ait un sens physique, elle n'est pas accessible à la mesure car celle-ci devrait se faire instantanément ; elle est très rarement utilisée en pratique.

### A.2.3 Distance lumière

La distance entre 2 points de l'espace peut aussi être définie par la distance parcourue par la lumière pour les joindre. Cette distance est équivalente au temps de voyage (ou *look-back time* en anglais) mis par la lumière pour joindre les deux points de l'espace ; une unité naturelle pour la décrire est l'*Année-Lumière*. Dans un Univers en expansion, cette distance ne coïncide pas avec la distance propre (ou physique) entre les objets, puisque celle-ci varie continûment pendant le voyage de la lumière. Le concept de la distance lumière est plus proche de la pratique de la mesure, puisque nécessairement, un objet est détecté par son rayonnement lumineux.

Si  $\Delta\chi$  est la distance comobile séparant les deux points de l'espace, la distance lumière,  $D_l$ , qui dépend de l'instant d'émission  $t_1$ , satisfait la relation suivante (car nécessairement, la lumière suit une trajectoire spatio-temporelle de longueur nulle :  $ds^2 = 0$  dans (A.3a)) :

$$\Delta\chi = \int_{t_1}^{t_1 + D_l/c} \frac{cdt}{R(t)}. \quad (\text{A.9})$$

En pratique, les coordonnées comobiles ne sont pas accessibles. Par contre, une donnée supplémentaire nous vient de l'observation du *redshift* de la lumière.

## A.2.4 Redshift

Le redshift, ou décalage vers le rouge de la lumière, s'observe dans le spectre de tous les objets lointains. Il est dû à l'expansion de l'Univers et à la vitesse relative entre les objets qui en résulte.

La distance comobile  $\chi$  entre nous et une galaxie donnée est constante au cours du temps. Cependant, suite à l'expansion, deux photons successifs émis par cette galaxie devront parcourir des distances lumière ("infinitésimalement") différentes. Le second photon aura une distance plus longue à parcourir si l'Univers se dilate. Il va donc prendre du retard sur le premier et être reçu par l'observateur terrestre avec un décalage temporel plus grand que celui les séparant à leur émission. Comme la cadence de réception des photons est liée à l'intensité du rayonnement, l'objet apparaît moins lumineux à l'observateur qu'il ne l'est en réalité. Donc, puisque :

$$\chi = \int_{t_e}^{t_o} \frac{cdt}{R(t)} = \int_{t_e+dt_e}^{t_o+dt_o} \frac{cdt}{R(t)},$$

la relation entre la différence de temps à l'émission et la différence de temps à la réception des 2 photons s'écrit simplement (si  $R(t)$  varie très peu pendant  $dt_e$ ) :

$$\frac{dt_o}{dt_e} = \frac{R(t_o)}{R(t_e)}. \quad (\text{A.10})$$

Si l'on considère maintenant que  $dt_e$  n'est plus le temps séparant l'émission de deux photons mais celui correspondant à la *période* du rayonnement émis, le phénomène décrit précédemment est responsable de l'allongement apparent de cette période, c'est-à-dire du rougissement du photon. En définissant le redshift  $z$  par  $\lambda_{obs}/\lambda_{em} = 1 + z$ , il vient simplement :

$$\frac{R_o}{R(t_e)} = 1 + z, \quad (\text{A.11})$$

où  $R_o = R(t_o)$ . Ainsi donc, la connaissance de  $R(t)$  permettra de déterminer grâce à l'équation (A.11) l'instant d'émission  $t_e$  d'un rayonnement de redshift  $z$ . La connaissance relative de  $R(t)$ , c'est-à-dire à un facteur multiplicatif près, fournit une valeur de  $t_e$  relative à l'âge actuel de l'Univers,  $t_o$ . Pour connaître le temps de voyage absolu de la lumière, et donc la distance lumière parcourue (ou la longueur de la ligne de visée), il faut déterminer ce facteur multiplicatif : il s'agit de la constante de Hubble, qui fixe le taux de croissance actuel de  $R(t)$  et donc l'échelle spatiale des distances (cfr. Section A.4).

### Composition des redshifts

Quel est le redshift  $z_{12}$  de l'objet  $O_2$ , tel que vu depuis l'objet  $O_1$ , si les redshifts de ces 2 objets vus par un observateur terrestre sont  $z_2$  et  $z_1$  respectivement ( $z_2 > z_1$ ) ? Grâce à la relation (A.11), on obtient une loi de combinaison multiplicative :

$$1 + z_{12} = \frac{1 + z_2}{1 + z_1}. \quad (\text{A.12})$$

## A.2.5 Distances déduites à partir de propriétés astrophysiques

Une troisième façon de déterminer la distance d'un objet astrophysique est d'utiliser une propriété physique intrinsèque de celui-ci. Ainsi, par exemple, si la taille propre d'une galaxie est connue à l'avance, on peut déduire sa distance à partir de sa taille apparente sur le ciel. La distance ainsi obtenue *n'est pas* la distance propre de la galaxie au moment de l'observation, ni la distance parcourue par lumière pour nous atteindre. On l'appelle la distance angulaire. Un second exemple est la distance d'un objet que l'on extrait de la relation entre sa luminosité intrinsèque, supposée connue, et sa luminosité apparente. À nouveau, cette distance, appelée distance *luminosité*, sera numériquement différente des autres distances ! Cela est dû au fait que les lois géométriques valables dans un Univers euclidien statique doivent être corrigées pour tenir compte de l'expansion de l'espace. Les corrections sont en fait incluses dans les définitions des différentes distances de manière à pouvoir écrire les relations géométriques familières de l'espace euclidien dans un espace FLRW.

Il est important de noter que le concept de distance angulaire (ou celui de distance luminosité) ne repose plus uniquement sur le déplacement d'un photon dans un espace courbe (cas de la distance lumière), mais sur le transport d'un *faisceau* lumineux dans un tel espace. A priori, le problème géométrique est tout autre. De manière rigoureuse, ce problème passe par l'étude de la modification de la section d'un faisceau lumineux en Relativité Générale, suite à sa propagation dans un espace courbe. Cependant, les Univers FLRW sont suffisamment simples pour pouvoir inférer intuitivement les expressions génériques de la distance angulaire et de la distance luminosité, à partir de la métrique seule. En effet, l'expansion d'un Univers FLRW ne produit pas de cisaillement sur un faisceau lumineux, mais uniquement de la convergence, car la métrique est diagonale. Par conséquent, le faisceau est totalement décrit par *deux rayons* lumineux appartenant à son enveloppe.

Dans cette section, nous nous bornons à tirer les renseignements que nous offre la métrique FLRW, sans faire appel à la résolution des équations d'Einstein. Nous verrons également les relations entre la distance angulaire et la distance luminosité, parfois appelées *relations de réciprocité* ou *relations d'Etherington* (Etherington 1933).

### A.2.5.1 Distance angulaire

#### i) Définition

Un objet astrophysique est défini comme un objet lié (par des forces gravitationnelles). Un tel objet est insensible à la dilatation de l'Univers et sa taille *propre* est un invariant. On peut donc substituer au mot "objet astrophysique" le concept plus général de "longueur propre".

La distance angulaire  $D_A$  est la distance qui vérifie la relation géométrique classique entre la longueur propre  $l_p$  d'un objet situé à la coordonnée radiale  $r$  et l'angle  $\phi$  sous lequel cet objet est vu par un observateur situé à l'origine du référentiel (avec  $\phi \ll 1$ ) :

$$\phi = \frac{l_p}{D_A(r)}. \quad (\text{A.13})$$

## ii) Expression de la distance angulaire

Afin d'expliciter l'expression de  $D_A(r)$ , il suffit d'exprimer l'angle  $\phi$  en fonction de  $l_p$  et de  $r$ . Sans perte de généralité, on peut considérer l'extension de l'objet dans le plan  $\theta = \pi/2$  et la direction d'une de ses extrémités peut coïncider avec l'azimut  $\phi = 0$  (voir Fig. A.2). En intégrant la partie angulaire de la métrique spatiale donnée par la relation (A.1c) et en multipliant par  $R(t_e)$  où  $t_e$  est l'instant de l'émission de la lumière afin d'obtenir une longueur propre dans le référentiel de la source, on a :

$$l_p = R(t_e) \int_0^\phi r d\phi' = R(t_e)r\phi,$$

c'est-à-dire :

$$\phi = \frac{l_p}{R(t_e)r}. \quad (\text{A.14})$$

En comparant les équations (A.13) et (A.14), il vient immédiatement en tenant compte de la relation (A.11) entre le rayon de l'Univers et le redshift :

$$D_A(r, t_e) = R(t_e)r = \frac{R_0 r}{1+z}. \quad (\text{A.15})$$

La distance angulaire d'un objet-étalon dépend donc de l'instant d'émission de la lumière. Dans le cas d'un Univers *euclydien* en expansion, on a  $r = \chi$  et la distance angulaire est égale à la distance propre de l'objet *au moment de l'émission* de la lumière, qui est inférieure à sa distance propre au moment de la mesure. L'observateur voit dans ce cas l'objet avec une taille identique à celle qu'il aurait vue en  $t_e$ , si la lumière se propageait à vitesse infinie.

La relation (A.15) n'est valable que pour les *petits angles* et dans un univers *homogène*.

## iii) La distance angulaire satisfait une équation différentielle

L'expression de la distance angulaire peut être trouvée sans passer par l'intermédiaire de la coordonnée  $r$ . En effet,  $D_A$  est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 qui fait intervenir la loi d'expansion  $R(t)$  et ses dérivées.

L'intérêt de cette équation différentielle est de pouvoir être généralisée au cas d'un Univers "non homogène" (cfr. Section A.5), où la relation (A.15) n'est plus valable.

Nous présentons ci-après une dérivation "heuristique" de cette équation, à partir de la métrique FLRW et du formalisme introduit plus haut, en suivant le raisonnement proposé par Dashevskii & Zel'dovich (1965). Il s'agit de décrire, en fonction du temps cosmique, l'évolution de la longueur propre  $l_p(t)$  séparant deux rayons lumineux s'éloignant de l'origine du système de coordonnées comobiles, avec un angle  $\phi$  très petit et *constant*. Pour ce faire, on exprimera, en utilisant le formalisme des impulsions, la déviation du rayon lumineux au temps  $t$  en fonction des paramètres du modèle cosmologique et en fonction de  $l_p(t)$ .

Le système d'axes est choisi de telle sorte que l'axe  $OY$  coïncide avec un des deux rayons lumineux, et que les 2 rayons lumineux (=2 géodésiques radiales) soient dans le plan  $\theta = \pi/2$

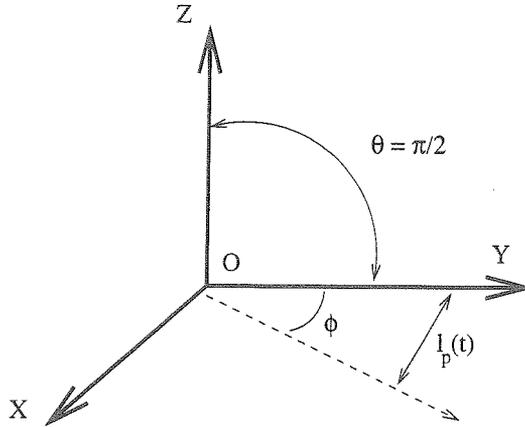


FIG. A.2: Rayons lumineux dans le système d'axes attaché à l'observateur

(voir Fig. A.2). En utilisant cette fois l'expression angulaire (A.3a) pour la métrique FLRW, on a (avec  $\phi \ll 1$ , et le point signifie la dérivation par rapport au temps) :

$$\dot{\chi}(t) = \frac{c}{R(t)}, \quad (\text{A.16})$$

et

$$l_p(t) = R(t)f(\chi(t))\phi, \quad (\text{A.17})$$

d'où :

$$\frac{dl_p}{cdt} = \frac{\phi}{c} \left[ \dot{R}f(\chi(t)) + c \frac{df}{d\chi} \right]. \quad (\text{A.18})$$

Si  $P_x$  et  $P_y$  sont les impulsions du photon selon les axes  $OX$  et  $OY$ , on a, avec  $P_x \ll P_y$ , que :

$$\frac{P_x(t)}{P_y(t)} = \frac{dl_p}{cdt} = \frac{\phi}{c} \left[ \dot{R}f(\chi(t)) + c \frac{df}{d\chi} \right].$$

Or :

$$P_y \sim P = \frac{K}{R(t)},$$

où  $K$  est une constante. En effet, l'impulsion totale du photon est proportionnelle à sa fréquence, et celle-ci est inversement proportionnelle au rayon de l'Univers, par définition du redshift (éq. A.11). Donc l'équation précédente s'écrit pour  $P_x$  :

$$P_x(t) = \frac{K}{R(t)} \frac{dl_p(t)}{cdt} = \frac{K\phi}{c} \left[ \frac{\dot{R}}{R} f(\chi(t)) + \frac{c}{R} \frac{df}{d\chi} \right].$$

Or, la déviation du rayon lumineux au temps  $t$  est égale à  $dP_x/cdt$ . En dérivant par rapport au temps les deux membres de droite de la double équation précédente, et en tenant compte du fait que  $d^2f/d\chi^2 = -kf(\chi)$  vu la définition de  $f(\chi)$ , on obtient une relation entre  $l$  et ses dérivées :

$$-K \frac{\dot{R}}{cR^2} \frac{dl_p}{cdt} + \frac{K}{R} \frac{d^2l_p}{c^2dt^2} = \frac{K\phi f(\chi)}{c^2} \left[ -\frac{kc^2}{R^2} + \frac{\ddot{R}}{R} - \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 \right].$$

Par définition,  $\phi f(\chi) = l_p/R$ , et il vient :

$$\frac{d^2l_p}{dt^2} - \frac{dl_p}{dt} \frac{\dot{R}}{R} - l \left[ \frac{\ddot{R}}{R} - \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - \frac{kc^2}{R^2} \right] = 0.$$

Bien sûr,  $D_A$  obéit à la même équation que  $l_p$ , et en utilisant partout le point pour la dérivée temporelle :

$$\ddot{D}_A - \dot{D}_A \frac{\dot{R}}{R} - D_A \left[ \frac{\ddot{R}}{R} - \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - \frac{kc^2}{R^2} \right] = 0. \quad (\text{A.19})$$

L'interprétation physique de cette équation est discutée dans la section concernant les Univers inhomogènes (Section A.5). Avant cela, il sera nécessaire de résoudre les équations d'Einstein (Section A.3).

**N.B. :** Si l'on injecte la formule (A.15) dans la relation (A.19), on obtient une équation différentielle pour  $r$  :

$$\ddot{r} + \frac{\dot{R}}{R} \dot{r} + \frac{kc^2}{R^2} r = 0,$$

qui est bien l'équation satisfaite par  $r$  en posant  $ds^2 = 0$  dans l'expression (A.1a) et en dérivant par rapport au temps. En quelque sorte, ceci prouve la validité de l'équation (A.15) de façon indépendante.

### A.2.5.2 Distance luminosité

La distance luminosité  $D_L$  est la distance dérivée à partir de la luminosité apparente  $L_o$  d'une source de luminosité connue  $L_e$ , en supposant que l'Univers est euclidien et statique. Dans ce cas, la luminosité observée (énergie par unité de temps)  $L_o$  s'écrit :

$$L_o = L_e \frac{\pi D^2}{16\pi D_L^2}, \quad (\text{A.20})$$

où  $D$  est le diamètre du miroir du télescope.

Comme nous l'avons vu à la Section A.2.4, l'expansion de l'Univers et la loi de conservation du nombre de photons impliquent qu'à la dilution géométrique du flux d'énergie lumineuse s'ajoute une dilution par un facteur  $(1+z)^2$  due d'une part au ralentissement de la cadence de réception des photons et, d'autre part, à leur rougissement (redshift). D'autre

part, le miroir du télescope de diamètre propre  $D$  définit la largeur du faisceau lumineux à sa *réception* en  $t_o$  ; soit  $\pi\phi^2/4$  l'angle solide sous lequel le miroir est vu depuis la source lumineuse à l'instant de *réception* de la lumière. La luminosité observée s'écrit donc :

$$L_o = \frac{L_e}{(1+z)^2} \frac{\pi\phi^2}{16\pi}.$$

L'angle  $\phi$  est donné par la relation (A.14) où  $t_e$  est remplacé par  $t_o$ . Il vient donc pour la luminosité observée :

$$L_o = L_e \frac{\pi D^2}{16\pi(1+z)^2 R_o^2 r^2} \quad (\text{A.21})$$

et la comparaison avec la formule (A.20) fournit la relation suivante pour la distance luminosité (avec  $R(t_o) = R_o$ ) :

$$D_L(r, t_o) = (1+z)R_o r. \quad (\text{A.22})$$

Lorsque l'Univers est euclidien,  $r = \chi$  et la distance luminosité d'un objet est *supérieure* à sa distance propre au moment de l'observation.

### A.2.5.3 Relations de réciprocité

Les relations de réciprocité ont été démontrées théoriquement par Etherington (1933). Elles relient simplement les distances calculées après l'inversion des redshifts de la source et de l'observateur ; elles s'étendent à la relation entre distance angulaire et distance luminosité.

#### Distance angulaire avec inversion de la source et de l'observateur

Puisque les temps d'émission et de réception de la lumière sont cruciaux, la distance angulaire  $D_{Axy}$  entre deux points  $x$  et  $y$  (redshifts  $z_x$  et  $z_y$ , avec  $z_y > z_x$ ) n'est *pas identique* à la distance angulaire  $D_{Ayx}$  entre  $y$  et  $x$ . En effet, par définition (éq. (A.15)) :

$$D_{Axy} = R(t_y)r_{xy} = \frac{R_o}{1+z_y}r_{xy}, \quad (\text{A.23a})$$

$$D_{Ayx} = R(t_x)r_{yx} = \frac{R_o}{1+z_x}r_{yx}, \quad (\text{A.23b})$$

où  $r_{xy}$  est la coordonnée radiale du point  $y$  dans le référentiel comobile attaché au point  $x$  ;  $r_{xy} = f(\chi_{xy})$  où  $f$  est donné par la relation (A.3b) ;  $r_{xy}$  vaut  $r_y - r_x$  uniquement dans un Univers euclidien (avec  $r_x$  et  $r_y$  les coordonnées radiales des points  $x$  et  $y$  dans le référentiel de l'observateur actuel). On a bien sûr  $r_{xy} = r_{yx}$ . Il vient donc pour la distance angulaire :

$$D_{Axy} = D_{Ayx} \frac{1+z_x}{1+z_y}. \quad (\text{A.23c})$$

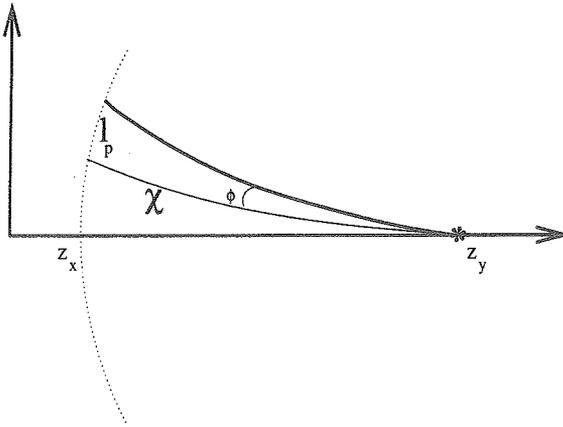


FIG. A.3: Situation géométrique correspondant à la mesure de  $D_L$  d'un objet situé au redshift  $z_x$  par un observateur situé au redshift  $z_y$ .

Bien que la définition (A.15) de la distance angulaire ne soit plus correcte dans un Univers inhomogène, la relation de réciprocité reste valable (voir par exemple Schneider et al. 1992 (SEF), p140).

### Distance angulaire et distance luminosité

Le concept de la distance luminosité n'est pas découplé de celui de la distance angulaire. Dans le premier cas, le détecteur est étendu tandis que dans le second c'est la source qui est étendue ; les cônes de lumière respectifs sont donc orientés dans des directions opposées (comparer la Fig. A.3 et la Fig. A.2). On a donc :

$$D_{L_{xy}} = \alpha D_{A_{yx}},$$

où  $\alpha$  est le facteur correctif qui tient compte de la dilution cosmologique du flux provoquée par l'expansion de l'Univers (rougissement des photons et agrandissement de l'intervalle séparant la réception de deux photons successifs) :

$$L_{obs_x} \propto L_{emis_y} \left( \frac{1+z_x}{1+z_y} \right)^2.$$

Or  $D_L \propto 1/\sqrt{L_{obs}}$ , donc :  $\alpha = (1+z_y)/(1+z_x)$ . On obtient les relations de réciprocité suivantes :

$$D_{L_{xy}} = D_{A_{yx}} \frac{1+z_y}{1+z_x} = D_{A_{xy}} \left( \frac{1+z_y}{1+z_x} \right)^2. \quad (A.24)$$

La relation (A.24) reste valable dans un Univers inhomogène.

### A.2.5.4 Composition des distances colinéaires dans un Univers plat

Lorsque  $k = 0$ , la géométrie de l'Univers est euclidienne, si bien que les distances propres entre deux objets alignés  $O_x$  et  $O_y$  (avec  $z_y > z_x$ ) se combinent trivialement selon la relation :

$$D_{p_{xy}} = D_{p_y} - D_{p_x}. \quad (\text{A.25a})$$

L'expansion de l'Univers est toujours présente et elle influence la loi de composition des distances angulaires et luminosité. En effet, grâce à la relation (A.23a) et puisque  $r = \chi$  dans un Univers euclidien, l'expression pour  $D_{A_{xy}}$  s'écrit :

$$D_{A_{xy}} = D_{A_y} - D_{A_x} \frac{1 + z_x}{1 + z_y}. \quad (\text{A.25b})$$

Quant à  $D_{L_{xy}}$ , les relations (A.23a) et (A.24) impliquent directement que :

$$D_{L_{xy}} = \frac{D_{L_y}}{(1 + z_x)^2} - D_{L_x} \frac{1 + z_y}{(1 + z_x)^3}. \quad (\text{A.25c})$$

## A.3 Des équations du champ à l'équation de Lemaître

Les hypothèses d'isotropie et d'homogénéité spatiales nous ont permis de dériver l'expression la plus générale de la métrique et d'en exploiter la forme pour déduire les principales propriétés des distances dans un espace-temps courbe et en expansion.

Pour obtenir des relations plus quantitatives pour ces distances, nous avons besoin de connaître l'expression exacte de  $R(t)$ , c'est-à-dire la dynamique de l'Univers. Celle-ci est décrite par la solution des équations d'Einstein, étant données la forme de la métrique et la nature physique du contenu de l'Univers.

### A.3.1 Équations du champ

Les équations du champ d'Einstein unissent la physique (énergie et gravitation) à la structure géométrique de l'espace-temps. Leur forme tensorielle (covariante) est la suivante :

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta}. \quad (\text{A.26})$$

où :

- $R_{\alpha\beta}$  est le tenseur de Ricci et  $\mathcal{R}$  est la courbure scalaire (ne pas confondre avec le rayon de l'Univers) ; ces grandeurs décrivent la structure géométrique de l'espace-temps et s'expriment en fonction des  $g_{\alpha\beta}$  et de leurs dérivées ;
- $\Lambda$  est la constante cosmologique (ici placée arbitrairement dans le membre géométrique de l'équation d'Einstein). Tout comme la courbure scalaire, elle a la dimension physique de l'inverse d'une surface ;

- $T_{\alpha\beta}$  est le tenseur “d’impulsion-énergie” ou de “tension-énergie” (stress-energy). Sa définition (contravariante) est le produit tensoriel du quadri-vecteur masse-impulsion,  $p$ , par le quadri-vecteur densité-flux,  $n$  :

$$T = p \otimes n ,$$

avec :

$$\begin{cases} p^\alpha = (m_o dx^0/d\tau, m_o dx^1/d\tau, m_o dx^2/d\tau, m_o dx^3/d\tau) = m_o u^\alpha \\ n^\alpha = (n_o dx^0/d\tau, n_o dx^1/d\tau, n_o dx^2/d\tau, n_o dx^3/d\tau) = n_o u^\alpha \end{cases} ,$$

où  $m_o$  et  $n_o$  sont respectivement la masse et la densité spatiale des particules au repos et  $u^\alpha$  est le quadri-vecteur vitesse de ces particules par rapport au référentiel de l’observateur.  $T^{\alpha\beta}$  est donc symétrique sur ses deux indices et les dimensions de ses composantes sont les suivantes :

$$\begin{cases} [T^{00}] = \text{Densité de masse} = ML^{-3} \\ [T^{0i}] = \text{Flux dir.i de masse} = ML^{-2}T^{-1} \\ [T^{i0}] = \text{Densité d'impulsion dir.i} = ML^{-2}T^{-1} = [T^{0i}] \\ [T^{ij}] = \text{Flux dir.i d'impulsion dir.j} = [\text{Pression}] = [T^{00}]/[\text{Vitesse}^2] \end{cases}$$

N.B. :

- 1) Le “sous-tenseur” spatial  $T^{ij}$  est le tenseur des tensions. Sa composante diagonale décrit les forces de pression perpendiculaires aux surfaces, tandis que ses composantes non diagonales décrivent les forces de viscosité, parallèles aux surfaces.
- 2) L’équivalence masse-énergie implique que  $\rho = \epsilon/c^2$ , où  $\epsilon$  est la densité d’énergie.  $T^{00}$  doit donc contenir *toutes* les formes d’énergie, et pas seulement celle associée à la masse matérielle. Dans le formalisme présenté, elles doivent être transformées en densité de matière équivalente.

### A.3.2 Contenu matériel de l’Univers

Le contenu matériel de l’Univers doit respecter les hypothèses du Principe Cosmologique. C’est le cas si le “fluide” cosmique est un fluide parfait (donc sans viscosité, ni transfert de chaleur), de densité d’énergie  $\epsilon$  et de pression  $p$ . Dans le référentiel momentanément comobile (RMC) au fluide, le tenseur d’impulsion-énergie d’un fluide parfait possède les propriétés suivantes :

- $T^{0i} = T^{i0} = 0$  (pas de transfert d’énergie (ou de masse)) ;
- $T^{ij} = \rho |v|^2 \delta^{ij} = p \delta^{ij}$  (pas de viscosité ;  $|v|$  est la vitesse moyenne des particules du gaz, définissant la pression de celui-ci, qui est macroscopiquement au repos).

L’expression explicite dans le RMC (sous forme contravariante) de  $T^{\alpha\beta}$  s’écrit donc :

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} .$$

L'expression tensorielle équivalente est la suivante :

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p/c^2)u^\alpha u^\beta + pg^{\alpha\beta}, \quad (\text{A.27})$$

comme on le vérifie dans le RMC, où  $u^\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $g^{\alpha\beta} = (\eta_{\alpha\beta})^{-1} = \begin{pmatrix} -1/c^2 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ .

Enfin, la forme covariante du tenseur d'impulsion-énergie s'écrit simplement à partir de l'éq. (A.27) :

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p/c^2)u_\alpha u_\beta + pg_{\alpha\beta}, \quad (\text{A.28})$$

où  $u_\alpha = g_{\alpha\beta}u^\beta$ .

### A.3.3 Solution des équations du champ pour la métrique FLRW

Dans les coordonnées comobiles au fluide cosmique, le tenseur métrique  $g_{\alpha\beta}$  d'un Univers homogène et isotrope est donné par la relation (A.1b) et  $u_\alpha = (-c^2, 0, 0, 0)$ . En remplaçant dans l'équation (A.28), on a :

$$T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \rho c^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p \frac{R^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & pR^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & pR^2 r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

D'autre part, les  $g_{\alpha\beta}$  étant connus, l'expression explicite du membre géométrique des équations du champ peut être calculée (laborieusement ou à l'aide d'un programme d'algèbre symbolique). On obtient ainsi 2 équations indépendantes (les composantes(0,0) et (1,1)) :

$$\begin{cases} 3 \frac{\dot{R}^2}{R^2} + 3 \frac{kc^2}{R^2} - \Lambda c^2 = \frac{8\pi G}{\rho} \\ -2 \frac{\ddot{R}}{c^2} - (\dot{R})^2 - k + \Lambda R^2 = \frac{8\pi G p}{c^4} R^2 \end{cases} \quad (\text{A.29})$$

En isolant  $\frac{\dot{R}^2}{R^2}$  dans la première équation et en l'insérant dans la seconde, il vient enfin :

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G \rho}{3} - \frac{kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad (\text{A.30})$$

$$3 \frac{\ddot{R}}{R} = -4\pi G(\rho + 3p/c^2) + \Lambda c^2. \quad (\text{A.31})$$

L'équation (A.30) est en fait une équation différentielle du premier ordre, résultant de la haute symétrie du problème. Cette équation clé exprime le taux d'expansion de l'Univers en fonction de son contenu matériel. Elle est également appelée *Équation de Lemaître*.

L'équation (A.31) exprime la décélération ou l'accélération de l'expansion universelle : un terme *d'attraction* gravitationnelle, due à la densité de matière et à la pression, et un terme *d'attraction ou de répulsion* selon le signe de la constante cosmologique  $\Lambda$ .

Si l'on ajoute à ces deux équations dynamiques une équation d'état  $p(\rho)$ , le système est fermé pour les grandeurs  $p(t)$ ,  $\rho(t)$  et  $R(t)$ . Dans le cas de l'Univers observable, la contribution énergétique de la matière domine largement celle du rayonnement ( $\rho = \rho_{\text{mat}}$ ) et la matière peut être considérée comme un gaz de poussières sans interaction, c'est-à-dire  $p(\rho) = 0$ . Les équations qui gouvernent l'expansion de l'Univers observable s'écrivent finalement :

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad (\text{A.32})$$

$$3\frac{\ddot{R}}{R} = -4\pi G\rho + \Lambda c^2. \quad (\text{A.33})$$

L'intégrale première issue de la *conservation de l'énergie* s'exprime par :

$$\frac{d}{dt}(R^3\rho/c) = -p\frac{d}{dt}R^3. \quad (\text{A.34})$$

Cette dernière équation montre que l'Univers subit une expansion *adiabatique*, c'est-à-dire sans dissipation de chaleur (le travail mécanique résultant de l'expansion entraîne une diminution de la quantité d'énergie). Lorsque  $p = 0$ , la quantité totale d'énergie dans l'Univers reste constante :

$$\rho R^3 = C \text{ste}. \quad (\text{A.35})$$

## A.4 Distances en fonction des grandeurs observables

$z, H_o, \Omega_o, \lambda_o$

### A.4.1 Nouvelle forme de l'équation de Lemaître

Un modèle cosmologique FLRW décrivant l'Univers actuel est donc défini à partir des 3 constantes  $k$ ,  $\Lambda$  et  $\rho_o$  (la densité actuelle), qui devront être exprimées en fonction de 3 grandeurs déductibles (en principe) par l'observation et qui sont la constante de Hubble  $H_o$ , le paramètre de densité cosmologique présent  $\Omega_o$ , et la valeur actuelle du paramètre de décélération de l'Univers,  $q_o$ . Quant au temps cosmique, inobservable directement, il est directement relié par le modèle cosmologique au redshift, grâce à la relation (A.11).

Pour ce faire, définissons le taux d'expansion  $H$ , le paramètre de décélération  $q$  et le paramètre de densité cosmologique actuel  $\Omega_o$  :

$$H = \frac{\dot{R}}{R}, \quad (\text{A.36})$$

$$q = -\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2}, \quad (\text{A.37})$$

$$\Omega_o = \frac{8\pi G\rho_o}{3H_o^2}. \quad (\text{A.38})$$

$H$ , le paramètre de Hubble, a la dimension de l'inverse d'un temps, tandis que le paramètre de décélération  $q$  et le paramètre de densité  $\Omega_o$  sont sans dimension. Bien sûr, seules les valeurs présentes de  $H$  et de  $q$  sont observables ( $H_o$  est la *constante* de Hubble).

Après substitution, et en divisant les 2 membres de l'équation (A.32) par  $H_o$ , les relations (A.32) et (A.33) s'écrivent de la façon suivante :

$$\frac{H^2}{H_o^2} = \Omega_o \frac{\rho}{\rho_o} + \frac{\Lambda c^2}{3H_o^2} - \frac{kc^2}{R^2 H_o^2}, \quad (\text{A.39})$$

$$H^2 q = \frac{H_o^2 \Omega_o}{2} \frac{\rho}{\rho_o} - \frac{\Lambda c^2}{3}. \quad (\text{A.40})$$

Ces relations sont valables à tout instant  $t$ , et donc particulièrement, à l'instant présent  $t_o$ . On obtient ainsi des expressions pour  $k$  et pour la constante cosmologique en fonction des grandeurs observables :

$$\lambda_o = \frac{\Omega_o}{2} - q_o, \quad (\text{A.41})$$

$$\frac{kc^2}{R_o^2} = H_o^2 (\Omega_o + \lambda_o - 1), \quad (\text{A.42})$$

où  $\lambda_o$  est la constante cosmologique sans dimension :

$$\lambda_o = \frac{\Lambda c^2}{3H_o^2}. \quad (\text{A.43})$$

D'autre part, grâce à la relation (A.11) entre le rayon de l'Univers et le redshift, la loi de conservation de la matière (A.35) gouverne l'évolution de la densité *propre* ou *physique* en fonction du redshift<sup>2</sup> :

$$\frac{\rho}{\rho_o} = (1+z)^3. \quad (\text{A.44})$$

Les relations (A.11), (A.42), (A.43) et (A.44) permettent d'écrire la forme finale de l'équation de Lemaître (A.39) en fonction des grandeurs observables et de  $\lambda_o$  :

<sup>2</sup>La relation (A.44) est également valable pour décrire la densité physique d'une population d'objets (comme des galaxies) *uniforme* dans le système de coordonnées comobiles.

$$H^2 = H_o^2 ((1+z)^3 \Omega_o - (1+z)^2 (\Omega_o + \lambda_o - 1) + \lambda_o). \quad (\text{A.45})$$

Ou encore :

$$\begin{cases} H = H_o \sqrt{Q(z)} \\ Q(z) = (1+z)^3 \Omega_o - (1+z)^2 (\Omega_o + \lambda_o - 1) + \lambda_o \end{cases} \quad (\text{A.46})$$

#### A.4.2 Trois remarques : $\Omega(z)$ , le modèle vide et les modèles sans Big-Bang

##### Comportement de $\Omega(z)$

À grand redshift,  $\Omega(z) = 8\pi G\rho(z)/3H^2(z)$  converge vers 1, quelles que soient les valeurs de  $H_o$ ,  $\Omega_o$  et  $\lambda_o$  :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \Omega(z) = 1.$$

En effet, dans le cas où  $\lambda_o = 0$ , on peut montrer à partir des équations (A.44), (A.38) et (A.45) que :

$$\Omega(z) = \frac{\Omega_o(1+z)}{\Omega_o z + 1}.$$

Ce comportement de  $\Omega(z)$  requiert un ajustement incroyablement précis des conditions initiales pour obtenir une valeur actuelle de  $\Omega_o$  de l'ordre de l'unité. Ce n'est cependant pas le cas si  $\Omega_o$  vaut exactement 1, car alors  $\Omega(z) = 1$  quel que soit  $z$ . C'est là un des arguments des partisans d'un Univers plat qui serait issu d'une phase d'inflation cosmique.

##### Le paradigme du modèle vide

Les modèles cosmologiques FLRW n'ont de sens que s'ils possèdent de la matière ou une constante cosmologique non nulle. En effet, imposer simultanément  $\Omega_o = 0$  et  $\lambda_o = 0$  revient à considérer un Univers vide et à résoudre les équations du champ (A.26) pour la géométrie FLRW (isotropie et homogénéité spatiales), mais avec le membre de droite nul. Cela conduit à une autre famille de modèles, contenant 3 modèles, selon les 3 valeurs possibles pour  $k$ . Ils sont tous spatio-temporellement plats et la métrique peut se ramener à celle de Minkowski à l'aide d'un changement de variables. Si  $k = 0$ , l'Univers est statique, si  $k = 1$ , le modèle est complexe. Enfin, si  $k = -1$ , le modèle est en expansion (ou en contraction) *constante*, avec  $R(t) = \pm ct$ . C'est le modèle de Milne. Adopter  $(\Omega_o, \lambda_o) = (0, 0)$  (et donc  $k = -1$ ) dans le cadre des modèles FLRW revient donc en fait à changer de famille de modèles. Le modèle de Milne est vide en *tout instant* du temps cosmique et diffère radicalement des modèles FLRW à mesure que l'on se rapproche de la singularité.

Cependant, si l'Univers *actuel* est très dilué, sa phase d'expansion présente est approximativement égale à celle d'un Univers de Milne. En effet, pour  $\lambda_o = 0$  et pour  $\Omega_o \ll 1$ , la loi d'expansion d'un Univers FLRW est linéaire par rapport au temps (comme dans le modèle de Milne) si et seulement si :

$$(1+z) \ll \frac{1}{\Omega_o}$$

Cette relation s'obtient facilement à partir de l'équation de Lemaître (A.45), de la définition du paramètre de Hubble (A.36) et de la relation entre le redshift et le rayon de l'Univers (A.11). On montre aussi que, quelle que soit la valeur non nulle de  $\Omega_o$ , si  $(1+z) \gg \frac{1}{\Omega_o}$ , alors  $R(t) \propto t^{2/3}$  (et non proportionnellement à  $t$  comme dans le modèle de Milne).

Ainsi donc, si  $\Omega_o \sim 0,02$ , la description *formelle* des distances au moyen du modèle de Milne est asymptotiquement correcte pour des redshifts  $z \ll 50$ , ce qui est le cas pour les objets astrophysiques observables ( $z_{Max} \sim 5$ ). Cette situation physique est celle d'un Univers qui se trouve à un stade *éloigné du Big Bang* et dont le contenu matériel est très dilué :  $\dot{\rho} \sim 0$  et  $\rho \sim 0$ .

Le modèle de Milne constitue donc un "raccourci analytique" du modèle FLRW à l'époque actuelle et pour un Univers très dilué, mais est sans fondement physique en tant que modèle cosmologique décrivant l'Univers durant toute son histoire. Toutes les expressions analytiques des distances données par la suite sous l'hypothèse  $\Omega_o = 0, \lambda_o = 0$ , doivent être comprises dans ce contexte.

Cette remarque est également valable en matière de choix du paramètre d'inhomogénéité  $\eta$  (voir Section A.5). En effet, quand  $\eta = 0$ , le cône défini par un faisceau de lumière ne peut rester vide de matière lorsqu'on se rapproche de la singularité initiale, à moins que l'Univers ne soit exactement vide, ce qui n'est pas le cas. Cependant l'approximation est valable pour le calcul de distances dans un Univers dilué et éloigné du Big Bang.

### Condition d'existence d'un modèle FLRW sans Big Bang

L'équation (A.46) qui dicte l'expansion de l'Univers n'est définie que si la fonction  $Q(z)$  est positive en tout  $z$  observable.  $Q(z)$  ne peut s'annuler que si  $(\Omega_o + \lambda_o) > 1$ , c'est-à-dire s'il s'agit d'un Univers fermé. L'annulation de  $Q(z)$  en  $z$  fini signifie une annulation du taux d'expansion  $\dot{R}$ , et donc la présence d'un minimum pour le rayon de l'Univers. Si cette annulation du taux d'expansion (ou de  $Q(z)$ ) s'accompagne d'une accélération  $\ddot{R} \geq 0$ , alors, il s'agit d'un Univers à rebond ("bounce model" en anglais); si  $\ddot{R} = 0$ , l'expansion est indéfinie (modèle où  $R_{Min}$  est atteint asymptotiquement en  $t = -\infty$ ). En d'autres termes, il s'agit d'un type d'Univers *sans Big Bang*. Or qui dit valeur minimum du rayon de l'Univers, dit valeur maximale du redshift observable. L'observation peut-elle rejeter la possibilité de décrire notre Univers avec un modèle sans Big Bang? Supposons donc que l'on n'observe rien au-delà de  $z_{Max}$  parce que l'Univers atteint alors son rayon minimum et que par conséquent, aucun objet ne peut avoir un redshift  $z > z_{Max}$ <sup>3</sup>. En résumé, les deux conditions suivantes sont donc remplies :

$$\begin{aligned} \dot{R}(z_{Max}) &= 0 \Leftrightarrow Q(z_{Max}) = 0, \\ \ddot{R}(z_{Max}) &\geq 0. \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Par contre, dans un Univers à rebond, un objet observé à une époque fortement antérieure à celle à laquelle le rayon de l'Univers était minimum se verrait alors que l'Univers était en *contraction* et son spectre montrerait un *décalage vers le bleu*. On peut objecter que de tels astres ne sont pas visibles car ils sont trop distants, et donc l'argument n'est pas valable pour réfuter ce type de modèles.

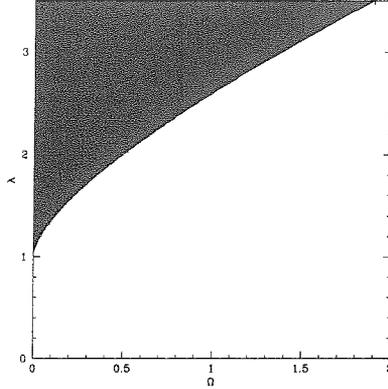


FIG. A.4: Zone interdite (en noir) du plan  $(\Omega_o, \lambda_o)$ .

Elles fixent de façon univoque les valeurs des paramètres cosmologiques  $\Omega_o$  et  $\lambda_o$ . Ainsi, les équations (A.46) et (A.39) fournissent respectivement :

$$\lambda_o = \frac{\Omega_o z_{Max} + 1}{1 - (1 + z_{Max})^{-2}},$$

$$\lambda_o \geq \frac{\Omega_o}{2} (1 + z_{Max})^3.$$

Ces deux conditions sur  $\lambda_o$  ne sont simultanément satisfaites que si :

$$\Omega_o \leq \frac{2}{z_{Max}^2 (z_{Max} + 3)},$$

$$\lambda_o = \frac{\Omega_o z_{Max} + 1}{1 - (1 + z_{Max})^{-2}}.$$

L'objet le plus distant que nous connaissons se trouve à  $z > 4,8$ . Pour que le modèle d'Univers sans Big Bang soit plausible, il faut donc que :

$$\Omega_o \leq 0,0111.$$

Cette dernière valeur est en conflit avec les observations locales dans les amas de galaxies, qui montrent que  $\Omega_o$  est au moins supérieur à 0,05 ( $\Omega_o \sim 0,1-0,2$ ; Coles & Ellis 1997). Cette réfutation possible du modèle sans Big Bang ne fait donc pas intervenir la présence du rayonnement de fond à 3K. Elle a été proposée par Börner et Ehlers en 1988.

Cette remarque particulière signifie qu'il est dénué de sens de vouloir calculer la distance d'un objet à un redshift arbitraire, avec un modèle cosmologique dont les paramètres  $\Omega_o$  et  $\lambda_o$  sont choisis arbitrairement. La Fig. A.4 représente la zone du plan  $(\Omega_o, \lambda_o)$  exclue (en noir) par le fait d'observer des objets jusqu'à un redshift de  $z = 4,8$ , ce qui requiert la non annulation de  $Q(z)$  sur l'intervalle de redshift  $[0 - 4,8]$ .

La Fig. A.4 exprime en outre qu'en plus d'éliminer la possibilité d'un Univers à rebond, l'observation d'un quasar à  $z = 4,8$  fournit également une contrainte sur  $\lambda_o$  : typiquement, pour  $\Omega_o < 1$ , il faut  $\lambda_o < 2$ .

### A.4.3 Formulaire

#### A.4.3.1 Distance lumière $D_l(z)$ et look-back time $t(z)$

On recherche l'expression du lookback-time  $t(z)$ . La distance lumière s'obtient alors directement, puisque  $D_l(z) = ct(z)$ .

#### Formulation implicite

La différentiation de l'équation (A.11) par rapport au temps fournit :

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{R_o \dot{R}}{R \dot{R}}.$$

Vu la définition de la constante de Hubble (A.36) et son expression en fonction du redshift (A.46), on a :

$$\frac{dt}{dz} = -\frac{1}{H_o(1+z)\sqrt{Q(z)}}. \quad (\text{A.47})$$

L'expression générique du lookback time  $t_{xy}$  entre les redshifts  $z_x$  et  $z_y$  s'écrit directement à partir de la relation précédente (en permutant les bornes d'intégration) :

$$t_{xy} = \int_{z_x}^{z_y} \frac{dz}{H_o(1+z)\sqrt{Q(z)}}, \quad (\text{A.48})$$

où  $Q(z)$  est donné par la relation (A.46). L'âge de l'Univers est obtenu en posant  $z_x = 0$  et  $z_y = \infty$ . En intégrant entre 0 et  $z$ , on obtient le lookback time correspondant au redshift  $z$ , pour un observateur terrestre.

#### Formulations explicites

L'équation (A.48) n'est pas intégrable dans le cas général. Cependant, si  $\lambda_o = 0$ , elle se réduit à l'expression

$$t_{xy} = \frac{1}{H_o} \int_{z_x}^{z_y} \frac{dz}{(1+z)^2 \sqrt{\Omega_o z + 1}},$$

de laquelle on peut extraire des relations analytiques.

1)  $\Omega_o = 0$

$$t(z) = \frac{1}{H_o} \left( 1 - \frac{1}{1+z} \right). \quad (\text{A.49})$$

2)  $\Omega_o = 1$

$$t(z) = \frac{2}{3H_o} \left( 1 - \frac{1}{(1+z)^{3/2}} \right). \quad (\text{A.50})$$

3)  $\Omega_o < 1$

Il suffit de poser successivement  $\sqrt{\Omega_o z + 1} = x$  et  $u = x/\sqrt{1 - \Omega_o}$  :

$$t(z) = \frac{2\Omega_o}{H_o(1 - \Omega_o)^{3/2}} \int \frac{du}{(u^2 - 1)^2}.$$

La primitive vaut  $\frac{1}{2} \operatorname{arctanh} \frac{1}{u} - \frac{1}{2} \frac{u}{u^2 - 1}$ .

En remplaçant  $u$  en fonction de  $z$ , en variant la primitive entre 0 et  $z$ , et en exprimant  $\operatorname{arctanh}$  en fonction de  $\operatorname{arcsinh}$ , il vient :

$$t(z) = \frac{1}{H_o} \left\{ \frac{1}{(1 - \Omega_o)} \left( 1 - \frac{\sqrt{\Omega_o z + 1}}{1 + z} \right) + \frac{\Omega_o}{(1 - \Omega_o)^{3/2}} \left[ \operatorname{arcsinh} \sqrt{\frac{1 - \Omega_o}{\Omega_o(1 + z)}} - \operatorname{arcsinh} \sqrt{\frac{1 - \Omega_o}{\Omega_o}} \right] \right\}.$$

Enfin, en utilisant la relation des  $\operatorname{arcsinh}$ , on obtient finalement :

$$t(z) = \frac{1}{H_o} \left\{ \frac{1}{(1 - \Omega_o)} \left( 1 - \frac{\sqrt{\Omega_o z + 1}}{1 + z} \right) + \frac{\Omega_o}{(1 - \Omega_o)^{3/2}} \operatorname{arcsinh} \left[ \sqrt{\frac{1 - \Omega_o}{\Omega_o^2(1 + z)}} (1 - \sqrt{1 + \Omega_o z}) \right] \right\}. \quad (\text{A.51})$$

4)  $\Omega_o > 1$

Il suffit de poser successivement  $\sqrt{\Omega_o z + 1} = x$  et  $u = x/\sqrt{\Omega_o - 1}$  :

$$t(z) = \frac{2\Omega_o}{H_o(\Omega_o - 1)^{3/2}} \int \frac{du}{(u^2 + 1)^2}.$$

La primitive vaut  $\frac{1}{2} \arctan u + \frac{1}{2} \frac{u}{u^2 + 1}$ .

En remplaçant  $u$  en fonction de  $z$ , en variant la primitive entre 0 et  $z$  et en exprimant arctan en fonction de arcsin, il vient :

$$t(z) = \frac{1}{H_o} \left\{ \frac{1}{(\Omega_o - 1)} \left( \frac{\sqrt{\Omega_o z + 1}}{1 + z} - 1 \right) + \frac{\Omega_o}{(\Omega_o - 1)^{3/2}} \left[ \arcsin \sqrt{\frac{1 + \Omega_o z}{\Omega_o(1 + z)}} - \arcsin \sqrt{\frac{1}{\Omega_o}} \right] \right\}. \quad (\text{A.52})$$

Enfin, en utilisant la relation des arcsin,  $t(z)$  peut s'exprimer de manière semblable au cas précédent :

$$t(z) = \frac{1}{H_o} \left\{ \frac{1}{(\Omega_o - 1)} \left( \frac{\sqrt{\Omega_o z + 1}}{1 + z} - 1 \right) + \frac{\Omega_o}{(\Omega_o - 1)^{3/2}} \arcsin \left[ \sqrt{\frac{\Omega_o - 1}{\Omega_o^2(1 + z)}} (\sqrt{\Omega_o z + 1} - 1) \right] \right\}. \quad (\text{A.53})$$

#### A.4.3.2 Distance comobile $D_c$ ou $\chi$

##### Formulation implicite

L'élément de distance comobile radiale  $d\chi$  parcourue par la lumière pendant l'intervalle de temps  $dt$  satisfait l'équation  $ds^2 = 0$ . En utilisant la métrique FLRW (A.3a), on a :

$$d\chi = c \frac{dt}{R}. \quad (\text{A.54})$$

Il est possible d'écrire  $d\chi$  en fonction de  $dz$  en utilisant la relation (A.11) :

$$d\chi = c \frac{dt}{R} = c \frac{dR}{R\dot{R}} = -\frac{c}{R_o} \frac{dz}{H(z)}.$$

On a donc finalement par l'équation de Lemaître (A.46) :

$$\chi(z_1, z_2) = \frac{c}{H_o R_o} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{Q(z)}}, \quad (\text{A.55})$$

où  $R_o$  est relié à la courbure de l'Univers par l'équation (A.42) :

$$R_o = \frac{c}{H_o \sqrt{|\Omega_o + \lambda_o - 1|}} \text{ si } k \neq 0. \quad (\text{A.56})$$

Si  $k = 0$ , le rayon  $R_o$  est indéterminé (cfr. éq. (A.42)). La distance comobile est donc définie au facteur  $R_o$  près dans ce cas. Par souci d'uniformisation, nous conserverons le facteur  $R_o$  dans toutes les expressions de  $\chi$ ; comme nous le verrons par la suite, les distances physiques n'en dépendent pas.

### Formulations explicites

Dans le cas le plus général, l'intégrale de l'équation (A.55) ne se résoud pas analytiquement. Cependant, si  $\lambda_o = 0$  ou si  $\Omega_o = 0$ , la distance comobile peut être calculée analytiquement.

#### A) $\lambda_o = 0$

Il suffit alors de résoudre l'intégrale :

$$\chi(z_1, z_2) = \frac{c}{R_o H_o} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{(1+z)\sqrt{\Omega_o z + 1}}.$$

On opère à l'aide des mêmes changements de variables qu'à la Section précédente.

##### 1. $\Omega_o = 0$ ( $k = -1$ )

$$\chi(z_1, z_2) = \frac{c}{R_o H_o} \ln \frac{1+z_2}{1+z_1}. \quad (\text{A.57})$$

##### 2. $\Omega_o = 1$ ( $k = 0$ )

$$\chi(z_1, z_2) = \frac{2c}{H_o R_o} \left[ \frac{1}{\sqrt{1+z_1}} - \frac{1}{\sqrt{1+z_2}} \right]. \quad (\text{A.58})$$

##### 3. $\Omega_o > 1$ ( $k = +1$ )

$$\chi(z_1, z_2) = \frac{2c}{H_o R_o \sqrt{\Omega_o - 1}} \left[ \arctan \sqrt{\frac{\Omega_o z_2 + 1}{\Omega_o - 1}} - \arctan \sqrt{\frac{\Omega_o z_1 + 1}{\Omega_o - 1}} \right]. \quad (\text{A.59})$$

##### 4. $\Omega_o < 1$ ( $k = -1$ )

$$\chi(z_1, z_2) = \frac{c}{H_o R_o \sqrt{1 - \Omega_o}} \ln \frac{(\sqrt{\Omega_o z_2 + 1} - \sqrt{1 - \Omega_o})(\sqrt{\Omega_o z_1 + 1} + \sqrt{1 - \Omega_o})}{(\sqrt{\Omega_o z_2 + 1} + \sqrt{1 - \Omega_o})(\sqrt{\Omega_o z_1 + 1} - \sqrt{1 - \Omega_o})}. \quad (\text{A.60})$$

B)  $\Omega_o = 0$

Lorsque  $\Omega_o = 0$ , l'intégrand de la formule (A.55) se simplifie également et il vient :

$$\chi(z_1, z_2) = \frac{c}{H_o R_o} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{(1 - \lambda_o)(1 + z)^2 + \lambda_o}}.$$

1)  $\lambda_o = 0$  Voir formule (A.57).

2)  $\lambda_o = 1$

$$\chi(z_1, z_2) = \frac{c}{H_o R_o} (z_2 - z_1). \quad (\text{A.61})$$

3)  $\lambda_o > 1$  ( $k = 1$ )

$$\chi(z_1, z_2) = \frac{c}{H_o R_o} \frac{1}{\sqrt{\lambda_o - 1}} \arcsin \quad (\text{A.62})$$

$$\left[ (1 + z_2) \sqrt{\lambda_o - 1} \sqrt{\frac{1 - \lambda_o}{\lambda_o^2} (1 + z_1)^2 + \frac{1}{\lambda_o}} - (1 + z_1) \sqrt{\lambda_o - 1} \sqrt{\frac{1 - \lambda_o}{\lambda_o^2} (1 + z_2)^2 + \frac{1}{\lambda_o}} \right].$$

4)  $0 < \lambda_o < 1$  ( $k = -1$ )

$$\chi(z_1, z_2) = \frac{c}{H_o R_o} \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda_o}} \operatorname{arcsinh} \quad (\text{A.63})$$

$$\left[ (1 + z_2) \sqrt{1 - \lambda_o} \sqrt{\frac{1 - \lambda_o}{\lambda_o^2} (1 + z_1)^2 + \frac{1}{\lambda_o}} - (1 + z_1) \sqrt{1 - \lambda_o} \sqrt{\frac{1 - \lambda_o}{\lambda_o^2} (1 + z_2)^2 + \frac{1}{\lambda_o}} \right].$$

**N.B. :** La distance n'est donc pas définie pour tous les couples de valeurs  $(z, \lambda_o)$ . En effet, les modèles cosmologiques caractérisés par une constante cosmologique importante ne sont pas définis pour tous les redshifts (cfr. Section A.4.2).

5)  $\lambda_o < 0$  ( $k = -1$ )

$$\chi(z_1, z_2) = \frac{c}{H_o R_o \sqrt{1 - \lambda_o}} \operatorname{arcsinh} \quad (\text{A.64})$$

$$\left[ \sqrt{\left( \frac{\lambda_o - 1}{\lambda_o} (1 + z_1)(1 + z_2) - \sqrt{\left( \frac{\lambda_o - 1}{\lambda_o} (1 + z_2)^2 - 1 \right) \left( \frac{\lambda_o - 1}{\lambda_o} (1 + z_1)^2 - 1 \right)} \right)^2 - 1} \right].$$

### A.4.3.3 Distance propre $D_p$

#### Formulation implicite

Si  $t$  est l'instant de la mesure, la distance propre radiale  $D_p$  entre deux points situés aux redshifts  $z_1$  et  $z_2$  est donnée par la relation (A.8) :

$$D_p(t; z_1, z_2) = R(t)\chi(z_1, z_2). \quad (\text{A.65})$$

#### Formulations explicites de la distance propre actuelle

Les formulations explicites de la distance propre actuelle ( $t = t_o$ ) s'obtiennent simplement en multipliant les relations (A.57)-(A.64) de la distance comobile par le facteur  $R_o$ . La distance propre à une autre époque est calculée en divisant la distance propre actuelle par le facteur  $(1 + z)$ , où  $z$  est le redshift correspondant à l'époque choisie.

### A.4.3.4 Distance angulaire $D_A$

#### Formulation implicite

Dans un Univers homogène, la distance angulaire entre 2 points est donnée par la relation (voir éqs. (A.23a) et (A.2)) :

$$D_A(z_1, z_2) = \frac{R_o r_{12}}{1 + z_2} = \frac{R_o}{1 + z_2} \left\{ \begin{array}{ll} \chi(z_1, z_2) & \text{si } k = 0 \\ \sin \chi(z_1, z_2) & \text{si } k = 1 \\ \sinh \chi(z_1, z_2) & \text{si } k = -1 \end{array} \right\}, \quad (\text{A.66})$$

où  $\chi(z_1, z_2)$  est la distance comobile entre le redshift  $z_1$  et le redshift  $z_2$ , donnée par les relations ((A.57)-(A.64)) pour les différentes valeurs de  $\Omega_o$  et de  $\lambda_o$  ;  $R_o$  est donné par la relation (A.56).

Dans un Univers homogène, la distance angulaire peut donc être calculée sans devoir résoudre l'équation différentielle générale (A.19).

#### Formulations explicites et Relation de Mattig

Les formulations explicites n'existent que dans les cas où la distance comobile  $\chi$  a pu être calculée analytiquement, c'est-à-dire lorsque  $\Omega_o$  ou  $\lambda_o$  est nul.

A)  $\lambda_o = 0$

1)  $\Omega_o = 0$  ( $k = -1$ )

Les relations (A.57) et (A.66) entraînent :

$$D_A(z_1, z_2) = \frac{c}{2H_o} \left[ \frac{1}{1+z_1} - \frac{1+z_1}{(1+z_2)^2} \right]. \quad (\text{A.67})$$

2)  $\Omega_o = 1$  ( $k = 0$ )

Par les équations (A.58) et (A.66), on a :

$$D_A(z_1, z_2) = \frac{2c}{H_o} \left[ (1+z_1)^{-1/2}(1+z_2)^{-1} - (1+z_2)^{-3/2} \right]. \quad (\text{A.68})$$

3)  $\Omega_o \neq 0$  : Relation de Mattig ( $k = 1, 0, -1$ )

À partir de la définition (A.2) et des relations (A.58)-(A.60) de la distance comobile, on réalise que l'expression analytique de la coordonnée comobile radiale  $r_{12}$  du point situé en  $z_2$  dans le référentiel du point situé en  $z_1$  est *identique*, que  $\Omega_o$  soit supérieur, inférieur ou égal à 1 : il s'agit de la relation de Mattig généralisée :

$$r_{12}(z_1, z_2) = \frac{2c}{H_o R_o \Omega_o^2 (1+z_1)(1+z_2)} \left[ (2 + \Omega_o(z_2 - 1))\sqrt{\Omega_o z_1 + 1} - (2 + \Omega_o(z_1 - 1))\sqrt{\Omega_o z_2 + 1} \right].$$

Dans le cas où la distance est mesurée depuis la Terre,  $z_1 = 0$  et la relation précédente se simplifie pour donner la – bien connue – formule de Mattig<sup>4</sup> (1958) :

$$r(z) = \frac{2c}{H_o R_o} \frac{\Omega_o z + (\Omega_o - 2)(\sqrt{\Omega_o z + 1} - 1)}{\Omega_o^2 (1+z)}.$$

Dès lors, il vient pour la distance angulaire  $D_A$  (éq. (A.66)) :

$$D_A(z_1, z_2) = \frac{2c}{H_o \Omega_o^2 (1+z_1)(1+z_2)^2} \left[ (2 + \Omega_o(z_2 - 1))\sqrt{\Omega_o z_1 + 1} - (2 + \Omega_o(z_1 - 1))\sqrt{\Omega_o z_2 + 1} \right]. \quad (\text{A.69})$$

Et lorsque  $z_1 = 0$  :

$$D_A(z) = \frac{2c}{H_o} \frac{\Omega_o z + (\Omega_o - 2)(\sqrt{\Omega_o z + 1} - 1)}{\Omega_o^2 (1+z)^2}. \quad (\text{A.70})$$

<sup>4</sup>Initialement, Mattig a dérivé cette formule pour le calcul de la distance luminosité.

B)  $\Omega_o = 0$

1)  $\lambda_o = 1$  ( $k = 0$ ) On a simplement à partir de la relation (A.61) :

$$D_A(z_1, z_2) = \frac{c}{H_o} \frac{z_2 - z_1}{1 + z_2}. \quad (\text{A.71})$$

2)  $\lambda_o > 0$

Tout comme pour la relation de Mattig, on réalise à partir de la définition (A.2) et des relations (A.61)-(A.63) de la distance comobile, que l'expression analytique de la coordonnée comobile radiale  $r_{12}$  est *identique*, que la constante cosmologique  $\lambda_o$  soit supérieure, inférieure ou égale à 1. On obtient finalement pour la distance angulaire :

$$D_A(z_1, z_2) = \frac{c}{H_o} \left[ \sqrt{\frac{1 - \lambda_o}{\lambda_o^2} (1 + z_1)^2 + \frac{1}{\lambda_o}} - \frac{1 + z_1}{1 + z_2} \sqrt{\frac{1 - \lambda_o}{\lambda_o^2} (1 + z_2)^2 + \frac{1}{\lambda_o}} \right]. \quad (\text{A.72})$$

Si  $z_1=0$ , la formule précédente se simplifie comme suit :

$$D_A(z) = \frac{c}{H_o} \left[ \sqrt{\frac{1 - \lambda_o}{\lambda_o^2} + \frac{1}{\lambda_o}} - \frac{1}{1 + z} \sqrt{\frac{1 - \lambda_o}{\lambda_o^2} (1 + z)^2 + \frac{1}{\lambda_o}} \right]. \quad (\text{A.73})$$

3)  $\lambda_o < 0$  ( $k = -1$ )

$$D_A(z_1, z_2) = \frac{c}{H_o(1 + z_2)\sqrt{1 - \lambda_o}}. \quad (\text{A.74})$$

$$\sqrt{\left( \frac{\lambda_o - 1}{\lambda_o} (1 + z_1)(1 + z_2) - \sqrt{\left( \frac{\lambda_o - 1}{\lambda_o} (1 + z_2)^2 - 1 \right) \left( \frac{\lambda_o - 1}{\lambda_o} (1 + z_1)^2 - 1 \right)} \right)^2 - 1}.$$

Et si le redshift  $z_1 = 0$  :

$$D_A(z) = \frac{c}{H_o(1 + z)\sqrt{1 - \lambda_o}} \sqrt{\left( \frac{\lambda_o - 1}{\lambda_o} (1 + z) - \frac{1}{\lambda_o} \sqrt{(1 - \lambda_o)(1 + z)^2 + \lambda_o} \right)^2 - 1}. \quad (\text{A.75})$$

### A.4.3.5 Distance luminosité $D_L$

#### Formulation implicite

Les relations de réciprocity entre  $D_L$  et  $D_A$  (éq. A.24) permettent d'exprimer simplement  $D_L$  en fonction de  $D_A$  :

$$D_L(z_1, z_2) = D_A(z_1, z_2) \left( \frac{1 + z_2}{1 + z_1} \right)^2.$$

#### Formulations explicites

Nous présentons de façon explicite uniquement les formules relatives aux cas où  $\lambda_o = 0$ . Les formules valables lorsque  $\Omega_o = 0$  se dérivent immédiatement à partir de celles obtenues pour la distance angulaire (éqs. (A.71) - (A.75)), grâce à la formulation implicite.

##### 1. $\Omega_o = 0$

$$D_L(z_1, z_2) = \frac{c}{2H_0} \left[ \frac{(1 + z_2)^2}{(1 + z_1)^3} - \frac{1}{1 + z_1} \right]. \quad (\text{A.76})$$

##### 2. $\Omega_o = 1$

$$D_L(z_1, z_2) = \frac{2c}{H_0} \left[ \frac{1 + z_2}{(1 + z_1)^{5/2}} - \frac{(1 + z_2)^{1/2}}{(1 + z_1)^2} \right]. \quad (\text{A.77})$$

##### 3. $\Omega_o \neq 0$

$$D_L(z_1, z_2) = \frac{2c}{H_0 \Omega_o^2 (1 + z_1)^3} \left[ (2 + \Omega_o(z_2 - 1)) \sqrt{\Omega_o z_1 + 1} - (2 + \Omega_o(z_1 - 1)) \sqrt{\Omega_o z_2 + 1} \right]. \quad (\text{A.78})$$

Dans le cas où la distance est mesurée à partir de la Terre,  $z_1 = 0$  et la relation précédente se simplifie pour donner la – bien connue – formule de Mattig (1958) :

$$D_L(z) = \frac{2c}{H_0} \frac{\Omega_o z + (\Omega_o - 2)(\sqrt{\Omega_o z + 1} - 1)}{\Omega_o^2}. \quad (\text{A.79})$$

## A.5 Un Univers inhomogène

### A.5.1 Inhomogénéités et distances (angulaires)

Bien que l'Univers à grande échelle ( $\sim 100$  Mpc) semble homogène, il n'en va pas de même à plus petite échelle, comme nous le démontre la présence de galaxies et d'amas de galaxies. Quelle est l'influence de la granularité de la matière sur la détermination des distances ?

La quantité de matière rencontrée par un faisceau lumineux gouverne sa propagation et sa déformation éventuelle. La distance angulaire et la distance luminosité entre une source et un observateur dépendent directement du transport du faisceau lumineux entre eux-ci. Explicitons l'équation différentielle (A.19) décrivant le comportement de la distance angulaire en fonction du temps cosmique, après avoir remplacé le terme entre crochets à l'aide des équations du champ (A.30) et (A.31) pour le modèle FLRW. Il vient :

$$\ddot{D}_A - \dot{D}_A \frac{\dot{R}}{R} + D_A [4\pi G(\rho + p/c^2)] = 0. \quad (\text{A.80})$$

L'effet géométrique de l'expansion de l'Univers (facteur  $\dot{R}/R$ ) et la focalisation par la matière présente dans le faisceau lumineux, ou focalisation de Ricci, contribuent à la fermeture du faisceau par rapport à sa propagation dans un Univers vide et sans expansion. Cette fermeture du faisceau (ou diminution de sa section efficace propre) fait apparaître la source lumineuse qui émet la lumière plus proche de l'observateur qu'elle ne l'est en réalité ( $D_A < D_p$ ). Dans le cas d'un Univers homogène, isotrope et euclidien, nous avons vu que la relation s'écrit simplement  $D_A = D_p/(1+z)$  (éq. (A.15)).

Dans l'Univers "théorique" de FLRW, où la matière est uniformément et continûment répartie, tous les faisceaux lumineux quittant une source donnée à un instant donné rencontrent la même quantité de matière sur leur trajectoire. En réalité, la grande majorité des faisceaux lumineux ne rencontre aucun objet astrophysique sur son passage (et la densité de matière est inférieure à la moyenne), tandis que quelques faisceaux rencontrent sur leur trajet des condensations de matière (sous la forme de galaxies, de nuages intergalactiques, etc...). Si ces dernières sont suffisamment importantes, elles provoquent un phénomène de *mirage gravitationnel*, qui n'est autre que la déformation extrême du faisceau. L'existence de mirages gravitationnels n'est pas explicable au sein du modèle FLRW sans inhomogénéité, et il est même a priori paradoxal de vouloir le décrire à l'aide d'une géométrie basée sur des distances calculées dans un Univers totalement homogène. En outre, l'amplification lumineuse provoquée par le phénomène de lentille gravitationnelle n'est pas compensée dans le modèle FLRW par une "désamplification" sur les lignes de visée vides de matière. Cela entraîne le viol de la loi de conservation de l'énergie émise par la source (Weinberg 1976).

### A.5.2 Modèles inhomogènes

Afin d'obtenir des distances angulaires plus réalistes, nous voulons décrire la propagation d'un faisceau dans l'Univers observé : inhomogène localement, mais globalement homogène et isotrope, c'est-à-dire satisfaisant *statistiquement* au Principe Cosmologique. Il faut noter

que sous une telle définition, la distance angulaire d'un objet n'est pas unique, mais suit une distribution statistique, fonction de la distribution statistique des objets compacts peuplant l'Univers. La Relativité Générale s'accommode mal des statistiques, et il *n'existe pas* de tels modèles qui soient solutions des équations d'Einstein. Les seuls modèles inhomogènes existants – le modèle “Swiss-Cheese” (Kantowsky 1969) et le modèle des “vacuoles” (Nottale 1983) – redistribuent la matière de façon à créer des inhomogénéités, mais en conservant localement la masse totale. Le phénomène de lentille ne peut être décrit par de tels objets entourés d'un “halo” où la matière est moins dense que la moyenne.

L'approche la plus populaire consiste à assimiler le faisceau lumineux à un tube (partiellement) vide de matière. Supposons qu'une fraction  $\eta$  de la densité de l'Univers soit distribuée de manière continue, tandis que le reste soit distribué sous forme d'objets compacts. Ceux-ci modifient localement la métrique, mais on impose que leur distribution statistique homogène et isotrope ne modifie pas la métrique FLRW à grande échelle. Autrement dit, le contenu matériel global de l'Univers demeure inchangé et la métrique FLRW reste valable *en moyenne* pour décrire les propriétés d'ensemble de l'Univers, telles que sa dynamique prévue par l'équation de Lemaître, sa géométrie ou les distances métriques ( $r$ ,  $D_p$ ,  $l$ ). Notons qu'il s'agit ici d'une hypothèse *ad hoc*, qui ne résulte d'aucun processus de perturbation ou de linéarisation des équations du champ.

### A.5.3 Formules de la distance angulaire

#### Une nouvelle équation différentielle

Il est possible de calculer dans un Univers “inhomogène” la distance angulaire associée à un faisceau lumineux *ne rencontrant aucune inhomogénéité*. La densité de matière rencontrée vaut  $\eta\rho$ . Dans le cas extrême où toute la matière est sous forme compacte,  $\eta = 0$  et le faisceau est vide de matière (modèle “empty beam” ; Zel'dovich 1964, Dyer & Roeder 1973).

Sous l'hypothèse d'un gaz de poussière ( $p = 0$ ) et en remplaçant  $\rho$  par  $\eta\rho$ , l'équation différentielle (A.80) pour la distance angulaire peut être réécrite. Il faut toutefois tenir compte d'un terme de *cisaillement* sur le faisceau, provoqué par les objets compacts extérieurs à celui-ci. Ce terme n'apparaît pas dans l'éq. (A.80) car elle a été déduite de manière heuristique au sein du modèle FLRW, où le cisaillement causé par la matière extérieure au faisceau est annulé pour des raisons de symétrie. Un traitement plus rigoureux du transport de la section efficace d'un faisceau de géodésiques en Relativité Générale révèle la présence de cette contribution (voir Section A.7), et l'équation (A.19) s'écrit de la manière suivante :

$$\ddot{D}_A - \dot{D}_A \frac{\dot{R}}{R} + D_A \left[ 4\pi G(\eta\rho + p/c^2) - \frac{w^2}{2} \left( \frac{R}{R_o} \right)^2 \right] = 0, \quad (\text{A.81})$$

où  $w$  est le cisaillement.

Cependant, le terme de cisaillement ne peut être évalué simplement et analytiquement. Son évolution est décrite en fonction du paramètre affiné le long de la trajectoire par la seconde

équation de Sachs (éq. (A.114)) qui n'est pas facilement intégrable ; il dépend du tenseur de Weyl, dont l'expression est fonction de la distribution statistique des objets dans l'Univers.

Pour pouvoir poursuivre, il faut imposer l'hypothèse contraignante suivante : le faisceau lumineux passe "suffisamment loin" de tous les objets compacts, pour ne pas ressentir les effets du cisaillement ( $w = 0$ ). On obtient finalement l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{D}_A - \dot{D}_A \frac{\dot{R}}{R} + D_A 4\pi G \eta \rho = 0. \quad (\text{A.82})$$

### Formulations implicites

Nous cherchons tout d'abord à exprimer l'équation (A.82) en fonction du redshift et des grandeurs observables.

On a successivement :

- Au moyen de la relation (A.47) pour  $dt/dz$ , nous avons :

$$\dot{D}_A = -H_o(1+z)\sqrt{Q(z)}\frac{dD_A}{dz}, \quad (\text{A.83a})$$

$$\ddot{D}_A = H_o^2 \left( [(1+z)Q + (1+z)^2 \frac{1}{2} \frac{dQ}{dz}] \frac{dD_A}{dz} + (1+z)^2 Q \frac{d^2 D_A}{dz^2} \right). \quad (\text{A.83b})$$

- L'équation de Lemaître (A.46) fournit le taux d'expansion :

$$\frac{\dot{R}}{R} = H = H_o \sqrt{Q}. \quad (\text{A.83c})$$

- Par définition de  $\Omega_o$  (éq. A.38) et grâce à la relation (A.44) pour la densité, il vient :

$$4\pi G \rho = \frac{3H_o^2 \Omega_o}{2} (1+z)^3. \quad (\text{A.83d})$$

En remplaçant dans l'équation différentielle, et en notant la dérivée par rapport à  $z$  par un point, on a finalement :

$$Q \ddot{D}_A + \left( \frac{2Q}{1+z} + \frac{1}{2} \dot{Q} \right) \dot{D}_A + \frac{3}{2} \eta \Omega_o (1+z) D_A = 0, \quad (\text{A.84a})$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$D_A(z_x) = 0, \quad (\text{A.84b})$$

$$\dot{D}_A(z_x) = \frac{c}{H_o} \frac{1}{(1+z_x)\sqrt{Q(z_x)}}. \quad (\text{A.84c})$$

L'équation différentielle (A.84a) n'est soluble analytiquement que pour les valeurs suivantes des paramètres :

1.  $(\Omega_o, \lambda_o, \eta) = (\Omega_o, 0, 1)$  : modèle FLRW homogène sans constante cosmologique (Section A.4) ;
2.  $(\Omega_o, \lambda_o, \eta) = (0, \lambda_o, 1)$  ou  $= (0, \lambda_o, 0)$  : modèle FLRW homogène vide (Section A.4) ;
3.  $(\Omega_o, \lambda_o, \eta) = (\Omega_o, 0, 0)$  : modèle totalement inhomogène, sans constante cosmologique (Dyer-Roeder, DR) ; dans ce cas, seule l'expansion joue un rôle dans la focalisation d'un faisceau passant loin des objets ; celle-ci est donc minimale, et la distance angulaire sera maximale.
4.  $(\Omega_o, \lambda_o, \eta) = (1, 0, \eta)$  : modèle partiellement inhomogène avec géométrie globale du modèle d'Einstein - de Sitter.

Nous poursuivons la résolution de l'équation différentielle dans la situation n° 3 ( $\eta = 0$  : DR). Une forte simplification s'opère et nous avons :

$$\frac{\ddot{D}_A^{DR}}{\dot{D}_A^{DR}} = -\frac{2}{1+z} - \frac{1}{2} \frac{\dot{Q}}{Q}.$$

Une première primitivation des deux membres fait apparaître des logarithmes qui se simplifient :

$$\dot{D}_A^{DR} = \frac{c_1}{(1+z)^2 \sqrt{Q(z)}}.$$

Et par la condition sur  $\dot{D}_A$  exprimée plus haut, il vient :

$$c_1 = \frac{c}{H_o} (1+z_x).$$

L'expression finale de la distance angulaire  $D_A^{DR}$  s'obtient par une intégration sur le domaine de redshift considéré (ce qui satisfait la première condition limite) :

$$D_A^{DR}(z_1, z_2) = \frac{c}{H_o} (1+z_1) \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{(1+z)^2 \sqrt{Q(z)}}. \quad (\text{A.85})$$

Pour parvenir par la suite à une expression analytique explicite de  $D_A^{DR}$ , posons  $\lambda_o = 0$  dans l'expression de  $Q(z)$  :

$$D_A^{DR}(z_1, z_2) = \frac{c}{H_o} (1+z_1) \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{(1+z)^3 \sqrt{\Omega_o z + 1}}. \quad (\text{A.86})$$

### Formulations explicites $D_A^{DR}$

Il vient, pour les différentes valeurs de  $\Omega_o$  :

1)  $\Omega_o = 0$

$$D_A^{DR}(z_1, z_2) = \frac{c}{2H_o} \left[ \frac{1}{1+z_1} - \frac{1+z_1}{(1+z_2)^2} \right]. \quad (\text{A.87})$$

Ce qui donne, si  $z_1 = 0$  :

$$D_A^{DR}(z) = \frac{c}{2H_o} \left[ 1 - \frac{1}{(1+z)^2} \right]. \quad (\text{A.88})$$

La formule (A.87) est bien entendu identique à la formule (A.67), obtenue sous l'hypothèse  $\eta = 1$ . Le cône de lumière est en effet toujours vide si l'Univers est vide (cfr. modèle de Milne).

2)  $\Omega_o = 1$

$$D_A^{DR}(z_1, z_2) = \frac{2c}{5H_o} \left[ \frac{1}{(1+z_1)^{3/2}} - \frac{1}{(1+z_2)^{5/2}} \right]. \quad (\text{A.89})$$

Et si  $z_1 = 0$  :

$$D_A^{DR}(z) = \frac{2c}{5H_o} \left[ 1 - \frac{1}{(1+z)^{5/2}} \right]. \quad (\text{A.90})$$

3)  $\Omega_o > 1$

$$D_A^{DR}(z_1, z_2) = \frac{c}{H_o} \left[ \frac{1+z_1}{4(\Omega_o-1)^2} \left( \frac{\sqrt{\Omega_o z_2 + 1}(3\Omega_o z_2 + 5\Omega_o - 2)}{(1+z_2)^2} - \frac{\sqrt{\Omega_o z_1 + 1}(3\Omega_o z_1 + 5\Omega_o - 2)}{(1+z_1)^2} \right) + \frac{3(1+z_1)\Omega_o^2}{4(\Omega_o-1)^{5/2}} \arctan \left( \frac{\sqrt{\Omega_o - 1}(\sqrt{\Omega_o z_2 + 1} - \sqrt{\Omega_o z_1 + 1})}{\Omega_o - 1 + \sqrt{(\Omega_o z_1 + 1)(\Omega_o z_2 + 1)}} \right) \right]. \quad (\text{A.91})$$

4)  $\Omega_o < 1$

$$D_A^{DR}(z_1, z_2) = \frac{c}{H_o} \left[ \frac{1+z_1}{4(1-\Omega_o)^2} \left( \frac{\sqrt{\Omega_o z_2 + 1}(3\Omega_o z_2 + 5\Omega_o - 2)}{(1+z_2)^2} - \frac{\sqrt{\Omega_o z_1 + 1}(3\Omega_o z_1 + 5\Omega_o - 2)}{(1+z_1)^2} \right) + \frac{3(1+z_1)\Omega_o^2}{4(1-\Omega_o)^{5/2}} \operatorname{artanh} \left( \frac{\sqrt{1-\Omega_o}(\sqrt{\Omega_o z_2 + 1} - \sqrt{\Omega_o z_1 + 1})}{\Omega_o - 1 + \sqrt{(\Omega_o z_1 + 1)(\Omega_o z_2 + 1)}} \right) \right]. \quad (\text{A.92})$$

### A.5.4 Discussion : quel modèle adopter ?

Au vu des hypothèses sous-jacentes à la construction d'un Univers inhomogène, quel modèle devons-nous adopter pour calculer les distances angulaires ou les distances luminosité ?

La réponse est liée au problème de la conservation de l'énergie et de l'équilibre des amplifications et désamplifications des faisceaux.

Considérons une sphère centrée sur une source lumineuse. La conservation du flux implique que le flux *moyen* mesuré par un observateur situé en un point quelconque de la surface de cette sphère ne dépend pas de la distribution de la matière à l'intérieur de la sphère (pour autant que la matière soit transparente). Le flux *moyen* mesuré dans un Univers inhomogène doit être égal au flux que l'on mesurerait dans un Univers homogène FLRW.

Il faut donc que dans un Univers inhomogène, l'amplification *moyenne* due au cisaillement du faisceau par les objets compacts soit égale à l'amplification due à la focalisation que ces objets auraient produite s'ils avaient été uniformément répartis.

Si la profondeur optique associée aux objets compacts est très petite ( $\tau \ll 1 \Leftrightarrow \eta \sim 1$ ), il suffit de considérer l'effet de l'objet compact le plus proche du faisceau. Weinberg (1976) pour le cas où l'Univers est lui-même presque vide ( $\Omega_o \ll 1$ ), puis Peacock (1986) pour  $\Omega_o$  quelconque, ont en effet démontré analytiquement que l'amplification moyenne  $\langle A \rangle$  produite par le cisaillement ( $\langle A \rangle = 1 + 2\tau$ )<sup>5</sup> compense exactement la désamplification résultant de la suppression d'une fraction  $1 - \eta$  de la matière du faisceau. On retrouve donc en moyenne l'amplification du modèle FLRW. En moyenne, la distance angulaire sera donc celle prédite par le modèle FLRW homogène.

Cependant la distribution des amplifications relatives au modèle FLRW n'est pas gaussienne : il y a un grand nombre de faibles désamplifications relatives, compensé par quelques amplifications relatives importantes. Donc, si l'on choisit une source au hasard, la distance angulaire la plus probable est celle prédite par la formulation de Dyer-Roeder. Mais dans ce cas de faible profondeur optique,  $\eta \sim 1$  et  $D(\eta) \sim D(\eta = 1)$ , donc la distance prédite par le modèle homogène représente une très bonne approximation<sup>6</sup>; autrement dit, l'écart à la loi de conservation de l'énergie est très faible (de l'ordre de  $2\tau$ ).

Pour les grandes profondeurs optiques ( $\tau \sim 1 \Rightarrow \eta \sim 0$ ), il n'existe plus de formule analytique donnant l'amplification moyenne due au cisaillement par les objets compacts, en raison des effets non linéaires résultant de la superposition des sections efficaces. Il est cependant confirmé numériquement (Young 1981) que l'amplification moyenne vaut toujours l'amplification attendue pour la focalisation par la densité de surface équivalente. Et donc, *en moyenne*, la distance angulaire classique est toujours valable. Evidemment, les distances à des objets individuels sont beaucoup plus dispersées autour de cette moyenne (et de façon plus symétrique). Parce que la distance de Dyer-Roeder *ne tient pas compte du cisaillement*, elle représente des lignes de visée *particulièrement vides* dans un Univers fortement inhomogène. La distance de Dyer-Roeder n'est donc pas représentative de la distance typique d'un objet dans un tel Univers, et il faut lui préférer la distance angulaire classique du

<sup>5</sup>Ce résultat est indépendant de la distribution des objets compacts et reste valable pour l'effet microlentille produit par un plan d'étoiles ; on a alors  $\tau = \kappa_* \ll 1$ , et  $\langle A \rangle = (1 - \kappa_*)^{-2} \sim 1 + 2\tau$ .

<sup>6</sup>C'est également vrai si l'Univers est très peu dense en moyenne : on peut montrer que si  $\Omega_o = 0, 1$ , et si toute la matière est sous forme compacte ( $\eta = 0$ ), la distance angulaire Dyer-Roeder d'une source de redshift  $z = 3$  n'est supérieure que de 8% à la distance FLRW classique.

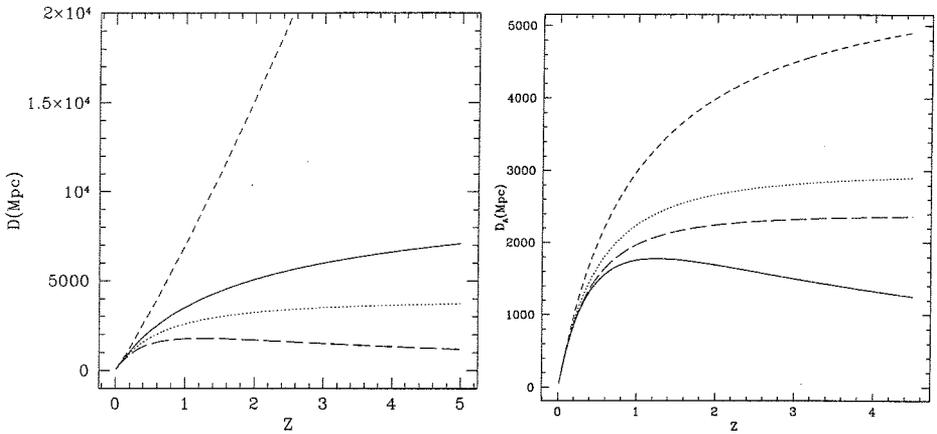


FIG. A.5: À gauche : comportements des différents types de distances en fonction du redshift ( $\Omega_o = 1, \lambda_o = 0, \eta = 1, H_o = 50 \text{ km/s/Mpc}$ ) :  $D_p$  (trait continu),  $l$  (trait pointillé),  $D_l$  (trait interrompu court) et  $D_A$  (trait interrompu long). À droite : distance angulaire dans différents types d'Univers en fonction de  $z$  ( $H_o = 50 \text{ km/s/Mpc}$ ) :  $(\Omega_o, \lambda_o, \eta) = (1, 0, 1)$  (trait continu),  $(\Omega_o, \lambda_o, \eta) = (0, 0, 1)$  (trait pointillé),  $(\Omega_o, \lambda_o, \eta) = (0, 1, 1)$  (trait interrompu court) et  $(\Omega_o, \lambda_o, \eta) = (1, 0, 0)$  (trait interrompu long).

modèle FLRW.<sup>7</sup>

Nous voyons donc au terme de cette analyse que les concepts de tube vide de matière et de distance angulaire de Dyer-Roeder sont peu utiles en pratique, car soit la quantité relative de matière sous forme inhomogène est peu importante et l'écart au modèle FLRW reste faible, soit elle est plus importante et la distance de Dyer-Roeder est peu représentative de la distance la plus probable.

## A.6 Illustrations numériques

La plupart des résultats obtenus précédemment sont analytiques si  $\Omega_o$  est nul ou si  $\lambda_o$  est nul. Dans le cas contraire, une intégration numérique doit être réalisée. Dans cette dernière situation, on se référera utilement à l'algorithme numérique *ANGSIZ* développé par P. Helbig (voir Kayser et al. 1997) pour le calcul des distances angulaires. À partir de la distance angulaire, on peut obtenir la distance luminosité et la distance propre dans un Univers homogène et euclidien en appliquant les relations de réciprocity (A.23c). Ce programme intègre directement l'équation différentielle (A.84a) plutôt que d'effectuer des quadratures, dont la convergence numérique est lente. Cependant, dans les cas analytiques, il est toujours préférable d'utiliser les formules adéquates.

Le graphique de gauche de la Fig. A.5 illustre le comportement des distances en fonction du redshift dans le cadre du modèle cosmologique "standard" ( $\Omega_o = 1, \lambda_o = 0, \eta = 1$ ). La

<sup>7</sup>La conservation du flux implique un facteur correctif dans l'estimation de la probabilité de mirage gravitationnel si les distances de Dyer-Roeder sont utilisées malgré tout pour estimer les sections efficaces (Ehlers & Schneider 1986).

distance luminosité est plus grande que la distance propre, alors que la distance angulaire et la distance lumière sont inférieures à la distance propre. La distance angulaire passe par un maximum, à cause de la convergence produite par la matière présente dans le faisceau lumineux. La distance lumière converge vers la distance de l'horizon, c'est-à-dire la distance parcourue par la lumière depuis la naissance de l'Univers. À  $z = 5$ , le "look-back time" associé à la distance lumière est d'environ 13 milliards d'années.

La distance angulaire est présentée sur le graphique de droite de la Fig. A.5 pour différents modèles cosmologiques. Dans un Univers vide de matière ou "inhomogène" ("empty beam",  $\eta = 0$ ), la distance angulaire en fonction du redshift ne passe plus par un maximum, puisque dans ces situations, il n'y a pas de matière présente dans le faisceau. La distance angulaire d'un objet de redshift donné est la plus grande dans le modèle inhomogène.

## A.7 Transport d'un faisceau lumineux en Relativité Générale

Dans cette Section, nous développons la théorie de la déformation d'un faisceau lumineux dans le cadre du formalisme de la Relativité Générale, à partir de l'équation de déviation des géodésiques, et en utilisant les équations du champ non résolues (c'est-à-dire pour un Univers tout à fait général). Dans le cas d'un Univers FLRW, nous retrouverons des résultats découverts intuitivement dans la Section A.2, mais avec une interprétation physique plus robuste. D'autre part, ce formalisme permet aussi de comparer le transport d'un faisceau à l'échelle de l'Univers avec le phénomène beaucoup plus local de lentille gravitationnelle. Il permet également, dans le cadre de certaines approximations, de prédire l'influence de l'inhomogénéité locale de la matière sur le transport du faisceau et donc sur les distances.

Cette section se subdivise en 5 parties. Les deux premières introduisent la description d'un *rayon* et d'un *faisceau* lumineux ; la troisième définit les déformations possibles que peut subir un faisceau lumineux ; la quatrième partie démontre les équations de transport des "scalaires optiques", ou équations de Sachs ; enfin la dernière partie établit l'équation de focalisation du faisceau lumineux et l'équation différentielle satisfaite par la distance angulaire dans un Univers FLRW (éq. (A.80)).

### A.7.1 Description d'un rayon lumineux : le quadri-vecteur d'ondes

La description d'un rayon lumineux dans un espace courbe repose immédiatement sur celle valable dans l'espace-temps de Minkowsky. Cette dernière est la généralisation à 4 dimensions du formalisme de l'*optique géométrique*<sup>8</sup> dans un espace euclidien, qui stipule que la direction de propagation du rayon lumineux est décrite par le vecteur d'ondes (spatial),  $k^i$ .

Le tri-vecteur  $k^i$  est donc tangent à la trajectoire spatiale. Il s'écrit :

$$k^i = \frac{2\pi}{\lambda_{em}} \left( \frac{dx^1}{dl}, \frac{dx^2}{dl}, \frac{dx^3}{dl} \right) = \frac{\omega_{em}}{c} \left( \frac{dx^1}{dl}, \frac{dx^2}{dl}, \frac{dx^3}{dl} \right),$$

<sup>8</sup>Notre description ne sera donc valable que là où l'approximation de l'optique géométrique est valable, c'est-à-dire loin de dégénérescences telles que les *caustiques*.

où  $l$  est un paramètre affiné le long de la trajectoire,  $\lambda_{em}$  est la longueur d'onde du rayonnement et  $\omega_{em}$  sa pulsation, dans le référentiel de la source.

La description classique d'un champ de rayonnement lumineux découple les variables d'espace et de temps :

$$I(t, \vec{x}) = I_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}.$$

Le temps et l'espace s'unissent donc par un produit scalaire de l'espace-temps de Minkowsky, à condition de définir la 1-forme à 4 dimensions :

$$k_\alpha = (-\omega_{em}, k_1, k_2, k_3). \quad (\text{A.93})$$

Le produit scalaire de la 1-forme d'ondes et du quadri-vecteur position définit la *phase* du rayonnement,  $S$  :

$$I(t, \vec{x}) = I_0 e^{iS(\vec{x}, t)} \Leftrightarrow S = k_\alpha x^\alpha.$$

Le quadri-vecteur d'ondes est donc également le gradient de la phase et s'écrit :

$$k^\alpha = \eta^{\alpha\beta} k_\beta = \eta^{\alpha\beta} S_{,\beta} = \left( \frac{\omega_{em}}{c^2}, k^1, k^2, k^3 \right),$$

où  $\eta_{\alpha\beta}$  est le tenseur métrique associé à l'espace-temps de Minkowsky. Le quadri-vecteur d'ondes unit donc le tri-vecteur d'ondes spatial et l'impulsion, pour constituer un quadri-vecteur de fréquence. Vu que  $\frac{dx^0}{dt} = \frac{1}{c}$  dans l'espace vide et localement plat de Minkowsky et vu la définition de  $k^i$ ,  $k^\alpha$  peut finalement s'écrire :

$$k^\alpha = \frac{\omega_{em}}{c} \frac{dx^\alpha}{dl}. \quad (\text{A.94})$$

Ainsi donc, le quadri-vecteur d'ondes est *tangent* à la trajectoire spatio-temporelle. Il joue le même rôle que le vecteur quadri-vitesse  $u^\alpha$  d'une particule matérielle. De plus, puisque la lumière suit une trajectoire en ligne droite dans l'espace et à vitesse constante, donc une ligne droite dans l'espace-temps (euclidien), il vient :

$$\frac{dk^\alpha}{dl} = 0.$$

Dans un espace-temps quelconque, il faut exprimer la relation précédente en termes de dérivée *covariante*. Par conséquent, le quadri-vecteur d'ondes  $k^\alpha$  satisfait les relations suivantes :

$$\frac{Dk^\alpha}{dl} = 0, \quad (\text{A.95})$$

$$k^\alpha = g^{\alpha\beta} S_{,\beta}. \quad (\text{A.96})$$

Ainsi, le vecteur tangent à la trajectoire est donc transporté parallèlement et *le rayon lumineux est une géodésique de l'espace-temps*. Il est défini comme le gradient de la phase.

En outre, le quadri-vecteur d'ondes  $k^\alpha$  est bien *un vecteur nul* :

$$k^\alpha k_\alpha = -\frac{\omega^2}{c^2} + |k|^2 = 0. \quad (\text{A.97})$$

## A.7.2 Système de rayons et faisceau lumineux

La présentation qui suit est inspirée de l'ouvrage de Schneider, Ehlers et Falco "Gravitational Lenses" (SEF; 1992) et de celui de Peebles "Principles of Physical Cosmology" (1993).

### Introduction

Considérons maintenant une collection de rayons lumineux associés à une fonction de phase  $S(x^\alpha)$  (ce que l'on appelle théoriquement une congruence nulle). Chaque rayon est paramétrisé par un paramètre affín  $l$  le long de sa trajectoire et par 3 paramètres  $y_1, y_2$  et  $y_3$  caractérisant la phase et la position du rayon choisi par rapport à un rayon central  $\gamma$ . Ce système de rayons lumineux est donc un système de géodésiques décrit par le champ vectoriel :

$$x^\alpha(l; y_1, y_2, y_3).$$

Par définition (éq. A.94), le vecteur d'ondes s'écrit :

$$k^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial l}.$$

Enfin, deux rayons lumineux infiniment voisins, caractérisés par les paramètres  $y_1, y_2, y_3$  et  $y_1 + \delta y_1, y_2 + \delta y_2, y_3 + \delta y_3$ , sont connectés par le *vecteur de connexion* défini par :

$$\delta x_\alpha = \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_i} \delta y_i. \quad (\text{A.98})$$

Ainsi donc, par la relation entre la phase et le vecteur d'ondes (A.96), deux points de l'espace-temps reçoivent de la lumière en phase si et seulement s'ils sont connectés par le vecteur  $\delta x_\alpha$  tel que :

$$k_\alpha \delta x^\alpha = 0. \quad (\text{A.99})$$

### Non unicité de la paramétrisation

Les changements de variable suivants du paramètre affín et des  $y_i$  conservent la nature du système de géodésiques :

$$\begin{cases} l' = l + h(y_i) \\ y'_i = g_i(y_1, y_2, y_3) \end{cases} \quad (\text{A.100})$$

En effet, l'équation des géodésiques est conservée par un tel changement de variables. De même, le vecteur  $k^\alpha$  reste invariant. Par contre, la composante selon  $k^\alpha$  du quadri-vecteur de connexion varie :

$$\delta x'^\alpha = \delta x^\alpha - \delta h k^\alpha.$$

Cependant,  $\delta x'^\alpha$  et  $\delta x^\alpha$  connectent les deux mêmes rayons. De plus, ils les connectent en deux points de l'espace-temps qui sont également en phase (sur la même hypersurface de phase) car la reparamétrisation (A.100) conserve l'équation (A.99). (N.B. : Cette dernière est un produit scalaire avec un vecteur nul, c'est-à-dire orthogonal à lui-même.)

Le faisceau lumineux est défini pour un observateur O, situé en P et de quadri-vitesse  $u^\alpha$ , comme l'ensemble des rayons proches du rayon central qui lui parviennent *simultanément*. Cela revient à sélectionner la paramétrisation à l'aide de laquelle tous les vecteurs  $\delta x^\alpha$  connectant le rayon central à ses proches voisins sont des vecteurs de type spatial, c'est-à-dire tels que :

$$u_\alpha \delta x^\alpha = 0. \tag{A.101}$$

Dans le référentiel local attaché à l'observateur, la relation précédente implique que  $\delta x^0 = 0$  et la relation (A.99) se réduit à l'expression classique tri-dimensionnelle :  $k \cdot \delta \vec{x} = 0$ , définissant le faisceau lumineux comme la surface perpendiculaire à la direction de propagation.

Puisque la reparamétrisation est arbitraire, elle peut être choisie en fonction de la vitesse de l'observateur en P et les rayons lumineux constituant le faisceau sont identiques pour tout observateur situé en P, puisque la relation (A.99) est conservée. Autrement dit, les caractéristiques d'un faisceau lumineux infinitésimal en un point P ne dépendent pas de la vitesse de l'observateur situé en P.

### Choix de la base

Nous souhaitons connaître la modification de la section spatiale du faisceau vu par deux observateurs situés aux points  $l$  et  $l + dl$  sur le rayon central  $\gamma$ .

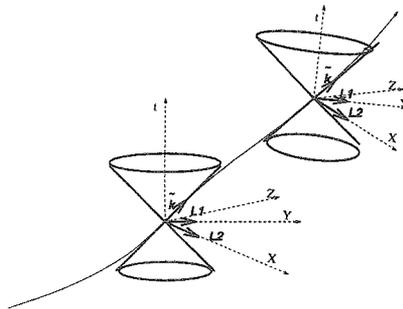


FIG. A.6: Transport de la base de coordonnées.

Par définition, le vecteur  $k^\alpha$  est transporté parallèlement entre ces deux points (éq. (A.95)). Ainsi donc, si dans la base locale de Minkowsky attachée au point  $l$ , la composante spatiale du vecteur  $k^\alpha$  pointe dans la direction OZ, cette direction sera conservée dans la base locale de Minkowsky attachée au point  $l + dl$  si celle-ci est le résultat du transport parallèle de la base attachée au point  $l$ . Ce choix particulier du référentiel en  $l + dl$  revient à sélectionner en

$l + dl$  l'observateur dont la quadri-vitesse  $u^\alpha$  est le fruit du transport parallèle de la quadri-vitesse de l'observateur situé en  $l$ <sup>9</sup>.

L'indépendance des caractéristiques du faisceau lumineux vis-à-vis de la vitesse de l'observateur (cfr. ci-dessus) permet un tel choix arbitraire (et simplificateur) de l'observateur.<sup>10</sup>

Définissons le vecteur purement géométrique (ou cinématique), tangent à la trajectoire en  $l$  :

$$\frac{\omega_{em}}{c} \tilde{k}^\alpha = k^\alpha \Leftrightarrow \tilde{k}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dl}. \quad (\text{A.102})$$

Grâce à ces conventions, en tout  $l$ , nous pouvons exprimer très simplement dans la base locale de Minkowsky le vecteur  $\tilde{k}^\alpha$  et les 2 vecteurs spatiaux orthogonaux  $L_1^\alpha$  et  $L_2^\alpha$  du plan OXY, qui définissent "l'écran" de l'observateur en  $l$ , relatif à  $\tilde{k}^\alpha, u^\alpha$  (Voir Fig. A.6).

$$\begin{cases} \tilde{k}^\alpha = \mathcal{W}(\frac{1}{c}, 0, 0, 1) \\ L_1^\alpha = (0, 1, 0, 0) \\ L_2^\alpha = (0, 0, 1, 0) \end{cases}, \quad (\text{A.103})$$

où  $\mathcal{W}$  est une constante multiplicative prenant en compte l'influence de la vitesse de l'observateur sur le module de  $\tilde{k}^\alpha$  (redshift). Cette constante n'affecte pas les caractéristiques spatiales du faisceau, car ce sont les propriétés suivantes qui sont importantes pour la suite de la démonstration.

Puisque le transport parallèle conserve le produit scalaire entre 2 vecteurs, et donc en particulier leur orthogonalité (car  $g_{\alpha\beta;\beta} = 0$ ), nous avons également, pour tout  $l$ , les relations suivantes :

$$\begin{cases} \tilde{k}_\alpha \tilde{k}^\alpha = 0, & \frac{D\tilde{k}^\alpha}{dl} = 0 \\ L_i^\alpha \tilde{k}_\alpha = 0 \\ L_i^\alpha L_{j\alpha} = \delta_{ij}, & \frac{DL_i^\alpha}{dl} = 0 \end{cases}. \quad (\text{A.104})$$

Démontrons tout d'abord un lemme qui spécifie la conservation de la relation (A.99) également tout au long du transport du faisceau.

### Lemme :

Les rayons qui forment un faisceau lumineux en un évènement P du rayon central  $\gamma$  forment également un faisceau lumineux en tout évènement P' de  $\gamma$  :

$$\frac{D(\tilde{k}_\alpha \delta x^\alpha)}{dl} = 0. \quad (\text{A.105})$$

<sup>9</sup>L'espace tri-dimensionnel n'est en effet pas absolu en Relativité Générale, mais dépend de la quadri-vitesse de l'observateur dans l'espace-temps.

<sup>10</sup>Bien sûr, la fréquence du rayonnement lumineux perçu par un observateur dépend de la vitesse de ce dernier. Si  $\tau$  est le temps propre dans le référentiel de l'observateur, par définition celui-ci perçoit la pulsation :  $\omega_{obs} = -\frac{dS}{d\tau} = -k_\alpha u^\alpha$ , où  $u^\alpha$  est la quadri-vitesse de l'observateur par rapport à la source.

**Démonstration :**

Puisque nous dérivons le long d'une géodésique, nous avons :

$$\frac{D(\tilde{k}_\alpha \delta x^\alpha)}{dl} = \tilde{k}_\alpha \frac{D\delta x^\alpha}{dl} = \tilde{k}_\alpha \left( \frac{d\delta x^\alpha}{dl} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \tilde{k}^\beta \delta x^\gamma \right) (*).$$

La trajectoire  $x^{\alpha\alpha}$ , connectée par le vecteur déplacement, est aussi une géodésique, donc son vecteur tangent (qui est  $\tilde{k}'^\alpha$ ) est un vecteur nul :

$$\tilde{k}'^\alpha g_{\alpha\beta} \tilde{k}'^\beta = 0,$$

et

$$\begin{aligned} x'^\alpha &= x^\alpha + \delta x^\alpha \\ \tilde{k}'^\alpha &= \tilde{k}^\alpha + \frac{d\delta x^\alpha}{dl} \end{aligned}$$

Et par conséquent :

$$\left( \tilde{k}^\alpha + \frac{d\delta x^\alpha}{dl} \right) g_{\alpha\beta}(x + \delta x) \left( \tilde{k}^\beta + \frac{d\delta x^\beta}{dl} \right) = 0.$$

Au premier ordre en  $\delta x^\alpha$ , et avec  $g_{\alpha\beta}(x + \delta x) = g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta,\gamma} \delta x^\gamma$ , il vient :

$$2\tilde{k}_\alpha \frac{d\delta x^\alpha}{dl} + g_{\alpha\beta,\gamma} \tilde{k}_\alpha \tilde{k}_\beta \delta x^\gamma = 0. (**)$$

La preuve vient en explicitant  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  en fonction du tenseur métrique dans (\*) en remplaçant  $\tilde{k}_\alpha \frac{d\delta x^\alpha}{dl}$  grâce à la relation (\*\*), et en utilisant les relations de symétrie sur les indices.

Puisque le vecteur  $\tilde{k}^\alpha$  est nul, l'équation (A.105) signifie qu'en toute généralité, le vecteur de connexion  $\delta x^\alpha$  possède, pour l'observateur situé en  $P'$ , une composante dans le plan  $(L_1^\alpha, L_2^\alpha)$  orthogonal à la direction spatiale de propagation *et* une composante selon le vecteur (nul)  $\tilde{k}^\alpha$  :

$$\delta x^\alpha = \sum_{i=1,2} d_i(l) L_i^\alpha + \epsilon(l) \tilde{k}^\alpha. \tag{A.106}$$

Il est *impossible* à l'aide d'une reparamétrisation (A.100) d'annuler  $\epsilon(l)$  pour tout  $l$ <sup>11</sup>.

La suite de la démonstration peut se faire de façon très abstraite en considérant la projection de  $\delta x^\alpha$  sur l'écran  $(L_1^\alpha, L_2^\alpha)$  et en définissant mathématiquement les grandeurs observables (focalisation et cisaillement) en fonction de  $\tilde{k}^\alpha$ , lui-même connecté à  $\delta x^\alpha$  au moyen d'une "équation de transport". L'application de l'identité de Ricci au vecteur  $\tilde{k}^\alpha$  exprimé en fonction des grandeurs observables fournit alors les équations de Sachs (SEF).

Nous préférons la voie plus heuristique ouverte par Peebles (1993), qui fait appel d'une part à une dérivation intuitive des grandeurs caractéristiques du faisceau en fonction des  $d_i(l)$  et, d'autre part, à l'équation de déviation des géodésiques.

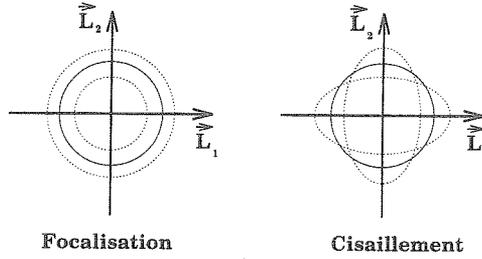


FIG. A.7: Déformations géométriques d'un faisceau de section circulaire.

### A.7.3 Déformations de la section d'un faisceau lumineux

Un faisceau lumineux est décrit par l'évolution en fonction de  $l$  de sa section dans un plan localement orthogonal à sa direction de propagation.

Toute déformation peut se décomposer en un terme de déformation *isotrope*, et un terme de déformation *anisotrope* (Voir Fig. A.7). Le premier concerne l'expansion ou la contraction du faisceau ; il s'agit de la *focalisation*. Comme nous le verrons, la matière agit toujours sur le faisceau dans le sens d'une contraction (ou focalisation positive), c'est-à-dire d'une *convergence*. Le second terme représente le *cisaillement* du faisceau. Il transforme la section du faisceau originellement circulaire en une section elliptique.

Si les  $d_i$  ( $i = 1, 2$ ) sont les composantes du faisceau selon les directions  $\vec{L}_1$  et  $\vec{L}_2$  du plan orthogonal à la trajectoire en  $l$  (voir Fig. A.6), l'expression générique de la déformation des  $d_i$  s'écrit sous forme matricielle de la façon suivante :

$$\frac{dd_i}{dl} = \sum_j [\theta \delta_{ij} + w_{ij}] d_j, \quad (\text{A.107})$$

où :

- $\theta \delta_{ij}$  = expansion/contraction ; matrice unitaire, diagonale ;
- $w_{ij} = \begin{pmatrix} \rho & \sigma \\ \sigma & -\rho \end{pmatrix}$  = matrice de cisaillement (oblate si  $\rho > 0$ ) ; symétrique et de trace nulle.

**N.B. :** La matrice de cisaillement peut toujours être diagonalisée : il suffit de choisir le bon angle de rotation pour que le système de référence coïncide avec les axes principaux du cisaillement (cfr. Fig. A.7).

Parce que l'équation de déviation des géodésiques est une équation différentielle d'ordre 2, dérivons l'expression (A.107) par rapport à  $l$ . Nous obtenons de la sorte :

$$\frac{d^2 d_i}{dl^2} = \sum_j \left[ \left( \frac{d\theta}{dl} + \theta^2 + \frac{1}{2} w^2 \right) \delta_{ij} + \left( \frac{dw_{ij}}{dl} + 2\theta w_{ij} \right) \right] d_j, \quad (\text{A.108})$$

où  $\frac{w^2}{2} = \frac{1}{2} w_{ij} w^{ij} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j (w_{ij} w_{ij}) = \rho^2 + \sigma^2$  est le carré de l'amplitude du cisaillement.

<sup>11</sup>Une erreur s'est glissée à ce niveau dans Peebles 1993 ; voir Seitz et al. 1994.

Relions à présent l'expansion et le cisaillement à une grandeur directement mesurable qui est la surface  $A$  du faisceau. En  $l + \delta l$ , cette surface vaut :

$$A(l + \delta l) = dd'_1 dd'_2,$$

où  $d'_i = d_i(l + \delta l)$ . Si  $\left| \frac{\partial d'}{\partial d} \right|$  est le jacobien de cette transformation de variable, nous avons :

$$A(l + \delta l) = \left| \frac{\partial d'}{\partial d} \right| dd_1 dd_2 = \left| \frac{\partial d'}{\partial d} \right| A(l). \quad (\text{A.109})$$

Plus particulièrement, la transformation infinitésimale entre  $l$  et  $l + \delta l$  s'écrit au premier ordre en  $\delta l$  en fonction de  $\theta$  et de  $w_{ij}$  de la manière suivante (voir éq. (A.107)) :

$$d'_i = d_i(l + \delta l) = d_i(l) + \frac{dd_i}{dl} \delta l = d_i(l) + \sum_j [\theta \delta_{ij} + w_{ij}] d_j \delta l,$$

et le jacobien de la transformation s'écrit :

$$\left| \frac{\partial d'}{\partial d} \right| = \begin{vmatrix} 1 + (\theta + w_{11})\delta l & w_{12}\delta l \\ w_{21}\delta l & 1 + (\theta + w_{22})\delta l \end{vmatrix} = 1 + 2\theta \delta l.$$

La relation (A.109) devient finalement :

$$\frac{dA}{dl} = 2\theta A. \quad (\text{A.110})$$

Ainsi donc, au premier ordre, l'évolution de la surface du faisceau est contrôlée uniquement par le paramètre d'expansion.

#### A.7.4 Transport du faisceau : équations de Sachs

Les équations de Sachs sont obtenues en substituant au vecteur déplacement  $\delta x^\alpha$  dans l'équation de déviation des géodésiques son expression générique (A.106) et en égalant terme à terme le résultat avec l'expression (A.108).

L'équation de déviation des géodésiques<sup>12</sup> s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{D^2 \delta x^\alpha}{dl^2} = R_{\beta\gamma\delta}^\alpha \tilde{k}^\beta \tilde{k}^\gamma \delta x^\delta, \quad (\text{A.111})$$

où  $R_{\beta\gamma\delta}^\alpha$  est le tenseur de Riemann.

En injectant la décomposition (A.106) de  $\delta x^\alpha$  et en utilisant les propriétés (A.104) des vecteurs de décomposition, on obtient :

$$\sum_j \frac{D^2 d_j(l)}{dl^2} L_j^\alpha + \frac{D^2 \epsilon(l)}{dl^2} \tilde{k}^\alpha = R_{\beta\gamma\delta}^\alpha \tilde{k}^\beta \tilde{k}^\gamma \left[ \sum_j d_j L_j^\delta + \epsilon k^\delta \right].$$

<sup>12</sup>L'équation de déviation des géodésiques est valable également pour un vecteur  $\delta x^\alpha$  non infinitésimal (Schutz, 1985).

Projetons les 2 membres de l'équation précédente sur  $L_i^\nu$  (au moyen du produit intérieur  $g_{\alpha\nu} L_i^\alpha$ ). En appliquant toujours les propriétés (A.104), il vient :

$$\frac{D^2 d_i}{dl^2} = \sum_j R_{\nu\beta\gamma\delta} L_i^\nu \tilde{k}^\beta \tilde{k}^\gamma L_j^\delta d_j + \epsilon R_{\nu\beta\gamma\delta} L_i^\nu \tilde{k}^\beta \tilde{k}^\gamma \tilde{k}^\delta. \quad (\text{A.112})$$

En raison des propriétés d'antisymétrie du tenseur de Riemann sur les 2 premiers et les 2 derniers indices, le second terme du membre de droite de l'équation précédente est identiquement nul<sup>13</sup> : la composante du vecteur déplacement parallèle à la direction de propagation n'influence pas les propriétés spatiales du faisceau.

D'autre part, il est très intéressant pour la suite de noter que le tenseur de Riemann (20 composantes indépendantes en raison de ses propriétés de symétrie) peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire de ses traces dans les différentes directions (c'est-à-dire les éléments du tenseur de Ricci), de la courbure scalaire (la trace du tenseur de Ricci) et d'un tenseur de trace nulle,  $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ , appelé le tenseur de Weyl, qui conserve les propriétés d'antisymétrie du tenseur de Riemann sur les 2 premiers et les 2 derniers indices :

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\gamma} R_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} R_{\beta\gamma} - g_{\beta\gamma} R_{\alpha\delta} + g_{\beta\delta} R_{\alpha\gamma}) - (g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}) \frac{\mathcal{R}}{6} + C_{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Forts de ces deux remarques, nous pouvons réécrire l'équation (A.112), en appliquant toujours les propriétés (A.104). Nous obtenons finalement l'équation de transport suivante (en remplaçant l'indice  $\nu$  par l'indice  $\alpha$ ) :

$$\frac{D^2 d_i}{dl^2} = \sum_j -\frac{1}{2} R_{\beta\gamma} \tilde{k}^\beta \tilde{k}^\gamma \delta_{ij} + C_{\alpha\beta\gamma\delta} L_i^\alpha \tilde{k}^\beta \tilde{k}^\gamma L_j^\delta d_j. \quad (\text{A.113})$$

Nous remarquons la grande similitude formelle des équations (A.113) et (A.108). Nous pouvons évaluer terme à terme les seconds membres des 2 équations, car le second terme du second membre de l'équation (A.113) ne contient pas de composante isotrope ( $\propto \delta_{ij}$ ), c'est-à-dire qu'il est de trace nulle :

$$\sum_{j=1,2} C_{\alpha\beta\gamma\delta} L_i^\alpha \tilde{k}^\beta \tilde{k}^\gamma L_j^\delta = 0.$$

(Cela se vérifie aisément à l'aide des composantes des vecteurs  $\tilde{k}^\alpha$  et  $L_i^\alpha$  dans la base locale de Minkowsky, et des propriétés du tenseur de Weyl.)

Par conséquent, les deux équations pour le transport des scalaires optiques  $\theta$  et  $w_{ij}$ , appelées aussi *équations de Sachs* (Sachs 1961) s'écrivent :

$$\frac{d\theta}{dl} + \theta^2 + \frac{1}{2} w^2 = -\frac{1}{2} R_{\alpha\beta} \tilde{k}^\alpha \tilde{k}^\beta, \quad (\text{A.114a})$$

$$\frac{dw_{ij}}{dl} + 2\theta w_{ij} = C_{\alpha\beta\gamma\delta} L_i^\alpha \tilde{k}^\beta \tilde{k}^\gamma L_j^\delta. \quad (\text{A.114b})$$

Il s'agit d'un système d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 et couplées.

<sup>13</sup>Cela se montre facilement par les coordonnées dans la base locale de Minkowsky.

## Interprétation physique des Équations de Sachs (Penrose 1966)

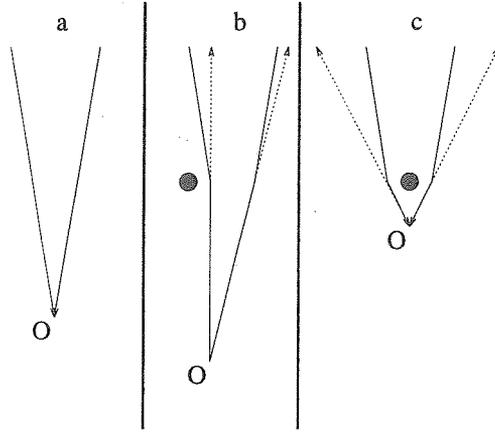


FIG. A.8: Transport d'un faisceau convergeant en  $O$  : -a) dans un Univers vide; -b) en présence de matière à l'extérieur du faisceau; -c) en présence de matière à l'intérieur du faisceau. Les traits pointillés indiquent l'apparence sous laquelle l'observateur  $O$  perçoit le faisceau.

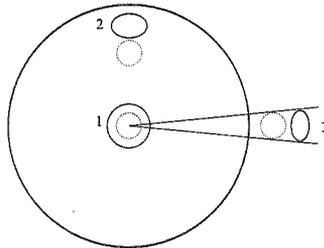


FIG. A.9: Déformations des faisceaux lumineux passant à proximité d'un soleil transparent (grand cercle) : -1) focalisation pure; -2) focalisation et cisaillement; -3) cisaillement pur. L'image déformée est toujours plus grande que l'image originale.

La Fig. A.8 décrit les comportements qualitatifs du faisceau lumineux en présence de matière. Trois situations sont analysées :

1. Lorsque la lumière se propage dans un espace euclidien vide, les termes sources sont nuls dans les équations de Sachs. Aucun cisaillement n'est produit sur le faisceau, tandis qu'une contraction géométrique du faisceau a lieu pour un observateur distant (suffisamment distant de l'objet pour que le faisceau soit infinitésimal; voir Fig. A.8-a) :

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dl} &= -\theta^2 \Rightarrow \theta = \frac{1}{l} \\ \frac{dw_{ij}}{dl} &= 0 \Rightarrow w_{ij} = 0 \end{aligned}$$

2. La présence locale de matière à l'extérieur du faisceau induit un *cisaillement* de celui-ci. En effet, dans ce cas, le terme source de l'équation (A.114a) est toujours nul, tandis que l'espace est courbé à l'intérieur du faisceau en raison de la présence de matière à proximité, et donc le tenseur de Weyl n'est plus nul. Le cisaillement du faisceau en Relativité Générale est donc un effet purement géométrique, qui trouve son origine physique dans l'effet de marée engendré par un champ gravitationnel anisotrope. La déformation produite sur le faisceau peut être comparée à celle créée par une lentille astigmatique. La Fig. A.8-b illustre le transport de la section radiale du faisceau.
3. La présence de matière à l'intérieur du faisceau *focalise* celui-ci. Si cette matière est uniformément ou symétriquement répartie dans le faisceau, elle ne crée pas de cisaillement et elle agit comme une lentille convergente anastigmatique. En effet, dans ce cas, grâce aux équations du champ (éq. (A.26)), la première équation de Sachs peut s'écrire au premier ordre :

$$\frac{d\theta}{dl} = -\theta^2 - \frac{4\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta} \tilde{k}^\alpha \tilde{k}^\beta.$$

Le dernier terme fait intervenir le tenseur d'impulsion-énergie, qui *est toujours positif* pour de la matière "classique" (cfr. Section A.3). Il s'ensuit une extra-fermeture, ou focalisation, du faisceau. L'objet sous-tendu par le faisceau apparaît alors plus grand à l'observateur qu'il n'est en réalité (voir Fig. A.8-c) ; si la taille astrophysique (propre) de l'objet est connue, l'observateur lui attribuera une distance plus petite qu'elle n'est en réalité : c'est l'origine de la différence entre la distance propre et la *distance angulaire*.

Dans le cas général où de la matière est répartie tout le long du faisceau, des effets non linéaires apparaissent à la suite du couplage des équations de Sachs.

La Fig. A.9 illustre de manière simple la perception par un observateur des effets de la focalisation et du cisaillement d'un faisceau passant à travers ou à proximité du soleil, supposé transparent.

## A.7.5 Équation de focalisation et distance angulaire

### Équation de focalisation

L'équation de focalisation décrit l'évolution de la section  $A$  du faisceau en fonction du paramètre affini  $l$ . Elle est obtenue sans aucune difficulté en dérivant l'équation (A.110) par rapport à  $l$  et en remplaçant  $d\theta/dl$  par la première équation de Sachs (A.114a) :

$$\frac{1}{\sqrt{A}} \frac{d^2 \sqrt{A}}{dl^2} = -\frac{1}{2} [R_{\alpha\beta} \tilde{k}^\alpha \tilde{k}^\beta + w^2]. \quad (\text{A.115})$$

En remplaçant le tenseur de Ricci en fonction du tenseur physique d'impulsion-énergie au moyen des équations du champ d'Einstein (éq. A.26), l'équation de focalisation (A.115) peut s'exprimer en fonction du contenu physique de l'Univers. En effet, étant donné que :

$$-\frac{1}{2} R_{\alpha\beta} \tilde{k}^\alpha \tilde{k}^\beta = -\frac{4\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta} \tilde{k}^\alpha \tilde{k}^\beta + 0,$$

il vient :

$$\frac{1}{\sqrt{A}} \frac{d^2 \sqrt{A}}{dl^2} = -\frac{4\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta} \tilde{k}^\alpha \tilde{k}^\beta - \frac{w^2}{2}. \quad (\text{A.116})$$

Par conséquent, la focalisation du faisceau est due d'une part à la matière contenue dans le faisceau, et d'autre part à un terme de cisaillement. Des problèmes peuvent résulter de l'existence de ce dernier, car il est difficile à estimer dans le cas général.

### Distances angulaires dans un Univers FLRW

Par définition, la matière dans un Univers FLRW est distribuée de manière homogène et isotrope. Cela implique par effet de symétrie qu'un faisceau lumineux se propageant dans un tel Univers ne subit pas de cisaillement ( $w = 0$ ).

En adoptant pour l'expression du tenseur  $T_{\alpha\beta}$  celle d'un fluide parfait (éq. (A.27)), le second membre de l'équation (A.116) peut s'explicitier par :

$$-\frac{4\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta} \tilde{k}^\alpha \tilde{k}^\beta = -\frac{4\pi G}{c^4} (\rho + p/c^2) u_\alpha \tilde{k}^\alpha u_\beta \tilde{k}^\beta - 0,$$

où  $u^\alpha = (1, 0, 0, 0)$  est la quadri-vitesse du fluide cosmologique dans le système de coordonnées comobiles. Vu la définition (A.1a) des  $g_{\alpha\beta}$ ,  $u_\alpha (= g_{\alpha\beta} u^\beta) = (-c^2, 0, 0, 0)$  Il vient donc :

$$\frac{1}{\sqrt{A}} \frac{d^2 \sqrt{A}}{dl^2} = -4\pi G (\rho + p/c^2) (\tilde{k}^0)^2. \quad (\text{A.117})$$

Pour poursuivre, il faut expliciter  $\tilde{k}^0(t) = \frac{dt}{dl}$  dans les coordonnées comobiles. Une approche physique intuitive et directe consiste à réaliser que la composante  $\tilde{k}^0(t)$  est proportionnelle à l'impulsion du photon au temps cosmique  $t$ . Or, en raison du phénomène de redshift (éq. (A.11)), celle-ci décroît dans le rapport suivant :

$$\frac{\tilde{k}^0(t)}{\tilde{k}^0(t_e)} = \frac{R(t_e)}{R(t)} = \frac{1}{1 + z(t, t_e)},$$

et par définition, à l'instant d'émission  $t_e$ , on a  $\tilde{k}^0(t_e) = \frac{1}{c}$  pour une source au repos par rapport aux coordonnées comobiles.

Enfin, il est plus commode de prendre le point de vue de l'observateur à l'instant  $t_o$  que celui de la source à l'instant  $t_e$ , et de choisir comme variable courante le temps cosmique au moment de l'émission en lieu et place du temps cosmique à l'instant de réception. Cela revient à faire le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} l \rightarrow -l \\ t \rightarrow t_o \\ t_e \rightarrow t \end{cases}.$$

Finalement :

$$\frac{\tilde{k}^0(t)}{\tilde{k}^0(t_o)} = \frac{R(t_o)}{R(t)} \Rightarrow \frac{dt}{dl} = \tilde{k}^0(t) = \frac{1}{c} \frac{R(t_o)}{R(t)}. \quad (\text{A.118})$$

En remplaçant dans l'équation (A.117)  $\tilde{k}^0$  par la relation (A.118), et en introduisant la distance angulaire définie par  $D_A = \sqrt{A}$ , il vient :

$$\frac{1}{D_A} \frac{d^2 D_A}{dl^2} = -\frac{4\pi G}{c^2} (\rho + p/c^2) \left( \frac{R_o}{R(t)} \right)^2.$$

Enfin, il suffit d'opérer le changement de variable  $l \rightarrow t$  (A.118) dans la dérivée pour aboutir, après quelques réarrangements, à l'équation différentielle gouvernant la distance angulaire en fonction du temps cosmique à l'émission :

$$\ddot{D}_A - \dot{D}_A \frac{\dot{R}}{R} + D_A 4\pi G (\rho + p/c^2) = 0. \quad (\text{A.119})$$

Cette équation est identique à l'équation (A.80). La méthode plus générale et plus physique suivie dans cette section a permis d'utiliser sans les résoudre les équations d'Einstein qui relient le contenu physique et la géométrie de l'Univers. Pour cette raison, nous voyons clairement dans l'équation (A.119) les deux causes qui contribuent à fermer le faisceau. La première est d'origine géométrique et est liée au fait que le faisceau lumineux se propage dans un Univers en expansion. Le second terme traduit l'influence de la matière sur la courbure de l'Univers, et est parfois dénommé *focalisation de Ricci*. Cette focalisation peut être vue comme un effet de la courbure intrinsèque de l'Univers, ou comme un effet de lentille gravitationnelle à l'échelle de l'Univers, dû à la matière située à l'intérieur du cône de lumière (bien qu' il y ait également de la matière à l'extérieur du faisceau lumineux).

L'influence de la constante cosmologique a lieu uniquement à travers le taux d'expansion de l'Univers, c'est-à-dire via la contribution *géométrique* à la fermeture du faisceau lumineux.