Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 39e année, no 1-2, 1970, pp. 11-13

NOTE SUR LES CONGRUENCES DE DROITES

(2e PARTIE) (*)

par R. MATHAR (**)

§ 4.

Dans ce paragraphe, nous supposerons que les conditions $(\mathscr{C}_{\bar{y}}^{*})$, $(\mathscr{C}_{\bar{z}}^{*})$, $(\mathscr{C}_{\bar{\eta}}^{*})$ et $(\mathscr{C}_{\bar{\xi}}^{*})$ sont vérifiées $(\varpi_1\varpi_2 \neq 0)$.

13. — Les conditions $(\mathscr{C}_{\bar{z}}^{*})$ et $(\mathscr{C}_{\bar{\xi}}^{*})$ peuvent s'écrire

$$\gamma_1^{01} - \gamma_1 \left(\log \frac{\varpi_1}{c_1}\right)^{01} + (mn - \gamma_1)\frac{\varpi_1}{c_1} = 0. \qquad (\mathscr{C}_{\bar{z}})$$

$$m_1^{01} - m_1 \left(\log \frac{\varpi_1}{c_1}\right)^{01} - (c_1 d - m_1)\frac{\varpi_1}{c_1} = 0. \qquad (\mathscr{C}_{\bar{\xi}})$$

Par différence membre à membre, on obtient, tous calculs effectués

$$(\log \varpi_1 m)^{11} = 0.$$

et, de même,

$$(\log \varpi_2 n)^{11} = 0.$$

Multiplions z par une fonction arbitraire U de la seule variable u et y par une fonction arbitraire V de la seule variable v, puis effectuons la transformation $u = u(u^*)$, $v = v(v^*)$. Le système (I) de Wilczynski caractérisant la congruence (yz) conserve la même forme; si l'on marque d'un astérisque les nouveaux coefficients de ce système, on obtient notamment

$$m^* = m \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{U}} \frac{du}{du^*}; \quad n^* = n \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{V}} \frac{dv}{dv^*};$$

$$c_1^* = c_1 \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{V}} \left(\frac{du}{du^*}\right)^2 \frac{dv^*}{dv}; \quad d^* = d \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{U}} \left(\frac{dv}{dv^*}\right)^2 \frac{du^*}{du};$$

$$d_1^* = d_1 \frac{du}{du^*} + \frac{d}{du^*}(\log \mathrm{U}) + \frac{d}{du^*}\left[\log\left(\mathrm{U}\frac{du}{du^*}\right)\right];$$

$$c^* = c \frac{dv}{dv^*} + \frac{d}{dv^*}(\log \mathrm{V}) + \frac{d}{dv^*}\left[\log\left(\mathrm{V}\frac{dv}{dv^*}\right)\right].$$

$$\frac{\varpi_1^*}{c_1^*} = \frac{\partial}{\partial v^*}\left(\log \frac{m^*}{c_1^*}\right) - c^* = \frac{\partial}{\partial v^*}\left(\log \frac{m}{c_1}\right) - c\frac{dv}{dv^*}.$$

(*) Voir 1re partie dans *Bull. Soc. Roy. des Sciences de Liège*, t. 38, 1969, p. 176-181

(**) Présenté par O. Rozet, le 19 février 1970.

$$m^*c_1^* = mc_1\left(\frac{du}{du^*}\right)^3\frac{dv^*}{dv}$$

et

$$\varpi_1^* m^* = \varpi_1 m\left(\frac{du}{du^*}\right)^3.$$

Mais $(\log \varpi_1 m)^{11} = 0$ ou $\varpi_1 m = \mathscr{U}_2\mathscr{V}_2$

où $\mathscr{U}_2$ et $\mathscr{V}_2$ désignent respectivement des fonctions arbitraires de u et de v. Il en résulte que par un choix convenable de $u = u(u^*)$, on peut faire en sorte que

$$\varpi_1^* m^* = \mathscr{V}_2 \quad \text{ou} \quad (\varpi_1^* m^*)^{10} = 0.$$

Nous supposerons dorénavant qu'il en est ainsi.

De la même manière, on peut montrer que, par un choix convenable de $v = v(v^*)$, on a

$$(\varpi_2 n)^{01} = 0.$$

13*bis*. — Si $\Phi = \Psi = 0$, les conditions du n° 13 sont remplies et on peut faire en sorte que

$$(\varpi_1 m)^{10} = 0 \quad \text{et} \quad (\varpi_2 n)^{01} = 0.$$

Mais, dans ce cas, on a aussi

$$(\varpi_1 m)^{01} = 0 \quad \text{et} \quad (\varpi_2 n)^{10} = 0.$$

Les fonctions $\varpi_1 m$ et $\varpi_2 n$ se réduisent dès lors à des constantes (que l'on peut prendre égales à 1).

14. — Les conditions $(\mathscr{C}_{\bar{z}}^*)$ et $(\mathscr{C}_{\bar{\xi}}^*)$ entraînent

$$\frac{c_1}{\varpi_1}\left(\frac{\varpi_1}{c_1}\right)^{10} + (\log mc_1)^{10} = \mathscr{U} - \mathscr{U}_1.$$

ou

$$\mathscr{U} = \mathscr{U}_1$$

et, de même,

$$\mathscr{V} = \mathscr{V}_1.$$

15. — Quand u et v varient, la droite $\bar{y}\bar{z}$ décrit une congruence $(\bar{y}\bar{z})$. Les foyers de la génératrice $\bar{y}\bar{z}$ de cette congruence sont du type $\theta_1\bar{y} + \theta_2\bar{z}$ moyennant

$$\varphi\pi_2\theta_1^2 - (\varphi\psi + \pi_1\pi_2 - \gamma_1\delta_1)\theta_1\theta_2 + \psi\pi_1\theta_2^2 = 0.$$

Quant à l'équation différentielle des développables de $(\bar{y}\bar{z})$, elle s'écrit

$$\varphi\gamma_1 du^2 + (\gamma_1\delta_1 - \varphi\psi - \pi_1\pi_2)dudv + \psi\delta_1 dv^2 = 0.$$

Sous les conditions nécessaires et suffisantes $\varphi = \psi = 0$, ces expressions se réduisent respectivement à

$$(\gamma_1\delta_1 - \pi_1\pi_2)\theta_1\theta_2 = 0$$

et

$$(\gamma_1\delta_1 - \pi_1\pi_2)dudv = 0.$$

Si $\gamma_1\delta_1 - \pi_1\pi_2 = 0$, la congruence $(\bar{y}\bar{z})$ est à foyers et développables indéterminés.

Nous excluons dorénavant ce cas. La congruence $(\bar{y}\bar{z})$ est, dès lors, rapportée à ses développables et les foyers de sa génératrice $\bar{y}\bar{z}$ sont précisément les points $\bar{y}$ et $\bar{z}$.

16. — Quand u et v varient, la droite $\bar{\eta}\bar{\xi}$ décrit une congruence $(\bar{\eta}\bar{\xi})$. Les plans focaux de la génératrice $\bar{\eta}\bar{\xi}$ de cette congruence sont du type $\theta_1\bar{\eta} + \theta_2\bar{\xi}$ moyennant

$$\varpi_2\Phi\theta_1^2 - (\Phi\Psi + \varpi_1\varpi_2 - m_1n_1)\theta_1\theta_2 + \varpi_1\Psi\theta_2^2 = 0.$$

Quant à l'équation différentielle des développables de $(\bar{\eta}\bar{\xi})$, elle s'écrit

$$\Phi m_1 du^2 + (\Phi\Psi - \varpi_1\varpi_2 + m_1n_1)du dv + n_1\Psi dv^2 = 0.$$

Sous les conditions nécessaires et suffisantes $\Phi = \Psi = 0$, (équivalentes à $\varphi = \psi = 0$), ces expressions se réduisent respectivement à

$$(m_1n_1 - \varpi_1\varpi_2)\theta_1\theta_2 = 0$$

et

$$(m_1n_1 - \varpi_1\varpi_2)du dv = 0.$$

Si $m_1n_1 - \varpi_1\varpi_2 = 0$, la congruence $(\bar{\eta}\bar{\xi})$ est à plans focaux et développables indéterminés. Nous excluons dorénavant ce cas. Dès lors, la congruence $(\bar{\eta}\bar{\xi})$ est rapportée à ses développables et les plans focaux de la génératrice $\bar{\eta}\bar{\xi}$ sont précisément les plans $\bar{\eta}$ et $\bar{\xi}$.

17. — Remarquons, pour terminer, que le plan $\bar{\eta}$ contient le point $\bar{z}$, mais ne peut contenir le point $\bar{y}$. De même, le plan $\bar{\xi}$ contient le point $\bar{y}$, mais ne peut contenir le point $\bar{z}$. Il en résulte que le plan $\bar{\eta}$ n'est jamais le plan tangent à $(\bar{y})$ en $\bar{y}$, ni à $(\bar{z})$ en $\bar{z}$ et qu'il en est de même en ce qui concerne le plan $\bar{\xi}$.

A une congruence (yz) donnée, on pourra donc associer deux congruences distinctes $(\bar{y}\bar{z})$ et $(\bar{\eta}\bar{\xi})$.