Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège. 39e année, no 1-2, 1970, pp. 9-10

A PROPOS DE LA CINÉMATIQUE RELATIVISTE

par B. D'ORGEVAL

M. C. Cattaneo a donné en 1958 des axiomes pour la cinématique relativiste [1] et il est revenu sur ce sujet aux récentes journées relativistes de Dijon [2], présentant cet ancien travail comme « une première leçon sur la relativité restreinte ».

Dans cette présentation, M. Cattaneo pose un certain nombre d'axiomes, qui ne sont pas strictement relativistes puisque communs aux cinématiques classique et relativiste, et il en déduit la transformation de Lorentz :

$$(\mathrm{L})\ x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{w^2}}},\ y' = y,\ z' = z,\ t' = \frac{t - \dfrac{vx}{w^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{w^2}}}$$

Mais selon M. Cattaneo, ses axiomes ne donnent pas d'informations sur la constante universelle W : « La séparation entre cinématique classique et cinématique relativiste se fait au moment où un axiome ultérieur permet de préciser la valeur de W. Postuler un temps absolu comme le fait la physique classique revient à égaler à zéro la constante $1/\mathrm{W}^2$ ... La relativité au contraire postule qu il existe une vitesse qui a les propriétés de W et c'est la vitesse de la lumière dans le vide. L'éventualité d'une valeur imaginaire de W n'a jamais été prise en considération ».

C'est cette éventualité que je pense pouvoir tenir exclue par les axiomes de M. Cattaneo, qui ne seraient compatibles qu'avec $1/\mathrm{W}^2 = 0$ et $\mathrm{W}^2 = c^2$. Reprenons donc, les axiomes de M. Cattaneo :

I. — Il existe une infinité d'événements dont la totalité constitue une variété différentiable U que l'on appelle l'univers.

II. — Il existe un espace repère S à 3 dimensions, dit galiliéen, doué des propriétés suivantes :

a) pour toutes les figures qui sont en repos par rapport à S, la géométrie euclidienne est valable; S peut être muni d'un trièdre trirectangle $Oxyz$,

b) on peut associer à S, les notions « primitives » de simultanéité et de durée temporelle, ce qui revient à admettre l'existence d'un temps t dont seules l'origine et l'unité de mesure sont disponibles.

c) l'espace S muni du trièdre $Oyxz$ et du temps t forme le repère R $(Oxyz, t)$ de l'univers U des événements.

d) l'espace repère S est homogène et isotrope vis-à-vis de tous les phénomènes physiques.

Manuscrit reçu le 15 janvier 1970.

III. — Il existe une infinité d'espaces repères tridimensionnels superposés et mobiles l'un par rapport à l'autre, tels que :

a) chacun d'eux jouit de toutes les propriétés II de S.

b) ils sont en mouvement de translation uniforme l'un par rapport à l'autre.

c) ces repères en nombre ∞^3 sont physiquement indiscernables et donc équivalents par rapport à la formulation des lois physiques.

d) toute relation cinématique qui relie entre eux deux repères galiléens R et R′ dépend continuement des paramètres qui raractérisent R′ par rapport à R; chaque fonction d'un événement E différentiable en R, c'est-à-dire par rapport aux variables x, y, z, t est différentiable en R′, donc par rapport à x', y', z', t'.

Ces trois axiomes suffisent à obtenir les formules de Lorentz : il est alors bien connu que $1/W^2$ nul donne la cinématique classique, positive, la relativiste. Supposons alors $-W^2 = K^2 > 0$, c'est-à-dire W imaginaire; l'expression $\sqrt{1+\frac{v^2}{K^2}}$ est alors toujours définie, et rien ne limite la valeur de v.

Si l'on fait alors $v = \infty$, les formules (L) donnent $x' = -Kt$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = x/K$.

Cette hypothèse conduit donc à la possibilité d'échange d'une coordonnée spatiale avec une coordonnée temporelle. Une telle conclusion est contradictoire à II-b et III-c puisque les deux repères doivent être indiscernables par rapport à la formulation des lois physiques pour lesquelles le temps est irréversible, alors que le sens d'une direction peut être changée en son inverse.

Cette objection peut être rejetée, puisque l'on ne peut « physiquement » envisager une vitesse infinie, mais nous pouvons admettre l'existence de v très grand en sorte que l'on puisse linéariser les formules, négligeant les puissances en I/v. On réduit es formules de Lorentz à :

$$x' = -Kt + Kx/v \ldots y' = y, z' = z, t' = x/K + tK/v.$$

Si l'on recherche alors la vitesse

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{K}{v}\frac{dx}{dt} - K}{\frac{1}{K}\frac{dx}{dt} + \frac{K}{v}} = -\frac{K^2}{\frac{dx}{dt}} \frac{\left(\frac{1}{v}\frac{dx}{dt} - 1\right)}{\left(1 + \frac{K^2}{v}\left(\frac{1}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}\right)\right)}$$

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{K^2}{dx}\left(1 - \frac{1}{v}\frac{dx}{dt} - \frac{K^2}{v}\frac{1}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}\right)$$

$$\frac{dx'}{dt'} = K^2\frac{dt}{dx} - \frac{K^2}{v} - \frac{K^4}{v}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \ldots$$

ce qui serait contradictoire à III-c puisque la loi de composition des vitesses ne serait plus la même dans un système en repos et dans un système doté de très grande vitesse.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Cattaneo, Sui postulati comuni alla cinematica classica e alla cinematica relativistica. R. C. Acc. Naz. Lincei, s. VIII, vol. XXIV (1958).

[2] C. Cattaneo, Sur les axiomes de la mécanique relativiste. Journées relativistes (18, 19, 20 avril 1969). Fac. Sciences Dijon. Dép. d. Mathématiques, Dijon, 1969, p. 1-13.