Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 39e année, no 1-2, 1970, pp. 14-21

SUR L'ESTIMATION ERGODIQUE DU TEMPS MOYEN DE PRÉSENCE DANS UNE FILE D'ATTENTE

(DEUXIÈME NOTE)

par M. FRAITURE

0. INTRODUCTION

Nous reprenons les données et les notations introduites dans la première note ([3]) en considérant cependant le cas particulier où le nombre de clients par grappe est constant et par conséquent où le coéfficient de variation du nombre de clients par grappe, CV_b, est nul. Nous avons donc :

$$\nu_1 = \nu, \quad \nu_2 = \nu^2, \quad \nu_3 = \nu^3, \quad \nu_4 = \nu^4.$$

Nous allons calculer la valeur du coéfficient de ε^2 dans le développement asymptotique de $R_\infty(\varepsilon) \cdot \varepsilon^2$ lorsque ε tend vers zéro (c.-à-d. la valeur du coéfficient de $R_\infty(\rho)\ (1-\rho)^2$ lorsque ρ tend vers 1, étant donné le changement de variable

$$\rho = 1 - \varepsilon).$$

1. CALCUL DE σ_W^2

$$\mathscr{E}_{eq}\mathbf{W}_N = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\,\frac{\varkappa_2 + \nu\varkappa_1^2}{2\varkappa_1}$$

$$\operatorname{var}_{eq}\mathbf{W}_N = \frac{3\nu^2\varkappa_1^2 A^2 + \varepsilon\left(4\dfrac{\varkappa_3}{\varkappa_1} - 2\nu^2\varkappa_1^2 - 6\dfrac{\varkappa_2^2}{\varkappa_1^2}\right) + O(\varepsilon^2)}{12\varepsilon^2}$$

$$\operatorname{var}_{eq}(\mathbf{s} * \mathbf{k}_N) = \frac{O(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}$$

$$\sigma_W^2 = \operatorname{var}_{eq}\mathbf{W}_N + \operatorname{var}_{eq}(\mathbf{s} * \mathbf{k}_N)$$

$$= \frac{3\nu^2\varkappa_1^2 A^2 + \varepsilon\left(4\dfrac{\varkappa_3}{\varkappa_1} - 2\nu^2\varkappa_1^2 - 6\dfrac{\varkappa_2^2}{\varkappa_1^2}\right) + O(\varepsilon^2)}{12\varepsilon^2}$$

2.0. PRÉLIMINAIRES

Les matrices N, N^{-1}, K, K^{-1}, $(N^{-1} - K)^{-1}$ et $(K^{-1} - N)^{-1}$ ont été introduites dans la première note ([3]).

Présenté par H. Breny, le 15 janvier 1970.

Nous nous bornons à donner leur valeur dans le cas particulier où $CV_b = 0$.

$$N = \begin{vmatrix} \nu & \nu^2 & \nu^3 & \nu^4 \\ 0 & \nu^2 & 3\nu^3 & 7\nu^4 \\ 0 & 0 & \nu^3 & 6\nu^4 \\ 0 & 0 & 0 & \nu^4 \end{vmatrix}$$

$$N^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\nu} & -\frac{1}{\nu} & \frac{2}{\nu} & -\frac{6}{\nu} \\ 0 & \frac{1}{\nu^2} & -\frac{3}{\nu^2} & \frac{11}{\nu^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\nu^3} & -\frac{6}{\nu^3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\nu^4} \end{vmatrix}$$

$$k_1 = \frac{1-\varepsilon}{\nu} \qquad k_3 = \frac{(1-\varepsilon)^3}{\nu^3}\frac{\varkappa_3}{\varkappa_1^3}$$

$$k_2 = \frac{(1-\varepsilon)^2\,\varkappa_2}{\nu\,\varkappa_1^2} \qquad k_4 = \frac{(1-\varepsilon)^4\,\varkappa_4}{\nu^4\,\varkappa_1^4}$$

$$K = \begin{vmatrix} \frac{1-\varepsilon}{\nu} & \frac{(1-\varepsilon)^2\,\varkappa_2}{\nu^2\,\varkappa_1^2} & \frac{(1-\varepsilon)^3\,\varkappa_3}{\nu^3\,\varkappa_1^3} & \frac{(1-\varepsilon)^4\,\varkappa_4}{\nu^4\,\varkappa_1^4} \\ 0 & \frac{(1-\varepsilon)^2}{\nu^2} & \frac{3(1-\varepsilon)^3\,\varkappa_2}{\nu^3\,\varkappa_1^2} & \frac{4(1-\varepsilon)^4\varkappa_3}{\nu^4\,\varkappa_1^3} + \frac{3(1-\varepsilon)^4\,\varkappa_2^2}{\nu^4\,\varkappa_1^4} \\ 0 & 0 & \frac{(1-\varepsilon)^3}{\nu^3} & \frac{6(1-\varepsilon)^4\,\varkappa_2}{\nu^4\,\varkappa_1^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\varepsilon)^4}{\nu^4} \end{vmatrix}$$

$$K^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\nu}{1-\varepsilon} & -\frac{\nu\varkappa_2}{\varkappa_1^2(1-\varepsilon)} & * & * \\ 0 & \frac{\nu^2}{(1-\varepsilon)^2} & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix} \quad (1)$$

(1) L'astérisque dans une matrice indique un élément non nul qu'il n'est pas nécessaire d'expliciter.

$$(N^{-1} - K)^{-1} = \begin{vmatrix} \dfrac{\nu}{\varepsilon} & \dfrac{\nu^2\left[A + \varepsilon\left(-2\dfrac{\varkappa_2}{\nu\varkappa_1^2} + \dfrac{A}{2}\right)\right] + O(\varepsilon^2)}{2\varepsilon^2} & c & d \\ 0 & \dfrac{\nu^2\left(1 + \dfrac{\varepsilon}{2}\right) + O(\varepsilon^2)}{2\varepsilon} & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

avec

$$c = \frac{\nu^3\left[3A^2 + \varepsilon\left(-15A\dfrac{\varkappa_2}{\nu\varkappa_1^2} - 4 + 2\dfrac{\varkappa^3}{\nu^2\varkappa_1^3} + \dfrac{9A^2}{2}\right)\right] + O(\varepsilon^2)}{6\varepsilon^3}$$

$$d = \frac{\nu^4\left[6A^3 + \varepsilon A\left(18A^2 - 19 + 3\dfrac{\varkappa_2^2}{\nu^2\varkappa_1^4} - 54A\dfrac{\varkappa_2}{\nu\varkappa_1^2} + 8\dfrac{\varkappa_3}{\nu^2\varkappa_1^3}\right)\right] + O(\varepsilon^2)}{8\varepsilon^4}$$

$$(K^{-1} - N)^{-1} = \begin{vmatrix} \dfrac{1-\varepsilon}{\nu\varepsilon} & \dfrac{A - \varepsilon\left(\dfrac{3A}{2} + 1\right) + O(\varepsilon^2)}{2\nu\varepsilon^2} & * & * \\ 0 & \dfrac{1 - \dfrac{3\varepsilon}{2} + O(\varepsilon^2)}{2\varepsilon\nu^2} & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

Les calculs des θ sont assez lourds. Pour simplifier la rédaction nous nous limiterons à énoncer les résultats, en indiquant éventuellement certaines étapes qui nous semblent importantes. Pour le détail des formules, il suffit de se reporter à [3].

2.1. $\theta_{1,0} = \dfrac{\nu}{\varepsilon}$

2.2. $$\theta_{0,1} = \frac{\nu^2\varkappa_1 A + \varepsilon\nu\varkappa_1\left(1 - \dfrac{\varkappa_2}{\varkappa_1^2}\right) + O(\varepsilon^2)}{2\varepsilon^2}$$

2.3. $$\theta_{2,0} = \frac{\nu^2\left(2A - 4\dfrac{\varkappa_2}{\nu\varkappa_1^2}\varepsilon\right) + O(\varepsilon^2)}{2\varepsilon^3}$$

2.4. CALCUL DE $\theta_{0,2}$

$$(1) = \left| \frac{O(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}, \frac{O(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}, \frac{O(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}, 0 \right|^T$$

$$(2) = \left| 0,\ \frac{\varkappa_1^2}{4},\ \frac{\varkappa_1^2}{2},\ \frac{\varkappa_1^2}{4} \right|^{\mathrm{T}}$$

$$(3) = \left| \frac{A\nu\varkappa_2 + \mathrm{O}(\varepsilon)}{4\varepsilon^2},\ \frac{A\nu(\varkappa_2 + \varkappa_1^2) + \mathrm{O}(\varepsilon)}{4\varepsilon^2},\right.$$

$$\left. \frac{A\nu\varkappa_1^2 + \varepsilon\left(-\frac{A\nu\varkappa_1^2}{2} + \varkappa_2 + 3\varkappa_1^2\right) + \mathrm{O}(\varepsilon^2)}{4\varepsilon^2},\ \frac{\varkappa_1^2\left(1 - \frac{3\varepsilon}{2}\right) + \mathrm{O}(\varepsilon^2)}{4\varepsilon} \right|^{\mathrm{T}}$$

$$(4) = \left| \frac{\mathrm{O}(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2},\ \frac{\mathrm{O}(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2},\ \frac{\mathrm{O}(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2},\ \frac{\nu^4\varkappa_1^2(1-\varepsilon)^2}{4\nu^4} \right|^{\mathrm{T}}$$

$$(5) = \left| \frac{A\nu(\nu\varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_3) + \mathrm{O}(\varepsilon)}{4\varepsilon^2\varkappa_1},\ \frac{A\nu(\nu\varkappa_1^2 + 3\varkappa_2) + \mathrm{O}(\varepsilon)}{4\varepsilon^2},\right.$$

$$\left. \frac{A\nu\varkappa_1^2 + \varepsilon\left(2\nu\varkappa_1^2 + 6\varkappa_2 - \frac{5A\nu\varkappa_1^2}{2}\right) + \mathrm{O}(\varepsilon^2)}{4\varepsilon^2},\ \frac{\varkappa_1^2\left(1 - \frac{7\varepsilon}{2}\right) + \mathrm{O}(\varepsilon^2)}{4\varepsilon} \right|^{\mathrm{T}}$$

$$(6) = \left| \frac{A\nu(\varkappa_3 + \nu\varkappa_1\varkappa_2) + \mathrm{O}(\varepsilon)}{4\varepsilon^2\varkappa_1},\ \frac{A\nu(\nu\varkappa_1^2 + 3\varkappa_2) + \mathrm{O}(\varepsilon)}{4\varepsilon^2},\right.$$

$$\left. \frac{A\nu\varkappa_1^2 + \varepsilon\left(4\varkappa_2 + 2\varkappa_1^2 + 2\nu\varkappa_1^2 - 3\,\frac{A\nu\varkappa_1^2}{2}\right) + \mathrm{O}(\varepsilon^2)}{4\varepsilon^2},\ \frac{\varkappa_1^2\left(1 - \frac{5\varepsilon}{2}\right) + \mathrm{O}(\varepsilon^2)}{4\varepsilon} \right|^{\mathrm{T}}$$

$$(7) = \left| \frac{\mathrm{O}(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2},\ \frac{\mathrm{O}(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2},\ \frac{\mathrm{O}(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2},\ \frac{\varkappa_1^2(1-\varepsilon)}{2} \right|^{\mathrm{T}}$$

$$(8) = \left| \frac{A\nu\varkappa_2 + \mathrm{O}(\varepsilon)}{4\varepsilon^2},\ \frac{A\nu(\varkappa_2 + \varkappa_1^2) + \mathrm{O}(\varepsilon)}{4\varepsilon^2},\right.$$

$$\left. \frac{A\nu\varkappa_1^2 + \varepsilon\left(-\frac{3A\nu\varkappa_1^2}{2} + 3\varkappa_2 + \varkappa_1^2\right) + \mathrm{O}(\varepsilon^2)}{4\varepsilon^2},\ \frac{\varkappa_1^2\left(1 - \frac{5\varepsilon}{2}\right) + \mathrm{O}(\varepsilon^2)}{4\varepsilon} \right|^{\mathrm{T}}$$

Si nous notons

$$|\, a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4 \,|^{\mathrm{T}}$$

la somme de ces huit vecteurs, nous trouvons :

$$a_1 = \frac{A\nu\left(2\varkappa_2 + 2\nu\varkappa_2 + 2\,\frac{\varkappa_3}{\varkappa_1}\right) + \mathrm{O}(\varepsilon)}{4\varepsilon^2}$$

$$a_2 = \frac{A\nu(4\varkappa_2 + \varkappa_1^2 + \nu\varkappa_1^2) + \mathrm{O}(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}$$

$$a_3 = \frac{2A\nu\varkappa_1^2 + \varepsilon\,(-\nu\varkappa_1^2 + 4\varkappa_2 + 3\varkappa_1^2) + \mathrm{O}(\varepsilon^2)}{2\varepsilon^2}$$

$$a_4 = \frac{2\varkappa_1^2 - 3\varkappa_1^2\varepsilon + O(\varepsilon^2)}{2\varepsilon}$$

Dès lors

$$\theta_{0,2} = \mathsf{e}_1^{\mathrm{T}}(N^{-1} - K)^{-1} \mid a_1, a_2, a_3, a_4 \mid^{\mathrm{T}}$$

$$= \frac{30A^3\nu^4\varkappa_1^2}{24\varepsilon^5} +$$

$$+ \frac{\varepsilon A\nu^2}{24\varepsilon^5}\left(24\varkappa_2 - 84\nu\varkappa_2 + 24\nu\varkappa_1^2 - 28\nu^2\varkappa_1^2 - 120\,\frac{\varkappa_2^2}{\varkappa_1^2} + 32\,\frac{\varkappa_3}{\varkappa_1}\right)$$

2.5. CALCUL DE $\theta_{1,1}$

$$(\mathrm{a}) = \left| \frac{\varkappa_2(1-\varepsilon)}{2\varepsilon\varkappa_1},\ \frac{(\varkappa_2 + \varkappa_1^2)(1-\varepsilon)}{2\varepsilon\varkappa_1},\ \frac{\varkappa_1(1-\varepsilon)}{2\varepsilon},\ 0 \right|^{\mathrm{T}}$$

$$(\mathrm{b}) = \frac{\varkappa_1}{2}\left| 0,\ \frac{A\nu + \varepsilon\left(-2\,\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1^2} + \frac{A\nu}{2} + 2 - \nu\right) + O(\varepsilon^2)}{2\varepsilon^2},\ \frac{1 + \frac{\varepsilon}{2} + O(\varepsilon^2)}{2\varepsilon},\ 0 \right|^{\mathrm{T}}$$

$$(\mathrm{c}) = \left| \frac{\nu\varkappa_2 + \frac{\varkappa_3}{\varkappa_1} + \varepsilon\left(-\nu\varkappa_2 - 2\,\frac{\varkappa_3}{\varkappa_1}\right) + O(\varepsilon^2)}{2\varepsilon\varkappa_1},\ \frac{\nu\varkappa_1^2 + 3\varkappa_2 + \varepsilon\,(-\nu\varkappa_1^2 - 6\varkappa_2) + O(\varepsilon^2)}{2\varepsilon\varkappa_1},\right.$$

$$\left. \frac{\varkappa_1(1-\varepsilon)^2 + O(\varepsilon^2)}{2\varepsilon},\ 0 \right|^{\mathrm{T}}$$

$$(\mathrm{d}) = \left| 0,\ \frac{\varkappa_1\nu\left[A - \varepsilon\left(\frac{A}{2} + 1\right)\right] + O(\varepsilon^2)}{4\varepsilon^2},\ \frac{\varkappa_1\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) + O(\varepsilon^2)}{4\varepsilon},\ 0 \right|^{\mathrm{T}}$$

Dès lors

$$\theta_{1,1} = \mathsf{e}_1^{\mathrm{T}}(N^{-1} - K)^{-1}\left| \frac{\varkappa_2 + \nu\varkappa_2 + \frac{\varkappa_3}{\varkappa_1} + O(\varepsilon)}{2\varepsilon\varkappa_1},\ \frac{2A\nu\varkappa_1^2 + \varepsilon(6\varkappa_2 + 4\varkappa_1^2) + O(\varepsilon^2)}{4\varepsilon^2\varkappa_1},\right.$$

$$\left. \frac{3\varkappa_1(1-\varepsilon) + O(\varepsilon^2)}{2\varepsilon},\ 0 \right|^{\mathrm{T}}$$

$$\theta_{1,1} = \frac{2A^2\nu^3\varkappa_1^2 + \varepsilon\nu^2\left(-5\varkappa_2 - 6\,\frac{\varkappa_2^2}{\nu\varkappa_1^2} - \nu\varkappa_1^2 + \varkappa_1^2 + \frac{\varkappa_2}{\nu} + \frac{\varkappa_3}{\nu\varkappa_1}\right) + O(\varepsilon^2)}{2\varepsilon^4\varkappa_1}$$

CALCUL DE $R_\infty\varepsilon^2$

$$2\theta_{0,1}\,\theta_{0,1}\,\theta_{1,1} = \frac{2A^3\nu^6\varkappa_1^2 + \varepsilon A\nu^5\left(-7\varkappa_2 - 8\,\frac{\varkappa_2^2}{\nu\varkappa_1^2} - \nu\varkappa_1^2 + 3\,\frac{\varkappa_2}{\nu} + \frac{\varkappa_3}{\nu\varkappa_1} + 3\varkappa_1^2\right)}{2\varepsilon^7} + \frac{O(\varepsilon^2)}{\varepsilon^7}$$

$$\theta_{0,1}^2\,\theta_{2,0} = \frac{A^3\nu^6\varkappa_1^2 + 2\varepsilon A\nu^5\left(\varkappa_1^2 - 2\varkappa_2 + \dfrac{\varkappa_2}{\nu} - 2\,\dfrac{\varkappa_2^2}{\nu\varkappa_1^2}\right) + O(\varepsilon^2)}{4\varepsilon^7}$$

$$\theta_{0,1}^2\,\theta_{0,2} = \frac{15A^3\nu^6\varkappa_1^2}{12\varepsilon^7} + \frac{\varepsilon A\nu^5}{12\varepsilon^7}\left(12\,\frac{\varkappa_2}{\nu} - 42\varkappa_2 + 12\varkappa_1^2 - 14\nu\varkappa_1^2 - 60\,\frac{\varkappa_2^2}{\nu\varkappa_1^2} + 16\,\frac{\varkappa_3}{\nu\varkappa_1}\right) + \frac{O(\varepsilon^2)}{\varepsilon^7}$$

$$\theta_{1,0}^2\,\theta_{0,2} - 2\theta_{1,0}\,\theta_{0,1}\,\theta_{1,1} + \theta_{0,1}^2\,\theta_{2,0} =$$

$$\frac{6A^3\nu^6\varkappa_1^2 + \varepsilon A\nu^5\left(-12\varkappa_2 - 24\,\dfrac{\varkappa_2^2}{\nu\varkappa_1^2} - 8\nu\varkappa_1^2 + 10\,\dfrac{\varkappa_3}{\nu\varkappa_1}\right) + O(\varepsilon^2)}{12\varepsilon^7}$$

$$\sigma_W^2\,\theta_{1,0}^3 = \frac{3\nu^5\varkappa_1^2A^2 + \varepsilon\nu^3\left(4\,\dfrac{\varkappa_3}{\varkappa_1} - 2\nu^2\varkappa_1^2 - 6\,\dfrac{\varkappa_2^2}{\varkappa_1^2}\right) + O(\varepsilon^2)}{12\varepsilon^5}$$

Étant donné que

$$CV_{tot}^2 = \frac{\varkappa_2}{\nu\varkappa_1^2} = \frac{CV_s^2}{\nu}$$

nous obtenons le résultat final

$$R_\infty\varepsilon^2 = 2A\nu - \varepsilon\nu\left[\frac{4}{3}(1 + 2CV_{tot}^2) + \frac{2}{3}\,\frac{2CV_{tot}^4 - \dfrac{\varkappa_3}{\nu^2\varkappa_1^3}}{1 + CV_{tot}^2}\right] + O(\varepsilon^2)$$

ce qui peut se traduire par

$$\lim_{\rho\to 1}(1-\rho)^2R_\infty(\rho) = 2\nu(1 + CV_{tot}^2)$$

(démontré déjà dans [3])

et

$$A_1 = \lim_{\rho\to 1}\frac{2\nu(1 + CV_{tot}^2) - (1-\rho)^2R_\infty(\rho)}{1-\rho} = \frac{4}{3}\,\nu\,(1 + 2CV_{tot}^2) + \frac{2}{3}\,\nu\,\frac{2CV_{tot}^4 - \dfrac{\varkappa_3}{\nu^2\varkappa_1^3}}{1 + CV_{tot}^2}$$

D'après une analyse numérique de A_1, H. Breny ([1] p. 47) avait conjecturé que, dans le cas particulier où $CV_b = 0$,

$$A_1 = \frac{4}{3}\,\nu(1 + 2CV_{tot}^2);$$

c'est là le premier terme de l'expression trouvée ci-dessus.

Cependant le terme correcteur

$$B = \frac{2}{3}\,\nu\,\frac{2CV_{tot}^4 - \dfrac{\varkappa_3}{\nu^2\varkappa_1^3}}{1 + CV_{tot}^2}$$

qui doit en réalité être ajouté à $\frac{4}{3}\,\nu(1 + 2CV_{tot}^2)$ pour obtenir la valeur du coéfficient de ε dans le développement asymptotique de $R_\infty\varepsilon^2$, s'annule dans tous les cas numériques envisagés par H. Breny pour établir la formule (dans tous ces cas on a la relation

$$2\varkappa_2^2 = \varkappa_3\varkappa_1$$

qui annule B). La formule donnée dans [1] reste donc valable dans ces cas particuliers.

4. MISE EN NOMBRES

Pour vérifier l'expression de A_1 nous avons calculé explicitement

$$R_\infty$$

$$R_\infty(1 - \rho)^2$$

$$As_2 = \frac{2\nu(1 + CV_{tot}^2) - (1 - \rho)^2 R_\infty}{1 - \rho}$$

pour des valeurs de ρ de plus en plus voisines de 1 et pour différentes distributions du temps de service d'un client et du nombre de clients par grappe (constant dans le cas envisagé ici) à savoir :

En ce qui concerne le nombre de clients par grappe :

I : $\nu = 1$
II : $\nu = 2$
III : $\nu = 3$
IV : $\nu = 4$
V : $\nu = 5$
VI : $\nu = 6$
VII : $\nu = 10$
VIII : $\nu = 25$

En ce qui concerne la durée du temps de service :

A. distribution rectangulaire entre 0 et 2 :
$\varkappa_1 = 1$ $\quad \varkappa_2 = 0{,}33333$ $\quad \varkappa_3 = 0$ $\quad \varkappa_4 = -0{,}13333$

B. $\varkappa_1 = 3$ $\quad \varkappa_2 = 1{,}33333$ $\quad \varkappa_3 = 0{,}00003$ $\quad \varkappa_4 = 2{,}13349$

C. distribution rectangulaire entre 2 et 4 :
$\varkappa_1 = 3$ $\quad \varkappa_2 = 0{,}33333$ $\quad \varkappa_3 = 0{,}00003$ $\quad \varkappa_4 = -0{,}13348$

D. $\varkappa_1 = 2{,}5$ $\quad \varkappa_2 = 1{,}91666$ $\quad \varkappa_3 = 1{,}50005$ $\quad \varkappa_4 = 0{,}14145$

E. $\varkappa_1 = 3{,}5$ $\quad \varkappa_2 = 2{,}41666$ $\quad \varkappa_3 = 6{,}75007$ $\quad \varkappa_4 = 29{,}49123$

Les calculs montrent que la limite de As_2 pour ρ tendant vers 1 coïncide bien dans tous les cas avec sa valeur obtenue à partir de la formule A_1.

Il faut remarquer que la variation de As_2 n'est pas toujours monotone et que As_2 peut être croissant ou décroissant à la limite.

Donnons trois exemples typiques.

II A (cas non monotone)

ρ =	0,10	0,25	0,40	0,50	0,70	0,85	0,90	0,95	0,98	0,995
As_2 =	3,6179	3,6747	3,6980	3,7	3,6811	3,6535	3,6425	3,6310	3,6239	3,6203

$$A_1 = 3{,}6190$$

V E (cas monotone décroissant)

$\rho\ = 0{,}10$	0,25	0,40	0,50	0,70	0,85	0,90	0,95
$As_2 = 9{,}0169$	8,4418	8,0380	7,8299	7,5104	7,3296	7,2769	7,2281
$\rho\ = 0{,}98$	0,99	0,995	0,999	0,9995	0,9999	0,99995	0,99999
$As_2 = 7{,}2004$	7,1914	7,1870	7,1834	7,1830	7,1826	7,1826	7,1825

$$A_1 = 7{,}18253$$

I D (cas monotone croissant)

$\rho\ = 0{,}10$	0,25	0,40	0,50	0,70	0,85	0,90	0,95
$As_2 = 1{,}7346$	1,8844	1,9989	2,0578	2,1402	2,1771	2,1856	2,1926
$\rho\ = 0{,}98$	0,99	0,995	0,999	0,9995	0,9999	0,99995	0,99999
$As_2 = 2{,}1960$	2,1971	2,1976	2,1980	2,1980	2,1981	2,1981	2,1981

$$A_1 = 2{,}1981$$

L'ensemble des calculs a été effectué sur l'ordinateur « *IBM 360* » du Centre de Calcul de l'Université de Liège à partir d'un programme établi par H. Breny.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Breny, Quelques propriétés des files d'attente où les clients arrivent en grappes. *Mém. Soc. Roy. Sc. Liège*, 5, VI/4 (1961), 7.

[2] H. Breny, Sur l'estimation ergodique du temps moyen de présence dans une file d'attente du type MI/M/1. *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège*, nº 11-12, 1962, pp. 767-779.

[3] M. Fraiture, Sur l'estimation ergodique du temps moyen de présence dans une file d'attente (Première note). *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège*, nº 5-6, 1969, pp. 182-193.