Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, Vol. 70, 4-5-6, 2001, pp. 345-364

L'éternel retour des sommes de Riemann-Stieltjes dans l'évolution du calcul intégral*

Jean Mawhin

The eternal return of Riemann-Stieltjes sums in the evolution of the integral calculus

A la mémoire de Pascal Laubin

Abstract

This paper shows the importance of Riemann-Stieltjes sums in the development of integral calculus, from the method of exhaustion to recent integration theories. Contributions of Fermat, Leibniz, Euler, Cauchy, Riemann, Stieltjes, Kurzweil and Henstock are described.

Key words : integral, Riemann-Stieltjes sums, Kurzweil-Henstock integral
Math. Subject Classification : 28-03, 26-03, 01A45, 01A50, 01A55,01A60

1 Introduction

Le but de ce travail est de montrer l'importance des sommes de Riemann-Stieltjes dans l'évolution du calcul intégral, depuis l'Antiquité grecque jusqu'à nos jours. A mi-chemin entre l'histoire des sciences et la mathématique technique, nous n'avons pas craint de commettre quelques anachronismes de notations ou de langage et de nous limiter aux fonctions réelles sur un intervalle borné.

Les sommes de Riemann ont d'abord été utilisées dans le calcul des aires de figures curvilignes et des volumes des solides. Si elles sont encore présentes dans l'introduction du calcul intégral chez LEIBNIZ, elles semblent vouées à la disparition lors du triomphe du concept de calcul intégral comme inverse du calcul différentiel. Elles renaissent avec CAUCHY pour prouver la primitivabilité des fonctions continues et semblent atteindre leur apogée avec RIEMANN dans la première définition de fonction intégrable, et avec STIELTJES

*Texte basé sur une conférence faite en 1995 à l'Université Paul-Sabatier de Toulouse à l'occasion du centenaire de la mort de Stieltjes.

dans sa féconde extension de l'intégrale qui, pour la première fois, la libère de son cocon géométrique. Les contributions de BOREL, LEBESGUE et de leurs continuateurs semblent reléguer les sommes de Riemann-Stieltjes dans les oubliettes de l'histoire. Pourtant, depuis une quarantaine d'années, les travaux de KURZWEIL et HENSTOCK les ont réhabilitées, en montrant qu'une modification formellement minime de la définition de Riemann conduit à une intégrale plus générale que celle de Lebesgue.

2 Les sommes de Riemann dans le calcul exact des aires et des volumes

Le calcul intégral trouve son origine et sa motivation dans les problèmes géométriques de calcul des aires de figures planes curvilignes, des volumes de corps solides ronds, et dans des problèmes de statique comme la détermination des centres de gravité de ces figures ou de ces corps. Les premières recherches remontent à l'Antiquité grecque, avec surtout EUDOXE (IV^e siècle av. J.C.) et ARCHIMÈDE (III^e siècle av. J.C.), qui créent et développent une méthode que le jésuite brugeois GRÉGOIRE DE SAINT-VINCENT baptise, au XVII^e siècle, du nom de **méthode d'exhaustion.** Malgré la concurrence de procédés plus directs et plus efficaces, mais d'une rigueur plus discutable, cette méthode reste longtemps l'idéal des mathématiciens, puisqu'en 1742, soixante ans au moins après la création du calcul différentiel et intégral, MACLAURIN y fait encore appel dans son *Traité des Fluxions* pour donner un exposé plus rigoureux de ce calcul. Au XIX^e siècle, la méthode inspire encore les mathématiciens soucieux de reconstruire le calcul différentiel et intégral sur des bases solides.

Introduisons le problème test de cet article, avant de l'utiliser pour décrire les grandes lignes de la méthode d'exhaustion. Soient $a < b$ deux nombres réels, $I = [a, b]$ l'ensemble des nombres réels x tels que $a \leq x \leq b$, et soit f une fonction réelle définie et positive sur I. Appelons $E(f)$ l'ensemble des points du plan défini par

$$E(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x),\ x \in I\}.$$

Si f est suffisamment régulière, la figure correspondante est le quadrilatère curviligne compris entre le graphe de f, l'axe des abscisses et les parallèles à l'axe des ordonnées menées par les points de coordonnées $(a, 0)$ et $(b, 0)$. Jusqu'au XIX^e siècle, on ne s'occupe que du cas où f est donnée par une formule explicite ou une série de puissances, et le problème consiste à calculer l'**aire** $A(f)$ de $E(f)$, dont l'existence est considérée comme géométriquement évidente, ainsi que ses propriétés de monotonie et d'additivité finie.

La méthode d'exhaustion n'est pas une technique de calcul de $A(f)$, mais bien un procédé de vérification pour une valeur escomptée, souvent obtenue de manière heuristique. Plus exactement, on cherche à montrer que l'aire cherchée est dans un rapport donné avec une autre connue, puisque chez les Grecs et longtemps après, il n'est pas question de nombres réels mais de **grandeurs** et de leurs **rapports**. Pour ne pas alourdir l'exposé, nous nous en tiendrons à une description en termes de nombres réels. La méthode d'exhaustion fait souvent appel à ce qu'on nomme aujourd'hui les **sommes de Riemann**, qu'il est temps de définir de manière précise.

Admettons la formule donnant l'aire d'un rectangle comme produit des longueurs de ses côtés, et le fait que l'aire d'une figure plane formée d'un nombre fini de rectangles ne se recouvrant pas soit égale à la somme de leurs aires. Pour obtenir une valeur approchée de $A(f)$, il est assez naturel de procéder comme suit. On divise I en m intervalles (congruents ou non) $[a_{j-1}, a_j]$, $(1 \leq j \leq m)$, avec

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{m-1} < a_m = b, \tag{1}$$

et l'on considère les rectangles de base $[a_{j-1}, a_j]$ et de hauteur $f(x_j)$, avec

$$x_j \in [a_{j-1}, a_j], \quad (1 \leq j \leq m). \tag{2}$$

Si f est suffisamment régulière, on peut s'attendre à ce que la somme des aires de ces rectangles

$$\sum_{j=1}^{m} f(x_j)(a_j - a_{j-1}) \tag{3}$$

fournisse une approximation de $A(f)$ d'autant meilleure que m sera plus grand. Pour une application $f : I \to \mathbb{R}$ donnée, l'expression (3) est univoquement déterminée par la **partition pointée** ou **P-partition** $\Pi = ((x_j, [a_{j-1}, a_j]))_{1 \leq j \leq m}$, où les a_j et les x_j vérifient (1) et (2). On peut désigner (3) par $S_f(\Pi)$ et l'appeler, suivant une tradition qui remonte à la fin du XIX^e^ siècle, la **somme de Riemann associée à f et à Π**.

A quelques notables exceptions près (en particulier chez ARCHIMÈDE, lorsque les propriétés géométriques de la figure suggèrent une approximation par des polygones, et, comme nous le verrons plus loin, chez FERMAT pour faciliter les calculs) les sommes de Riemann utilisées dans la méthode d'exhaustion correspondent à une division de I en m parties égales et au choix $x_j = a_{j-1}$ $(1 \leq j \leq m)$ ou $x_j = a_j$ $(1 \leq j \leq m)$. Ce sont donc des expressions du type $S_f(\Pi_m)$ et $S_f(\Pi^m)$, où

$$\Pi_m = \left(\left(a + (j-1)\frac{b-a}{m}, \left[a + j\frac{b-a}{m}, a + j\frac{b-a}{m}\right]\right)\right)_{1 \leq j \leq m},$$

et

$$\Pi^m = \left(\left(a + j\frac{b-a}{m}, \left[a + (j-1)\frac{b-a}{m}, a + j\frac{b-a}{m}\right]\right)\right)_{1 \leq j \leq m}.$$

En décomposant si nécessaire la figure $E(f)$ en plusieurs parties, on peut toujours se restreindre, pour les fonctions considérées à l'époque, au cas où f est monotone, disons croissante, sur I. On en déduit aussitôt, pour tout entier positif m, les inégalités

$$S_f(\Pi_m) \leq A(f) \leq S_f(\Pi^m), \tag{4}$$

et, pour la différence des sommes de Riemann, l'égalité

$$S_f(\Pi^m) - S_f(\Pi_m) = \frac{b-a}{m}[f(b) - f(a)]. \tag{5}$$

Supposons maintenant que nous ayons trouvé un nombre réel J tel que

$$S_f(\Pi_m) \leq J \leq S_f(\Pi^m) \tag{6}$$

pour chaque entier positif m. Alors, nécessairement, $A(f) = J$, car si, par exemple, $A(f) < J$, l'axiome d'Archimède entraîne l'existence d'un entier positif q tel que

$$\frac{b-a}{q}[f(b) - f(a)] < J - A(f),$$

et, par (4) et (5), on obtient la contradiction

$$J - A(f) \leq S_f(\Pi^q) - S_f(\Pi_q) = \frac{b-a}{q}[f(b) - f(a)] < J - A(f).$$

On exclut de même la possibilité $A(f) > J$.

Tel est le principe de la **méthode d'exhaustion.** Pour l'appliquer, il faut déterminer au préalable le nombre réel J vérifiant (6). Dans le cas de $I = [0, b]$ et $f(x) = x^k$, où $k \geq 1$ est un entier, on a

$$S_{x^k}(\Pi_m) = \left(\frac{b}{m}\right)^{k+1} \sum_{j=1}^{m-1} j^k, \quad S_{x^k}(\Pi^m) = \left(\frac{b}{m}\right)^{k+1} \sum_{j=1}^{m} j^k,$$

et $J = b^{k+1}L$, si L vérifie, pour tout entier positif m, les inégalités

$$\frac{1}{m^{k+1}} \sum_{j=1}^{m-1} j^k \leq L \leq \frac{1}{m^{k+1}} \sum_{j=1}^{m} j^k.$$

Lorsque $k = 1$, on calcule sans peine les expressions correspondantes, à savoir

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{m}\right) \text{ et } \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{m}\right),$$

et dès lors $L = 1/2$, ce qui entraîne $A(x) = b^2/2$. C'est un moyen sophistiqué de calculer l'aire d'un triangle rectangle isocèle ! Le problème se complique rapidement lorsque k augmente, car on ne possède pas de formule explicite compacte pour la somme des k^e puissances des entiers. Pour $k = 2$, la formule $A(x^2) = b^3/3$, est obtenue par ARCHIMÈDE et, pour $k = 3$ et $k = 4$, des résultats équivalant à $A(x^3) = b^4/4$, $A(x^4) = b^5/5$ sont obtenus par ALHAZEN aux environs de l'an 1000. La formule générale

$$A(x^k) = \frac{b^{k+1}}{k+1}, \tag{7}$$

est conjecturée en 1635 par CAVALIERI, qui la "démontre" pour $k \leq 4$ par sa **méthode des indivisibles.** Dans cette approche, on conçoit $E(f)$ comme la juxtaposition des segments parallèles à l'axe des ordonnées joignant les points $(x, 0)$ et $(x, f(x))$, et l'aire $A(f)$ comme la somme des ordonnées $f(x)$ entre a et b. Qu'une telle idée ait pu donner des résultats corrects provient de ce qu'on ne calcule pas directement des aires, mais des rapports d'aires. Ainsi, pour une seconde fonction g définie sur I, on a, par exemple,

$$\frac{S_f(\Pi^m)}{S_g(\Pi^m)} = \frac{\sum_{j=1}^m f\left(a + \frac{j(b-a)}{m}\right)}{\sum_{j=1}^m g\left(a + \frac{j(b-a)}{m}\right)}.$$

Dès lors, en langage moderne, si l'on fait tendre m vers l'infini, on voit que les aires $A(f)$ et $A(g)$ sont entre elles comme la limite du rapport des sommes des ordonnées étendues aux points de subdivision de I. Citons à ce propos PASCAL, qui, inspiré par la lecture des ouvrages de l'Anversois TACQUET, traite en 1660 le cas où $E(f)$ est une portion de cercle ($f(x) = [b^2 - (x-a)^2]^{1/2}$), et exprime son sentiment sur les liens entre les méthodes d'exhaustion et des indivisibles dans le style polémiste qui l'a rendu célèbre par ailleurs :

> Je ne ferai aucune difficulté d'user de cette expression la somme des ordonnées qui semble ne pas être géométrique à ceux qui n'entendent pas la doctrine des indivisibles, et qui s'imaginent que c'est pécher contre la géométrie que d'exprimer un plan par un nombre infini de lignes; ce qui ne vient que de leur manque d'intelligence puisqu'on n'entend autre chose par là sinon la somme d'un nombre indéfini de rectangles faits de chaque ordonnée avec de petites portions égales du diamètre, dont la somme est certainement un plan, qui ne diffère de l'espace du demi-cercle que d'une quantité moindre qu'aucune donnée.

Dès 1636, dans un travail malheureusement non publié, FERMAT démontre la formule (7) pour un entier positif k quelconque en utilisant la méthode d'exhaustion et des formules de récurrence sur k pour le calcul des sommes $\sum_{j=1}^m j^k$. En 1657, FERMAT prouve une formule conjecturée par WALLIS en 1655, couvrant le cas d'un exposant fractionnaire différent de -1. Pour ce faire, FERMAT a l'idée remarquable d'utiliser des P-partitions dont les points de division a_j ne sont plus équidistants, mais choisis de manière à faciliter le calcul explicite des sommes de Riemann correspondantes. Cette approche simplifie considérablement l'obtention de la formule (7), en évitant le recours aux estimations de sommes de puissances d'entiers. Comme la fonction peut maintenant être singulière à l'origine, nous supposerons $a > 0$. L'idée de FERMAT consiste essentiellement à choisir les intervalles de la P-partition en progression géométrique et non plus arithmétique. Comme l'écrit le mathématicien toulousain :

> Archimède n'a employé la progression géométrique que pour la seule quadrature de la parabole; dans ses autres comparaisons entre quantités hétérogènes, il s'est borné à la seule progression arithmétique. Est-ce parce qu'il avait trouvé que la progression géométrique se prêtait moins bien à la quadrature ? Est-ce parce que l'artifice particulier dont il s'est servi pour carrer avec cette progression la première parabole peut difficilement s'appliquer aux autres ? Quoiqu'il en soit, j'ai reconnu et éprouvé cette progression comme très féconde en quadratures, et je communique volontiers aux géomètres modernes mon invention qui permet

de carrer, par une méthode absoluement identique, et paraboles et hyperboles. [...] Je dis que toutes ces hyperboles à l'infini, sauf une seule, celle d'Appolonius ou la première, peuvent être carrées au moyen d'une progression géométrique par une méthode uniforme et constante.

FERMAT remplace aussi la double vérification de la méthode d'exhaustion par l'ancêtre d'un passage à la limite :

> Imaginons les termes d'une progression géométrique décroissant indéfiniment; soit AG le premier, AH le second, AO le troisième, etc. Supposons que ces termes soient assez rapprochés les uns des autres pour que, suivant la méthode d'Archimède, on puisse *adégaler,* comme dit Diophante, ou égaler par approximation le parallélogramme rectiligne $GE \times GH$ au quadrilatère mixtiligne $GHIE$; nous supposerons de plus que les premiers intervalles GH, HO, OM, etc. des termes progressifs soient suffisamment égaux entre eux, pour que l'on puisse facilement employer la méthode d'Archimède de réduction à l'impossible, par circonscriptions et inscriptions. Il suffit de faire cette remarque une fois pour ne pas s'obliger à revenir et à insister constamment sur un artifice bien connu de tous les géomètres.

Dans notre langage analytique, et pour $f(x) = x^{p/q}$, avec p entier, q entier strictement positif et $p/q \neq -1$, l'idée de la méthode de Fermat correspond au choix des P-partitions

$$\widetilde{\Pi}_m = \left(\left(a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{j-1}{m}}, \left[a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{j-1}{m}}, a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{j}{m}}\right]\right)\right)_{1\leq j\leq m}$$

On trouve alors, par des calculs très simples,

$$S_{x^{p/q}}(\widetilde{\Pi}_m) = \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right] a^{\frac{p+q}{q}} \sum_{j=1}^{m} \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p+q}{qm}}\right]^{j-1} = \frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m}}}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p+q}{qm}}} \left(b^{\frac{p+q}{q}} - a^{\frac{p+q}{q}}\right).$$

Pour obtenir $\lim_{m\to\infty} S_{x^{p/q}}(\widetilde{\Pi}_m)$, il faut, en langage moderne, calculer

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m}}}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p+q}{qm}}}.$$

Si $p \geq 0$, cette limite est évidemment égale à

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{mq}}+\ldots+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{q-1}{mq}}}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{mq}}+\ldots+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p+q-1}{mq}}} = \frac{q}{p+q},$$

puisque $\lim_{m\to\infty} (b/a)^{1/m} = 1$. Si $p < -q$, on obtient

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m}}}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{q+p}{mq}}} = \lim_{m\to\infty} \frac{-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m}}\left[1-\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{m}}\right]}{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{-p-q}{mq}}}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m}}\left[1+\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{mq}}+\ldots+\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{q-1}{mq}}\right]}{1+\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{mq}}+\ldots+\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{-p-q-1}{mq}}} = \frac{q}{p+q}.$$

Donc, dans tous les cas, on trouve

$$A(x^{p/q}) = \frac{q}{p+q}\left[b^{\frac{p+q}{q}} - a^{\frac{p+q}{q}}\right] = \frac{1}{\frac{p}{q}+1}\left[b^{\frac{p}{q}+1} - a^{\frac{p}{q}+1}\right].$$

3 Les sommes de Riemann dans le calcul infinitésimal de Leibniz

On sait que les Grecs n'ont guère fait de progrès en cinématique et que les premières réflexions sur le mouvement non uniforme remontent au Moyen-âge. Ces considérations ne sont pas étrangères à l'idée géniale de NEWTON (1666) d'étudier l'aire $A(f|_{[a,x]})$ située sous le graphe de la restriction de f à $[a, x]$ comme une fonction de l'extrémité x de l'intervalle. Comme NEWTON est en possession du concept de **dérivée,** il obtient, en notations modernes, la formule fondamentale

$$\frac{d}{dx}A(f|_{[a,x]}) = f(x), \tag{8}$$

c'est-à-dire

$$A(f|_{[a,x]}) = F(x) - F(a), \tag{9}$$

si F est une **primitive** de f, c'est-à-dire une fonction dont la dérivée vaut f. En lisant de droite à gauche les tables de dérivées qu'il vient d'obtenir, et en les combinant avec les développements en séries de puissances de nombreuses fonctions, qu'il vient de calculer, NEWTON ramène le difficile calcul de $A(f|_{[a,x]})$ à une simple soustraction lorsque la primitive de f est connue. C'est le cas pour tous les exemples traités avant lui par les méthodes d'exhaustion ou des indivisibles.

Un peu plus tard, entre 1680 et 1690, LEIBNIZ arrive au même résultat par une approche qui élève les sommes de Riemann au statut d'un algorithme. Désignant par Π_L la P-partition $((a_j, [a_{j-1}, a_j]))_{1\leq j\leq m}$ de $[a, x]$, et posant

$$F(x) = F(a_m) = S_f(\Pi_L) = \sum_{j=1}^{m} f(a_j)(a_j - a_{j-1}),$$

LEIBNIZ observe que

$$\Delta F(a_m) := F(a_m) - F(a_{m-1}) = f(a_m)(a_m - a_{m-1}) := f(a_m)\Delta a_m,$$

et dès lors

$$\frac{\Delta F(a_m)}{\Delta a_m} = f(a_m).$$

"Extrapolant" ce résultat à des différences Δa_m "infiniment petites", pour lesquelles $F(a_m)$ "s'identifie" à $A(f|_{[a,x]})$, LEIBNIZ obtient à son tour la formule (8), qu'il écrit sous la forme

$$d \int f(x)\, dx = f(x)\, dx, \tag{10}$$

en introduisant le célèbre signe $\int$ et l'expression $\int f(x)\, dx$, rappelant la construction de $A(f|_{[a,x]})$ comme somme des produits des valeurs de $f(x)$ par les différences infinitésimales d'abscisses. La même extrapolation appliquée à l'identité évidente

$$\sum_{j=1}^{m} \Delta f(a_j) = f(x) - f(a),$$

le conduit à son expression de la formule (9)

$$\int df = f(x) - f(a). \tag{11}$$

Les formules (10) et (11), qui relient les deux opérations de dérivation et d'intégration, constituent aujourd'hui les deux versions du **théorème fondamental du calcul différentiel et intégral**, le mot **intégrale** étant introduit en 1690 par les frères BERNOULLI. Jean BERNOULLI peut écrire dans ses *Lectiones mathematicae de methodo integralium* de 1691 que

> les intégrales des différentielles sont ces quantités dont ces différentielles proviennent par différentiation.

En affirmant que

> le calcul intégral est la méthode par laquelle, à partir d'une relation entre les différentielles, on retrouve la relation entre les quantités elles-mêmes,

EULER officialise, dans ses *Institutiones Calculi Integralis* de 1768, la conception de l'intégrale comme opération inverse de la dérivée, qui se maintiendra jusqu'au début du XX^{e} siècle. Il semble donc qu'on puisse enterrer les sommes de Riemann, dès qu'une primitive F de f est connue. Mais les mathématiciens se rendent vite compte que le calcul effectif des primitives est autrement plus difficile que celui des dérivées, et que, contrairement à sa dérivée, la primitive d'une fonction élémentaire ne l'est pas nécessairement. Chassées du paradis de l'analyse pure, les sommes de Riemann se réfugient dans le **calcul numérique** et, dans l'ouvrage cité plus haut, EULER les utilise pour calculer approximativement l'intégrale de fonctions f dont la primitive n'est pas connue explicitement. S'interrogeant sur la possibilité de rendre arbitrairement petite la différence entre les sommes de Riemann $S_f(\Pi_L)$ et l'intégrale cherchée en prenant des P-partitions plus fines, EULER fait la remarque prophétique suivante, sur laquelle nous reviendrons :

> Nous avons déjà noté que les distances $a_j - a_{j-1}$, par lesquelles x est supposé croître successivement, doivent être prises très petites pour que les valeurs correspondantes $f(a_{j-1})$, $f(a_j)$ ne diffèrent à leur tour guère l'une de l'autre; à partir de cela, il faut juger si les intervalles $a_1 - a$, $a_2 - a_1, \ldots$ doivent être pris égaux ou inégaux. En fait, là où la valeur de $f(x)$ ne change guère lorsque x varie, l'intervalle par lequel x croît peut être pris grand sans danger. D'autre part, là où des changements peu importants de x conduisent à des variations violentes de $f(x)$, on devra prendre l'intervalle très petit.

D'ailleurs, les méthodes numériques de calcul d'intégrales conduisent souvent à des sommes de Riemann associées à des P-partitions non équidistantes. Ainsi, la **méthode de** SIMPSON correspond à la P-partition

$$\left(a, \left[a, a + \frac{(b-a)}{6}\right]\right), \left(\frac{a+b}{2}, \left[a + \frac{(b-a)}{6}, \frac{a+b}{2}\right]\right),$$

$$\left(\frac{a+b}{2}, \left[\frac{a+b}{2}, b - \frac{(b-a)}{6}\right]\right), \left(b, \left[b - \frac{(b-a)}{6}, b\right]\right).$$

4 Les sommes de Riemann et la primitivabilité des fonctions continues chez Cauchy

Motivé à la fois par des situations où le concept d'intégrale comme inverse de la dérivée se révèle insuffisant (travaux de FOURIER sur les fonctions discontinues et de POISSON sur les fonctions complexes), et par des considérations pédagogiques nées de son enseignement (controversé) à l'Ecole Polytechnique, CAUCHY, en inversant génialement l'ordre de présentation classique du calcul intégral, fait rentrer les sommes de Riemann dans le giron de l'analyse pure. Dans son *Analyse algébrique* de 1821, CAUCHY a montré l'importance des fonctions **continues.** Deux ans plus tard, dans un mémoire au *Journal de l'Ecole Polytechnique,* il s'attache à démontrer que toute fonction continue possède une primitive, qu'elle soit ou non explicitement calculable :

> Je considère chaque intégrale comme étant juste la somme des valeurs infiniment petites de l'expression différentielle placée sous le signe intégrale, qui correspond aux différentes valeurs de la variable incluse entre les limites en question. Quand on adopte cette manière de regarder l'intégrale définie, on prouve aisément qu'une telle intégrale a une valeur unique et finie lorsque, les deux limites de la variables étant finies, les intégrands restent finis et continus entre ces limites. [...] Il me semble que cette manière de regarder une intégrale définie devrait être adoptée de préférence, comme je l'ai fait, parce qu'elle vaut également pour tous les cas, même ceux dans lesquels nous ne pouvons pas passer généralement de la fonction sous le signe intégral à la fonction primitive.

Le *Résumé des leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal* de 1823 contient des remarques analogues :

> Dans le calcul intégral, il m'a paru nécessaire de démontrer généralement l'existence des intégrales ou des fonctions primitives avant de faire connaître leurs diverses propriétés. Pour y parvenir, il a fallu d'abord établir la notion d'intégrales prises entre des limites données ou intégrales définies. Ces dernières pouvant être quelque-fois infinies ou indéterminées, il était essentiel de rechercher dans quel cas elles conservent une valeur unique et finie.

Dans la 21ᵉ leçon de son *Résumé,* CAUCHY démontre que si f est (uniformément) continue sur I, il existe un nombre réel unique J ayant la propriété suivante : *pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe un* $\delta > 0$ *tel que* $|S_f(\Pi_L) - J| \leq \epsilon$ *pour toute P-partition* Π_L *pour laquelle* $\max_{1\leq j\leq m}(a_j - a_{j-1}) \leq \delta$. Ce réel J est noté $\int_a^b f(x)\,dx$, et appelé l'**intégrale définie de f sur** $[a,b]$. Dans la leçon suivante, CAUCHY montre que le même résultat subsiste si l'on remplace Π_L par n'importe quelle P-partition $\Pi = ((x_j, [a_{j-1}, a_j]))_{1\leq j\leq m}$ telle que $\max_{1\leq j\leq m}(a_j - a_{j-1}) \leq \delta$.

Le cadre des fonctions continues dans lequel s'est placé Cauchy donne aux formules (10) et (11) une symétrie remarquable. Lorsque f est continue sur I, l'**intégrale indéfinie** $x \mapsto \int_a^x f(s)\,ds$ est dérivable pour tout $x \in I$, et

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(s)\,ds = f(x) \tag{12}$$

(c'est donc une primitive de f). D'ailleurs, si f possède sur I une dérivée *continue* df/dx, on a, pour tout $x \in I$,

$$\int_a^x \frac{df}{dx}(s)\,ds = f(x) - f(a). \tag{13}$$

Toutefois, CAUCHY doit renoncer aux sommes de Riemann pour définir l'intégrale des fonctions qui tendent vers l'infini à l'une au moins des extrémités de l'intervalle ou pour définir l'intégrale de fonctions continues sur un intervalle non borné. Il fait alors appel à une limite supplémentaire du type

$$\lim_{c\to a+}\int_c^b f(x)\,dx \quad \text{ou} \quad \lim_{c\to +\infty}\int_a^c f(x)\,dx,$$

pour introduire ce qu'on appelle aujourd'hui les **intégrales impropres.**

5 Les sommes de Riemann et la première théorie de l'intégrale

La thèse d'habilitation de RIEMANN, intitulée *Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique,* est défendue en 1854 mais publiée seulement en 1867, un an après la mort prématurée de son auteur. Le quatrième paragraphe débute modestement par ces mots :

> L'incertitude qui règne encore sur quelques points fondamentaux de la théorie des intégrales définies nous oblige à placer ici quelques remarques sur la notion de l'intégrale définie, et sur la généralité donc elle est susceptible. Et d'abord, que doit-on entendre par $\int_a^b f(x)\,dx$?

Ces "quelques remarques", qui occupent moins de sept pages, constituent la première **théorie de l'intégration** de l'histoire des mathématiques et marquent la naissance de l'analyse réelle moderne. RIEMANN prend comme point de départ la propriété d'approximation de l'intégrale d'une fonction continue due à CAUCHY, celle qui utilise les P-partitions générales, et, comme l'écrit si bien LEBESGUE en 1904,

> Riemann porte son attention sur le procédé opératoire qui permet, dans le cas des fonctions continues, de calculer l'intégrale avec une telle approximation que l'on veut, et il se demande dans quels cas ce procédé appliqué à des fonctions discontinues donne un nombre déterminé. Cauchy n'appliquait son procédé de définition de l'intégrale qu'à des fonctions considérées a priori comme intéressantes : les fonctions continues; maintenant, au contraire, toute fonction sera intéressante à laquelle s'appliquera le procédé de définition.

C'est une attitude révolutionnaire pour l'époque, que les progrès de l'analyse fonctionnelle au XX^e siècle ont rendue banale aujourd'hui. Ainsi donc, f est **intégrable au sens de Riemann (R-intégrable) sur** I si l'on peut trouver un réel J ayant la propriété suivante: *pour chaque* $\epsilon > 0$, *il existe un* $\delta > 0$ *tel que* $|S_f(\Pi) - J| \leq \epsilon$ *pour toutes les P-partitions* $\Pi = ((x_j, [a_{j-1}, a_j]))_{1\leq j\leq m}$ *vérifiant* $\max_{1\leq j\leq m}(a_j - a_{j-1}) \leq \delta$. RIEMANN propose alors de rechercher

> l'étendue et la limite de la définition précédente

et de répondre à la question :

> Dans quel cas une fonction est-elle susceptible d'intégration ? Dans quel cas ne l'est-elle pas ?

On peut penser a priori qu'une définition calquée sur un procédé construit pour des fonctions uniformément continues délimitera une classe de fonctions "pas trop" discontinues. Pourtant, RIEMANN donne un exemple de fonction intégrable possédant un ensemble dense de points de discontinuité, ce qui fait dire à l'optimiste DU BOIS-REYMOND qu'on

> a poussé le concept d'intégrale jusqu'à ses limites extrêmes.

RIEMANN et ses successeurs cherchent à "mesurer" l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction R-intégrable, mais il faut attendre BOREL et LEBESGUE pour construire la théorie de la mesure donnant la réponse finale à cette question, en caractérisant les fonctions R-intégrables comme les fonctions bornées dont l'ensemble des points de discontinuité a une mesure nulle. Un premier coup dur porté à l'intégrale de Riemann est son incapacité à embrasser le concept d'intégrale fondé sur la notion de primitive : non seulement il existe des dérivées non bornées, mais VOLTERRA donne en 1881 un exemple de dérivée bornée qui n'est pas R-intégrable : la formule (13) ne s'applique pas à toutes les dérivées bornées. D'autre part, l'intégrale indéfinie d'une fonction R-intégrable f n'est pas nécessairement dérivable aux points où f n'est pas continue : la formule (12) n'est pas vraie pour f R-intégrable. La belle symétrie entre dérivation et intégration indéfinie semble à jamais perdue. Enfin, la R-intégrabilité résiste mal au passage à la limite : la limite d'une suite uniformément bornée de fonctions R-intégrables ne l'est pas nécessairement.

6 Les sommes de Riemann et l'approximation de la primitive

Les sommes de Riemann sont-elles responsables des défauts de la R-intégrale ? Ou faut-il plutôt blâmer CAUCHY et son excessif attachement aux fonctions uniformément continues ? Si l'on retourne aux origines, le but du calcul différentiel et intégral n'est-il pas d'intégrer les dérivées, c'est-à-dire les fonctions primitivables, autant que les fonctions continues ? L'approche riemannienne se heurte dans ce cas à une difficulté fondamentale : alors que toute fonction continue sur un intervalle compact y est uniformément continue, une fonction dérivable sur un tel intervalle n'y est pas nécessairement uniformément dérivable. On montre en fait que cette **dérivabilité uniforme** équivaut à la continuité de la fonction dérivée.

Mais, comme Cauchy l'a fait pour une fonction continue, on peut rechercher, pour f primitivable sur $[a, b]$, le type d'approximation reliant la variation $F(b) - F(a)$ d'une primitive F de f aux sommes de Riemann $S_f(\Pi)$. Si $\epsilon > 0$ est donné, on peut trouver, pour chaque $x \in I$, un $\delta(x) > 0$ (dépendant en général de x puisqu'il n'y a pas ici d'uniformité !) tel que

$$|F(y) - F(x) - f(x)(y - x)| \leq \frac{\epsilon}{b-a}|y - x|,$$

lorsque $y \in I \cap [x - \delta(x), x + \delta(x)]$. On en déduit aussitôt que

$$|F(z) - F(y) - f(x)(z - y)| \leq \frac{\epsilon}{b-a}(z - y),$$

lorsque y et $z \in I$ sont tels que $x - \delta(x) \leq y \leq x \leq z \leq x + \delta(x)$. Dès lors, si $\Pi = ((x_j, [a_{j-1}, a_j]))_{1 \leq j \leq m}$ est une P-partition vérifiant les conditions

$$x_j - \delta(x_j) \leq a_{j-1} \leq x_j \leq a_j \leq x_j + \delta(x_j), \quad (1 \leq j \leq m), \tag{14}$$

on a,

$$|F(a_j) - F(a_{j-1}) - f(x_j)(a_j - a_{j-1})| \leq \frac{\epsilon}{b-a}(a_j - a_{j-1}), \quad (1 \leq j \leq m),$$

et, donc, en sommant ces inégalités,

$$|F(b) - F(a) - \sum_{j=1}^{m} f(x_j)(a_j - a_{j-1})| \leq \epsilon.$$

On obtient ainsi la **propriété d'approximation des primitives** par des sommes de Riemann : *pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe une application* δ *strictement positive sur* I *telle que*

$$|F(b) - F(a) - S_f(\Pi)| \leq \epsilon,$$

pour toutes les P-partitions Π *vérifiant (14).* Une telle P-partition est appelée δ-**fine**, et une application strictement positive δ sur I est appelée une **jauge sur** I. On vérifie sans peine que les P-partitions utilisées dans la définition de l'intégrale de Riemann ne sont rien d'autre que les P-partitions δ-fines pour une **jauge constante** δ, reliquat de l'uniforme continuité des fonctions privilégiées par CAUCHY.

Cette propriété d'approximation de la primitive pose d'emblée un problème pour sa survie : si l'existence de P-partitions δ-fines pour une jauge constante δ est assurée par le fait qu'on peut en construire effectivement en prenant les $a_j - a_{j-1}$ suffisamment petits et les $x_j \in [a_{j-1}, a_j]$ arbitraires, il n'en est pas de même pour une jauge quelconque. L'existence de P-partitions δ-fines dans ce cas est heureusement garantie par un lemme introduit par COUSIN dans sa thèse de mai 1894 sur les fonctions holomorphes de deux variables. Ce **lemme de Cousin** *assure, pour chaque jauge* δ *sur* I, *l'existence d'une P-partition* δ*-fine.* Il est équivalent à un résultat plus célèbre introduit par BOREL dans sa thèse de juin 1894 sur les fonctions d'une variable complexe. Ce **lemme de Borel-Lebesgue** est à la base de l'importante notion d'ensemble **compact**. Pour la petite histoire, les deux thèses avaient le même jury (DARBOUX, APPELL, POINCARÉ), mais il semble qu'aucun rapprochement entre les deux résultats n'ait été fait avant FRÉCHET (1924).

7 Les sommes de Riemann et une généralisation de l'intégrale de Lebesgue

Après avoir imité CAUCHY en obtenant une propriété d'approximation de la primitive d'une classe plus vaste de fonctions, pourquoi ne pas suivre RIEMANN en introduisant l'ensemble des fonctions pour lesquelles les sommes de Riemann s'approchent d'un réel J au sens de cette propriété d'approximation. Appelons f **P-intégrable** sur I s'il existe un réel J ayant la propriété suivante : *pour chaque* $\epsilon > 0$, *il existe une jauge* δ *sur* I *telle que* $|S_f(\Pi) - J| \leq \epsilon$, *pour toutes les P-partitions* δ*-fine* Π. Tous ses ingrédients étant connus depuis 1894, cette définition aurait pu être introduite il y a plus d'un siècle. Pourtant elle n'est pas encore quinquagénaire, puisqu'elle fut introduite en 1957 par KURZWEIL et retrouvée indépendamment en 1961 par HENSTOCK.

Il est évident que *les fonctions R-intégrables sur* I *et les fonctions primitivables sur* I *sont P-intégrables sur* I, et il est facile de montrer que la P-intégrale possède toutes les propriétés fondamentales que l'on demande à une intégrale bien élevée. Averti par l'expérience riemannienne, on pourrait craindre que le nouveau concept, issu d'une propriété des fonctions primitivables, ne puisse intégrer que des fonctions n'en différant "pas trop", comme ce fut le cas pour les fonctions R-intégrables par rapport aux fonctions continues. Comme on sait, depuis DARBOUX, que les fonctions primitivables ne peuvent avoir des discontinuités de type saut, un bon moyen pour dissiper ces craintes est de tester la définition sur la fonction caractéristique des rationnels $\chi_{\mathbb{Q}}$, ou **fonction de Dirichlet,** qui possède une discontinuité de type saut en chaque point et n'est pas R-intégrable sur I. Depuis les travaux de CANTOR (1873), on sait que $\mathbb{Q} \cap I$ est dénombrable et peut donc s'écrire $\{r_j : j \in \mathbb{N}\}$. Pour qui connaît la série géométrique, il est facile de vérifier que $\chi_{\mathbb{Q}}$ est P-intégrable, et d'intégrale nulle, sur tout intervalle compact, en choisissant, pour $\epsilon > 0$, la jauge définie par $\delta(x) = 1$ si x est irrationnel et $\delta(r_j) = \frac{\epsilon}{2^{j+2}}$ $(j \in \mathbb{N})$.

Ce pourrait être un intéressant exercice d'"histoire des sciences-fiction" d'imaginer ce qu'aurait pu être l'évolution de la théorie de l'intégration au cours du XX^{e} siècle si un mathématicien visionnaire avait introduit la P-intégrale à la fin du XIX^{e} siècle. Les choses ne se sont pas passées ainsi et le grand événement mathématique de la belle époque a été l'introduction de la **mesure de** BOREL (1896) et de la **mesure et intégrale de** LEBESGUE ou **L-intégrale** (1902). Cette généralisation de la R-intégrale permet d'étendre la formule (13) à toutes les dérivées *bornées* df/dx et de montrer que la formule (12) est satisfaite **presque partout sur** I, c'est-à-dire en dehors d'un ensemble de **mesure nulle**. En outre, la limite d'une suite bornée presque partout de fonctions L-intégrables est encore L-intégrable.

Ni LEBESGUE dans sa définition, ni DENJOY (1912) et PERRON (1914), lorsqu'ils généralisent l'intégrale de Lebesgue pour pouvoir intégrer *toutes* les dérivées, ne font appel aux sommes de Riemann. Pourtant, la nostalgie de ce vénérable instrument n'épargne pas les plus grands puisqu'en 1909, dans un article aux *Annales de Toulouse*, LEBESGUE montre que son intégrale est toujours la limite des sommes de Riemann associées à *une* suite de P-partitions (un résultat que HAHN affine encore en 1914), tandis que BOREL, entre 1910 et 1920, et DENJOY, entre 1920 et 1930, s'attachent à construire une intégrale de type Lebesgue sur de telles sommes, mais ne réussissent qu'au prix d'une substantielle complication des définitions.

Lorsque l'approche riemanienne ressuscite aux alentours de 1960, il faut évidemment comparer la P-intégrale aux intégrales introduites depuis plus d'un demi-siècle. KURZWEIL et HENSTOCK montrent immédiatement que *la P-intégrale est équivalente à l' intégrale de Denjoy-Perron,* et, dès lors, *f est L-intégrable sur I si et seulement si f et $|f|$ sont P-intégrables sur I*. La nouvelle intégrale coïncide donc avec celle de Lebesgue pour des fonctions positives, et même pour des fonctions majorées ou minorées. En outre, toutes les **intégrales impropres,** qui sont sont pas nécessairement des L-intégrales, sont des P-intégrales, et le traditionnel passage à la limite n'est plus qu'un intéressant moyen de calcul d'une "vraie" intégrale. Enfin, des théorèmes de convergence plus généraux que ceux de Lebesgue sont prouvés pour la P-intégrale.

LEBESGUE a utilisé une image, qui a fait le tour du monde et a connu quelques variantes, pour illustrer la différence entre la R-intégrale et la L-intégrale. Dans le procédé de Riemann, on somme les indivisibles dans l'ordre où ils se présentent dans l'intervalle d'intégration, et indépendamment de la fonction intégrée. On opère donc comme le ferait un commerçant sans méthode qui, pour compter sa recette de la journée, additionnerait un à un les billets de banque dans l'ordre où ils ont été encaissés. Par contre, le commerçant méthodique rassemble d'abord les billets de 5 euros, en nombre m_1, avant de procéder de même pour les billets de 10 euros, en nombre m_2, et ainsi de suite. Il obtient la valeur de sa recette en calculant $5m_1 + 10m_2 + 20m_5 + \dots$. Les deux techniques conduisent le commerçant au même résultat, parce qu'il n'a qu'un nombre fini de billets à compter; dans une intégrale, où il faut additionner une "infinité" d'indivisibles, la seconde méthode peut réussir là où la première a échoué. On peut compléter cette image par un troisième procédé, illustrant la définition de Kurzweil-Henstock. Au lieu de compter un par un les billets dans l'ordre où ils ont été encaissés, le commerçant méthodique les groupe, *en respectant l'ordre d'encaissement,* en paquets ayant approximativement une même valeur (fixée). Il lui est alors facile, par un décompte du nombre de paquets, d'obtenir la somme. C'est la valeur de la jauge qui correspond au nombre (variable) de billets qu'il faut mettre dans chaque paquet : elle sera petite lorsque de grosses coupures se présentent, plus grande si des petites coupures se succèdent.

On retrouve en fait, dans le procédé de Kurzweil-Henstock, l'exploitation théorique du conseil que donnait EULER en étudiant l'approximation numérique d'une intégrale, et de l'observation faite par FERMAT en calculant les aires liées aux hyperboles généralisées. On pourra intégrer plus de fonctions ou on les intégrera plus facilement en forçant les P-partitions admissibles à être à **pas variable.** C'est parce qu'elle modifie l'ordre d'arrivée des valeurs de la fonction dans son procédé de sommation, que l'intégrale de Lebesgue n'intègre que les fonctions f telles que $|f|$ soit aussi L-intégrable. C'est un mode d'**intégration absolue.** Le procédé de sommation de la P-intégrale, qui respecte cet ordre, fournit une **intégration non absolue.** L'analogie est complète avec la théorie des séries, où, en l'absence de convergence absolue, une permutation ou un regroupement des termes peut modifier arbitrairement la somme la série, ou changer sa convergence en divergence.

8 Les sommes de Riemann-Stieltjes et les intégrales de Stieltjes

Revenons à la fin du XIX^e siècle, en 1894 exactement, et à un événement dont l'importance sur le développement de la théorie de la mesure et de l'intégrale au XX^e siècle fut considérable : la publication aux *Annales de Toulouse* du mémoire de STIELTJES sur les fractions continues. Après que l'étude des séries trigonométriques ait conduit RIEMANN à son extension de l'intégrale de Cauchy, celle des fractions continues suggère à STIELTJES une généralisation, dans une toute autre direction, de l'intégrale de Cauchy. Le mathématicien hollandais montre que les convergents de certaines fractions continues, dont les termes dépendent d'une variable complexe, peuvent s'écrire en séries de Laurent ou en sommes de fractions partielles dont les coefficients sont reliés entre eux par des formules qui rappellent celles des **moments** d'ordre k de masses situées sur une droite. Certaines situations conduisent STIELTJES à envisager le cas d'une distribution de masses non nécessairement ponctuelles, et à étudier ainsi, dans le ch. VI modestement intitulé *Remarques sur les* *fonctions croissantes et les intégrales définies,* la limite de sommes du type

$$\sum_{j=1}^{m} x_j^k[g(a_j) - g(a_{j-1})],$$

ou, plus généralement

$$S_{f,g}(\Pi) = \sum_{j=1}^{m} f(x_j)[g(a_j) - g(a_{j-1})],$$

associées à une P-partition $\Pi = ((x_j, [a_{j-1}, a_j]))_{1\leq j\leq m}$ de I, avec f continue et g monotone sur I. STIELTJES mentionne qu'on peut démontrer, comme dans le cas particulier $g(x) = x$ de la R-intégrale, qu'il existe un réel J ayant la propriété suivante : *pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe un* $\delta > 0$ *tel que* $|J - S_{f,g}(\Pi)| \leq \epsilon$, *pour toutes les P-partitions* Π *de* I *vérifiant* $\max_{1\leq j\leq m}(a_j - a_{j-1}) \leq \delta$. STIELTJES désigne ce nombre J par $\int_a^b f(x)\, dg(x)$. Lorsque, f et g étant données, on peut trouver un J vérifiant cette propriété, on l'appelle l'**intégrale de Riemann-Stieltjes** ou la **RS-intégrale** de f par rapport à g. On notera que l'intégrale de Stieltjes introduit pour la première fois une mesure distincte de la mesure géométrique habituelle.

Cette extension de l'intégrale fait peu de bruit jusqu'à ce que Frédéric RIESZ démontre, en 1909, que *toute fonctionnelle linéaire continue* L *sur l'espace des fonctions continues sur* $[a, b]$ *peut s'écrire*

$$L(f) = \int_a^b f(x)\, dg(x),$$

pour une certaine fonction à variation bornée g. L'attention de LEBESGUE est aussitôt attirée et il montre en 1910 que, pour f continue et g à variation bornée, un changement de variables ramène l'intégrale de Stieltjes à une L-intégrale de la forme

$$\int_0^{v(b)} f[x(v)]k(v)\, dv, \tag{15}$$

avec $v(x)$ la **variation totale** de g sur $[a, x]$, $x(v)$ la fonction réciproque de $v(x)$ convenablement définie sur les intervalles où v est constante, et $k(v)$ la dérivée presque partout de $g(x(v))$. Comme l'expression (15) garde un sens pour des fonctions f mesurables et bornées, LEBESGUE arrive ainsi à une notion d'**intégrale de Lebesgue-Stieltjes** ou **LS-intégrale** de f par rapport à g, que suivant ses propres termes, il semble difficile d'obtenir sans ce changement de variable. LEBESGUE s'est montré mauvais prophète puisque, comme il le reconnaît en 1922,

> son affirmation a vite été infirmée par les travaux, très beaux et très simples, de MM. W.H. Young, Radon et de la Vallée Poussin. Ces deux derniers Auteurs, se plaçant au point de vue des fonctions de domaine et d'ensemble, ont montré que l'on définit les intégrales de Stieltjes, quel que soit le nombre des variables, en remplaçant dans les définitions des intégrales de fonctions continues ou de fonctions sommables données plus haut la considération de la mesure par celle d'une autre fonction d'ensemble.

C'est évidemment le point de vue devenu classique aujourd'hui. Notons également que, dès 1917, VAN VLECK ramène la L-intégrale sur I d'une fonction f telle que $m < f(x) < M$ pour $x \in I$, à l'intégrale de Riemann-Stieltjes $\int_m^M y d\mu(y)$, si $\mu(y)$ est la mesure de l'ensemble $\{x \in I : m \leq f(x) < y\}$. Une intégration par parties ramène même cette dernière intégrale à une intégrale de Riemann.

Le processus de Kurzweil-Henstock permet également de définir des **intégrales du type de Stieltjes** très générales. C'est d'ailleurs dans un cadre encore plus général que ces auteurs ont d'abord introduit leur intégrale. KURZWEIL considère en 1957 des fonctions U définies sur $I \times I$ et leur associe les **sommes de Riemann-Stieltjes généralisées**

$$S(U, \Pi) = \sum_{j=1}^{m} [U(x_j, a_j) - U(x_j, a_{j-1})].$$

L'intégrabilité correspondante se définit par l'existence d'un réel J ayant la propriété suivante : *pour chaque* $\epsilon > 0$, *il existe une jauge* δ *sur* I *telle que* $|S(U, \Pi) - J| \leq \epsilon$, *pour toutes les P-partitions* Π δ*-fines de* I. Les sommes de Riemann-Stieltjes correspondent au choix $U(x, a) = f(x)g(a)$. Quant à HENSTOCK, il intègre d'emblée des fonctions de points et d'intervalles $h(x, I)$, pour lesquelles la définition correspondante se devine sans peine à partir des sommes de Riemann-Stieltjes associées $\sum_{j=1}^{m} h(x_j, [a_{j-1}, a_j])$.

9 Conclusion

La grande généralité des sommes de Riemann-Stieltjes choisies par KURZWEIL et HENSTOCK a peut-être constitué un frein involontaire à la diffusion de leur original processus de passage à la limite. On peut ajouter que, chez KURZWEIL, la nouvelle intégrale n'occupe que sept pages d'un difficile article sur les équations différentielles généralisées, un concept qui ne figure pas au menu habituel des spécialistes de la théorie de l'intégration.

Aujourd'hui pourtant, l'approche de Kurzweil-Henstock fait son chemin dans l'enseignement fondamental de l'intégrale (on compte une vingtaine d'ouvrages qui l'utilisent), et constitue une importance source d'inspiration dans la recherche contemporaine en analyse réelle. La définition s'étend sans peine, non seulement à des fonctions de plusieurs variables, mais aussi à des classes d'ensembles abstraits. Elle se généralise dans différentes directions, et des questions comme l'obtention de théorèmes de Stokes-Cartan pour des formes différentielles non continûment différentiables, de nouveaux théorèmes de convergence ou de l'emploi de telles intégrales dans l'étude d'équations différentielles ou intégrales généralisées, d'intégrales du type de Feynman et dans la convergence non absolue de séries multiples sont à l'ordre du jour. Ainsi, chaque fascicule de la revue *Real Analysis Exchange* contient plusieurs articles dans cette direction.

Il semble donc que les sommes de Riemann-Stieltjes aient encore un bel avenir devant elle en calcul intégral, et qu'elles pourront réserver encore, dans les mains d'habiles analystes, d'intéressantes surprises.

10 Bibliographie

Quelques ouvrages sur l'histoire de l'intégrale

1. M.E. Baron, *The Origins of the Infinitesimal Calculus,* Pergamon, Oxford, 1969
2. U. Bottazzini, *The Higher Calculus : A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass,* Springer, New York, 1986
3. C.B. Boyer, *The History of the Calculus and its Conceptual Development,* Dover, New York, 1959
4. J. Dieudonné éd., *Abrégé d'histoire des mathématiques,* 2 vol., Hermann, Paris, 1978
5. C.W. Edwards, Jr., *The Historical Development of the Calculus,* Springer, New York, 1979
6. J.V. Grabiner, *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus,* MIT Press, Cambridge, 1981
7. I. Grattan-Guinness, *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann,* MIT Press, Cambridge, 1970
8. I. Grattan-Guinness ed., *From the Calculus to Set Theory 1630-1910,* Duckworths, London, 1980
9. E. Hairer and G. Wanner, *Analysis by Its History,* Springer, New York, 1996
10. Th. Hawkins, *Lebesgue Theory of Integration. Its Origin and Develoment,* Chelsea, New York, 1975
11. H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives,* Gauthier-Villars, Paris, 1e éd. 1904, 2e éd. 1928
12. H. Lebesgue, *La mesure des grandeurs,* Monographies de l'Enseignement mathématique No. 1, Genève, 1935
13. F.A. Medvedev, *Scenes from the History of Real Functions,* Birkhäuser, Basel, 1991
14. A. Michel, *Constitution de la théorie moderne de l'intégration,* Vrin, Paris, 1992
15. I. Pesin, *Classical and Modern Integration Theories,* Academic Press, New York, 1970
16. J.P. Pier, *Histoire de l'intégration,* Masson, Paris, 1996
17. W.M. Priestley, *Calculus : An Historical Approach,* Springer, New York, 1979

18. S. SCHWABIK and P. ŠARMANOVÁ, *Malý Pruvodce Historií Integrálu* (Czech), Prometheus, Praha, 1996

19. O. TOEPLITZ, *The Calculus, a Genetic Approach,* The University of Chicago Press, Chicago, 1963

20. D. VAN DALEN and A. MONNA, *Sets and Integration,* Wolters-Noordhoff, Groningen, 1972

Quelques ouvrages d'introduction à l'intégrale de Kurzweil-Henstock (par ordre chronologique)

1. R. HENSTOCK, *Theory of Integration,* Butterworths, London, 1963

2. J. MAWHIN, *Introduction à l'analyse,* Cabay, Louvain-la-Neuve, 1979

3. J. KURZWEIL, *Nichtabsolut Konvergente Integrale,* Teubner, Leipzig, 1980

4. R.M. MCLEOD, *The Generalized Riemann Integral,* Math. Ass. America, Washington, 1980

5. E.J. MCSHANE, *Unified Integration,* Academic Press, New York, 1983

6. R. HENSTOCK, *Lecture on the Theory of Integration,* World Scientific, Singapore, 1988

7. J. DEPREE and C. SWARTZ, *Introduction to Real Analysis,* Wiley, New York, 1988

8. P.Y. LEE, *Lanzhou Lectures on Henstock Integration,* World Scientific, Singapore, 1989

9. R. HENSTOCK, *The General Theory of Integration,* Clarendon Press, Oxford, 1991

10. J. MAWHIN, *Analyse. Fondements, techniques, évolution,* De Boeck Université, Paris-Bruxelles, 1992; 2e éd. 1997

11. S. SCHWABIK, *Generalized Ordinary Differential Equations,* World Scientific, Singapore, 1992

12. W.F. PFEFFER, *The Riemann Approach to Integration : Local Geometric Theory,* Cambridge University Press, Cambridge, 1993

13. R.A. GORDON, *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock,* American Math. Soc., Providence, RI, 1994

14. E. SCHECHTER, *Handbook of Analysis and its Foundations,* Academic Press, San Diego, 1997

15. R.G. Bartle, *A Modern Theory of Integration,* American Math. Soc., Providence, RI, 2000

16. R.G. Bartle and D.R. Sherbert, *Introduction to Real Analysis,* 3^{rd} ed., Wiley & Sons, New York, 2000

17. J. Kurzweil, *Henstock-Kurzweil Integration : Its Relation to Topological Vector Spaces,* World Scientific, Singapore, 2000

18. P.Y. Lee and R. Vyborny, *The Integral. An Easy Approach after Kurzweil and Henstock,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000

19. P.P. Petkov, *Introduction to the Theory of Integral* (Russian), Studii na BIAP No 3, Sofia, 2000

20. S. Leader, *The Kurzweil-Henstock Integral and its Differentials,* Marcel Dekker, New York, 2001

21. W.F. Pfeffer, *Derivation and Integration,* Cambridge University Press, Cambridge, 2001

22. Ch. Swartz, *Gauge Integrals,* World Scientific, Singapore, 2001

Jean Mawhin
Département de mathématique
Université Catholique de Louvain
chemin du cyclotron, 2
1348 Louvain-la-Neuve
Belgique