Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 53e année, 2, 1984, pp. 88-92

DÉCOMPOSITIONS BOOLÉENNES DE LATTIS DISTRIBUTIFS BORNÉS

par G. HANSOUL et L. VRANCKEN-MAWET

Summary.

In this note, we prove that the Priestley dual of a Boolean product of bounded distributive lattices is isomorphic to the disjoint sum of the Priestley duals of the stalks and we also establish the correspondence between the Boolean decompositions of a bounded distributive lattice L and certain congruences on its Priestley dual.

La notion de faisceau d'algèbres sur un espace de Boole est une notion de plus en plus étudiée et appliquée en algèbre universelle. Dans cette courte note, nous caractérisons le dual de Priestley d'un produit booléen de lattis distributifs bornés et nous établissons le lien entre les décompositions booléennes d'un lattis distributif borné et la notion de congruence sur un espace de Priestley, telle qu'elle est introduite dans [3].

On note $\mathbb{D}$ la catégorie des lattis distributifs bornés. Rappelons ([4] , p. 44) qu'un produit sous-direct L d'une famille $(L_x | x \in X)$ d'éléments de $\mathbb{D}$ en est un *produit booléen* si l'on peut munir X d'une topologie d'espace de Boole telle que

1) si $a,b \in L$, alors $[\![a = b]\!]$ $(= \{x \in X | a_x = b_x\})$ est ouvert;

2) si $a,b \in L$ et si W est ouvert fermé dans X, alors $1 = a|_W \cup b|_{-W}$ (défini par $1_x = a_x$ si $x \in W$ et $1_x = b_x$ si $x \notin W$) $\in L$.

Cette définition diffère légèrement de celle adoptée par Burris et Sankappanavar dans [1] p. 155, qui exigent la condition supplémentaire:

3) si $a,b \in L$, alors $[\![a = b]\!]$ est fermé.

Les produits booléens vérifiant 3) seront appelés ici *produits booléens séparés,* pour des raisons qui apparaissent clairement dans [4], p. 47.

Plus généralement, si $L \in \mathbb{D}$, une *décomposition booléenne* (resp. *séparée*) de L est un plongement $p:L \to \prod_{x\in X} L_x$ tel que p(L) soit produit booléen (resp. séparé) de $(L_x | x \in X)$. On dit que p *réalise* la décomposition dont les lattis L_x sont appelés les *fibres*.

Remarquons que, compte tenu de 1), $\{x \in X | L_x \text{ est trivial}\}$ $(= [\![o = 1]\!])$ est un ouvert de X. Dès lors, $X_o = \{x \in X | L_x \text{ n'est pas trivial}\}$ est un espace de Boole et

Présenté par L. Nollet, le 15 mars 1984.