Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 53e année, 2, 1984, pp. 85-87

MOYENNES ET QUOTIENTS DE TAYLOR DANS BMO

C. CARTON-LEBRUN et M. FOSSET

Résumé. Soit $\psi \in L^\infty[0,1]$, $\psi \geq 0$. Nous démontrons que l'opérateur de moyenne $f \to \int_0^1 f(tx)\,\psi(t)\,dt$ est borné de $BMO(\mathbb{R})$ dans $BMO(\mathbb{R})$ et commute sur $BMO(\mathbb{R})$ avec la transformée de Hilbert duale H. De plus, si f et sa kième dérivée distributionnelle $f^{(k)}$ appartiennent à $BMO(\mathbb{R})$ et $\mathcal{T}_{k-1}[f]$ désigne le polynôme de Taylor d'ordre k-1 de f en zéro, alors $Qf = x^{-k}\,(f - \mathcal{T}_{k-1}[f])$ appartient à $BMO(\mathbb{R})$ et $HQf = QHf$ + constante, pp. Nous mentionnons ensuite une généralisation relative à certains opérateurs de moyenne sur $BMO(\mathbb{R}^n)$.

1. NOTATIONS

Pour les fonctions f appartenant à $BMO(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 1$, nous utilisons la norme suivante :

$$\|f\|_{BMO(\mathbb{R}^n)} = \sup_{Q \subset \mathbb{R}^n} m_Q\,|f - m_Q f|,$$

où la borne supérieure est calculée sur tous les cubes de $\mathbb{R}^n$ et où

$$m_Q g = |Q|^{-1} \int_Q g(x)\,dx.$$

L'espace $H_0^1(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 1$, est, comme dans [2], le sous-espace dense de $H^1(\mathbb{R}^n)$ constitué de toutes les fonctions de $\mathcal{S}$ dont la transformée de Fourier est à support compact disjoint de l'origine. La notation de dualité $\langle g, \varphi \rangle$ est souvent utilisée dans la suite au lieu de $\int g\bar{\varphi}\,dx$, lorsque $g \in BMO(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in H_0^1(\mathbb{R}^n)$.

Pour abréger l'écriture et lorsqu'aucune confusion n'est possible d'après le contexte, nous écrirons respectivement BMO et H_0^1 au lieu de $BMO(\mathbb{R})$, $H_0^1(\mathbb{R})$.

Les constantes arbitraires seront notées Cte.

La transformée de Hilbert sur $H_0^1(\mathbb{R})$ ainsi que la transformée duale de celle-ci sur $BMO(\mathbb{R})$ seront désignées par H.

2. THEOREME

a. Soit $\psi \in L^\infty[0,1]$, $\psi \geq 0$ et $P : f \to \int_0^1 f(tx)\,\psi(t)\,dt$. Alors, P est borné de $BMO(\mathbb{R})$ dans $BMO(\mathbb{R})$ et $HP = PH$ sur $BMO(\mathbb{R})$.

b. Si $f \in BMO(\mathbb{R})$ et $f^{(k)} \in BMO(\mathbb{R})$, où $f^{(k)}$ désigne la dérivée distributionnelle d'ordre k de f, alors $Qf = x^{-k}\,(f - \mathcal{T}_{k-1}[f]) \in BMO$ et $HQf = QHf + Cte$, pp.

Présenté par H. Garnir, le 15 mars 1984.

Démonstration. a1. Soit $f \in BMO$. Pour tout $t > 0$ et pour tout intervalle $Q \subset \mathbb{R}$, on a

$$m_Q |f(t.) - m_Q f(t.)| \leqslant \|f(t.)\|_{BMO} = \|f\|_{BMO} ;$$

d'où, par intégration et application du théorème de Fubini,

(1) $m_Q(\int_0^1 |f(t.) - m_Q f(t.)| \psi(t) dt) \leqslant \|f\|_{BMO} \|\psi\|_\infty$.

L'intégrale intérieure existe donc presque partout. De plus, comme $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, l'intégrale $\int_0^1 f(tx) \psi(t) dt$ existe aussi pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

En conséquence,

$$a_Q (f) = \int_0^1 m_Q f(t.) \psi(t) dt$$

a un sens et, comme $|f| \in BMO$, l'expression $a_Q (|f|)$ existe également. De cette dernière remarque et du théorème de Fubini, on déduit que $a_Q (f) = m_Q Pf$. Dès lors,

$$m_Q |Pf - m_Q Pf| \leqslant m_Q (\int_0^1 |f(t.) - m_Q f(t.)| \psi(t) dt)$$

et de l'inégalité (1), il résulte que $Pf \in BMO$ et $\|Pf\|_{BMO} \leqslant \|f\|_{BMO} \|\psi\|_\infty$.

a2. Pour démontrer la propriété de commutativité, on remarque que, pour tout $\varphi \in H^1_0$,

$$< HPf,\varphi > = - <Pf,H\varphi> = - \int_{\mathbb{R}} Pf\ H\varphi\, dx.$$

D'après ce qui précède, $P (|f|) \in BMO$. D'autre part, $|H\varphi|$ est bornée et rapidement décroissante à l'infini. Dès lors, le théorème de Fubini est applicable au dernier membre et, par conséquent,

$$<HPf, \varphi> = - \int_0^1 [\int_{\mathbb{R}} f(tx)\ H\varphi (x)\, dx]\ \psi(t)\, dt$$
$$= \int_0^1 [\int_{\mathbb{R}} Hf(tx)\ \varphi(x)\, dx]\ \psi(t)\, dt,$$

pour tout $\varphi \in H^1_0$, où la dernière égalité résulte de la commutativité de H avec les dilatations positives.

Vu que $P(|Hf|) \in BMO$, les intégrales contenues dans le dernier membre de cette égalité peuvent être permutées, ce qui entraîne

$$<HPf,\varphi > = <PHf,\varphi > \ \forall \varphi \in H^1_0,$$

d'où la propriété de commutativité annoncée.

b. Si $f \in BMO$ et $f^{(k)} \in BMO$, où $f^{(k)}$ désigne la dérivée distributionnelle de f, alors $f \in C^{k-1}$ et $f(x) = \mathcal{C}_{k-1} [f] + x^k Pf^{(k)}$,

où P est l'opérateur de moyenne correspondant à la fonction

$\psi(t) = [(k - 1)!]^{-1} (1 - t)^{k-1}$.

D'après la partie a du théorème, on a donc $Qf \in BMO$ et $HQf = PH (f^{(k)}) + Cte$, pp.

D'autre part,

$$H (f^{(k)}) = (Hf)^{(k)} + Cte, \text{ pp.}$$

Ceci résulte de l'égalité

$$<H (f^{(k)}),\varphi > = <(Hf)^{(k)},\varphi > \ \forall \varphi \in H^1_0,$$

et du comportement à l'infini des fonctions appartenant à BMO.

On obtient donc

$HQf = P\,(Hf)^{(k)} + Cte = QHf + Cte$, pp.

Remarque. Les propriétés de base utilisées dans la démonstration précédente sont contenues dans [2] .

3. UNE GENERALISATION A DES MOYENNES APPARTENANT A BMO($\mathbb{R}^n$)

Il est possible de vérifier que les arguments successifs intervenant dans la démonstration de la première partie du théorème précédent s'étendent au cas plus général suivant :

Théorème. Si $t^{1-n}\,\psi(t) \in L^\infty[0,1]$, $\psi \geq 0$, alors $P : f \to \int_0^1 f(tx)\,\psi(t)\,dt$ est borné de BMO($\mathbb{R}^n$) dans BMO($\mathbb{R}^n$) et TP = PT pour tout opérateur de Calderon-Zygmund T défini sur BMO($\mathbb{R}^n$) par la relation de dualité $<Tf,\varphi> = <f,\check{T}\varphi>$, $\varphi \in H_0^1(\mathbb{R}^n)$, où $\check{T}\varphi = \check{K} * \varphi$ au sens des distributions, $\check{K}(x) = K(-x)$, $K(x) = |x|^{-n}\,\Omega(x)$ avec $\Omega \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, homogène de degré zéro et de valeur moyenne nulle sur la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.

En particulier, P commute avec les transformées de Riesz sur BMO($\mathbb{R}^n$).

Remarques. 1. La démonstration de la propriété de commutativité TP = PT ci-dessus fait appel à la propriété de différentiabilité du symbole de l'opérateur $\check{T}$ démontrée dans [1] (Voir aussi [3]).

2. Une variante du théorème précédent s'énonce de la manière suivante : si $\psi \in L^\infty[0,1]$, $\psi \geq 0$ et si $f \in$ BMO($\mathbb{R}^n$) est intégrable localement sur presque toute droite contenant l'origine, alors $Pf \in$ BMO($\mathbb{R}^n$).

4. REFERENCES

[1] A.P. CALDERON and A. ZYGMUND, Algebras of certain singular operators, Amer. J. Math. 78 (1956), 310-320.

[2] C. FEFFERMAN and E.M. STEIN, H^p spaces of several variables, Acta Math. 129 (1972), 137-193.

[3] U. NERI, Singular Integrals, Lecture Notes in Mathematics, 200 (1971), Springer-Verlag, Berlin - New York.

Université de l'Etat à Mons
Service de Mathématique
Avenue du Champ de Mars, 24
B - 7000 - MONS
BELGIQUE