Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 53e année, 2, 1984, pp. 85-87

MOYENNES ET QUOTIENTS DE TAYLOR DANS BMO

C. CARTON-LEBRUN et M. FOSSET

Résumé. Soit $\psi \in L^{\infty}[0,1]$, $\psi \geqslant 0$. Nous démontrons que l'opérateur de moyenne $f \to \int_0^1 f(tx)\,\psi(t)\,dt$ est borné de BMO(ℝ) dans BMO(ℝ) et commute sur BMO(ℝ) avec la transformée de Hilbert duale H. De plus, si f et sa kième dérivée distributionnelle $f^{(k)}$ appartiennent à BMO(ℝ) et $\mathcal{T}_{k-1}[f]$ désigne le polynôme de Taylor d'ordre k-1 de f en zéro, alors $Qf = x^{-k}(f - \mathcal{T}_{k-1}[f])$ appartient à BMO(ℝ) et HQf = QHf + constante, pp. Nous mentionnons ensuite une généralisation relative à certains opérateurs de moyenne sur $BMO(\mathbb{R}^n)$.

1. NOTATIONS

Pour les fonctions f appartenant à $BMO(\mathbb{R}^n)$, $n \geqslant 1$, nous utilisons la norme suivante :

$$\|f\|_{BMO(\mathbb{R}^n)} = \sup_{Q \subset \mathbb{R}^n} m_Q\,|f - m_Q f|,$$

où la borne supérieure est calculée sur tous les cubes de $\mathbb{R}^n$ et où

$$m_Q g = |Q|^{-1} \int_Q g(x)\,dx.$$

L'espace $H_0^1(\mathbb{R}^n)$, $n \geqslant 1$, est, comme dans [2], le sous-espace dense de $H^1(\mathbb{R}^n)$ constitué de toutes les fonctions de $\mathcal{S}$ dont la transformée de Fourier est à support compact disjoint de l'origine. La notation de dualité $< g,\varphi >$ est souvent utilisée dans la suite au lieu de $\int g\bar{\varphi}\,dx$, lorsque $g \in BMO(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in H_0^1(\mathbb{R}^n)$.

Pour abréger l'écriture et lorsqu'aucune confusion n'est possible d'après le contexte, nous écrirons respectivement BMO et H_0^1 au lieu de BMO(ℝ), $H_0^1(\mathbb{R})$.

Les constantes arbitraires seront notées Cte.

La transformée de Hilbert sur $H_0^1(\mathbb{R})$ ainsi que la transformée duale de celle-ci sur BMO(ℝ) seront désignées par H.

2. THEOREME

a. Soit $\psi \in L^{\infty}[0,1]$, $\psi \geqslant 0$ et $P : f \to \int_0^1 f(tx)\,\psi(t)\,dt$. Alors, P est borné de BMO(ℝ) dans BMO(ℝ) et HP = PH sur BMO(ℝ).

b. Si $f \in BMO(\mathbb{R})$ et $f^{(k)} \in BMO(\mathbb{R})$, où $f^{(k)}$ désigne la dérivée distributionnelle d'ordre k de f, alors $Qf = x^{-k}(f - \mathcal{T}_{k-1}[f]) \in BMO$ et HQf = QHf + Cte, pp.

Présenté par H. Garnir, le 15 mars 1984.