

SUR UN MODELE DE PARTICULE DONT LE REFERENTIEL PROPRE  
EST DU TYPE I.M.F. \*

R. DUTHEIL

Université de Poitiers, Département de Physique  
et Institut Henri Poincaré - Paris  
Laboratoire de Physique Théorique (Professeur J.P. Vigié)

SUMMARY

We analyse the isomorphism of  $SO(3,1; C)$  and  $SO(1,3; C)$  groups, from which one can derive two complete LORENTZ groups  $L_+^T$  and  $L_+^{\bar{T}}$ , which are subluminal and superluminal respectively. It is shown that it is impossible to find an operator belonging to  $SO(4; C)$  that serves to pass from one group to the other. However, by considering the  $SO(2; C)$  group, namely the  $SO(1,1; C)$  groups, it is possible to define two conjugate LORENTZ groups with two dimensions  $\mathcal{L}_+^T$  and  $\mathcal{L}_+^{\bar{T}}$ . On this basis, and using a purely algebraic method, we rediscover the concept of the IMF referential frame and the light cone coordinates.

By then writing the time-like and space-like KLEIN-GORDON and DIRAC equations in this coordinate system, we search for a common solution and find a DIRAC equation defining a particle whose rest frame is of the IMF type, with a helicity  $|\rho\lambda| >$  such that  $\lambda = \pm 1$ . However the solutions to this spinorial equation can be identified as the components of the electromagnetic field tensor.

In these conditions, it can consider that a photon model has been defined.

INTRODUCTION

En nous basant d'une part sur la Théorie de la Relativité générale et d'autre part sur la Théorie de la Relativité dans la région du genre espace [1], nous avons donné une interprétation du modèle d'électron rigide proposé par DIRAC [2].

Dans ces conditions, se trouve posé le problème de l'existence d'un opérateur permettant de passer des coordonnées sous-lumineuses ORF (= Ordinary Referential Frame) aux coordonnées inhérentes superlumineuses [1].

Certains auteurs cités dans un article récent [3] ne trouvent aucune rotation du groupe  $SO(4; C)$  permettant de changer le signe de la métrique et font appel à un groupe  $SO'(4; C)$ . En analysant l'isomorphisme du groupe complet de LORENTZ habituel et du groupe complet de LORENTZ superlumineux que nous avons

\* Présenté par J. Cl. Pecker, le 26 avril 1984.

proposé [1], nous montrons également qu'une telle rotation du groupe  $SO(4;C)$  n'existe pas, mais que par contre un opérateur faisant partie du  $SO(2;C)$  répond à ces conditions. Cet opérateur nous permet de définir, par une méthode purement algébrique, de nouvelles coordonnées inhérentes  $(\tau, \xi)$  associées à un référentiel, dit référentiel  $\Omega$ , dont deux coordonnées du type ORF. Nous identifions  $(\tau, \xi)$  aux coordonnées du cône de lumière et  $\Omega$  à un référentiel IMF (= Infinite Momentum Frame) introduits par d'autres auteurs [4] à l'aide d'une méthode analytique. Cette impossibilité que l'on a à définir plus de deux coordonnées inhérentes nous paraît fondamentale et liée au fait que la recherche d'un opérateur quadridimensionnel soulève des difficultés sur le plan de la macrocausalité.

En considérant une particule, dont le référentiel propre serait du type  $\Omega$ , c'est-à-dire du type IMF, ayant une composante du genre temps et une composante du genre espace, nous montrons qu'une telle particule possède une hélicité  $|\vec{p}\lambda\rangle$ , telle que  $\lambda = \pm 1$  et que les composantes spinorielles  $\psi$  solutions de l'équation du premier ordre de cette particule peuvent être identifiées dans le référentiel propre de la particule aux composantes du tenseur champ-électromagnétiques.

Dans ces conditions, un tel modèle peut être utilisé comme modèle de photon et doit permettre d'interpréter certaines propriétés des ondes évanescentes observées à la surface d'un diélectrique [5].

## I. SUR LES GROUPES DE LORENTZ ISOMORPHES

Les groupes  $SO(3,1;c)$  et  $SO(1,3;C)$  des  $4 \times 4$  matrices complexes, isomorphes à  $SO(4;C)$  sont isomorphes et conservent respectivement les métriques de signatures  $----$  et  $----$ .

Il en résulte qu'il existe deux groupes complets et orthochrones de Lorentz ayant même Algèbre de Lie et isomorphes [6]

$$L_+^I \text{ et } L_+^{I'}$$

conservant respectivement les métriques de signatures respectives  $----$  et  $----$ .

$L_+^I$  est le groupe des  $4 \times 4$  matrices réelles de Lorentz,  $\Lambda'$  des transformations superlumineuses [1] isomorphe au groupe des  $4 \times 4$  matrices réelles de Lorentz  $\Lambda$  des transformations sous-lumineuses.

Cherchons s'il existe un opérateur permettant de passer de  $L_+^I$  à  $L_+^{I'}$  et réciproquement. Considérons donc les espaces pseudo-euclidiens définis par les métriques réelles

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1)$$

$$dS^2 = G_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu \quad (2)$$

$$(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$$

de signatures respectives +--- et -+++ , la métrique (1) étant définie dans le système de coordonnées réelles habituelles ( $x^\nu$ ), la métrique (2) étant définie dans un système de coordonnées réelles inhérentes ( $X^\mu$ ) [2].

Les tenseurs métriques covariants de (1) et (2) étant respectivement

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

nous pouvons écrire

$$[G_{\mu\nu}] = [S] [g_{\mu\nu}] \quad (4)$$

$$[g_{\mu\nu}] = [S] [G_{\mu\nu}]$$

$$(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$$

où

$$[S] = [-1] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Nous avons

$$[S] = [T] [T] \quad (6)$$

où

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 \pm i & 0 & 0 \\ \pm i & 0 & 0 \\ 0 & 0 \pm i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \pm i \end{pmatrix} \quad (7)$$

Nous avons choisi le signe + devant chaque élément  $i = e^{i\pi/2}$ , le choix du signe - donnant les mêmes résultats.

L'opérateur [T] ne fait pas partie de  $SO(4;C)$ , car

$$\| [T] \| = -1 \quad (8)$$

On ne peut donc passer du groupe des  $4 \times 4$  matrices de Lorentz  $L_+^T$  au groupe des  $4 \times 4$  matrices de Lorentz  $L_+^T$  par une rotation, ce qui est en accord avec le concept de coordonnées inhérentes.

Par contre si l'on considère l'opérateur

$$[0] = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

[0] fait partie du groupe abélien compact  $SO(2;C)$  isomorphe à  $SO(1,1;C)$ , car

$$\| [0] \| = +1 \quad (10)$$

$SO(2;C)$  groupe des  $2 \times 2$  matrices complexes  $\lambda^*$  et  $\lambda'^*$  conserve les métriques de signatures respectives  $+-$  et  $-+$  et comme

$$[0] [0]^{-1} = [0]^{-1} [0] = [1] \quad (11)$$

$\lambda^*$  et  $\lambda'^*$  sont conjuguées dans  $SO(2;C)$ , soit

$$\lambda'^* = [0] \lambda [0]^{-1} \quad (12)$$

Il en résulte qu'il existe deux sous-groupes de Lorentz isomorphes à deux dimensions, soit

$$L_+^T \text{ et } L_+^T$$

conservant les métriques réelles de signatures  $+-$  et  $-+$ . Ces deux sous-groupes des  $2 \times 2$  matrices réelles  $\lambda$  et  $\lambda'$  sont conjugués, soit

$$\lambda' = [0] \lambda [0]^{-1} \quad (13)$$

Cette propriété de conjugaison permet de définir de nouvelles coordonnées inhérentes réelles

$$\tau, \xi$$

et deux sous-groupes de transformations entre les  $(x^\nu)$  ( $\nu = 0,1$ ) et  $(\tau, \xi)$  d'une part et les  $(x^\mu)$  ( $\mu = 0,1$ ) et  $(\tau, \xi)$  d'autre part. En effet, nous avons

$$(\chi^\mu) = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\pi/2} \\ e^{i\pi/2} & 0 \end{pmatrix} (x^\nu) \quad (14)$$

$$(\mu, \nu = 0, 1)$$

$e^{i\pi/2}$  étant opérateur de rotation de  $\pi/2$ .

De (14) nous déduisons

$$\begin{cases} e^{-i\pi/4} \chi^1 = e^{i\pi/4} x^0 \\ e^{i\pi/4} \chi^0 = e^{-i\pi/4} x^1 \end{cases} \quad (15)$$

Opérons le changement de coordonnées

$$\begin{cases} \tau^* = e^{i\pi/4} x^0 \\ \xi^* = e^{-i\pi/4} x^1 \end{cases} \quad (16)$$

au second membre de (15) et

$$\begin{cases} \xi^* = e^{-i\pi/4} \chi^1 \\ \tau^* = e^{i\pi/4} \chi^0 \end{cases} \quad (17)$$

au premier membre, les  $\chi^\mu$  et  $x^\nu$  ( $\mu, \nu = 0, 1$ ) étant réelles.

A partir de (16) nous pouvons écrire

$$\tau^* + \xi^* = e^{i\pi/4} x^0 + e^{-i\pi/4} x^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (t + it) + \frac{1}{\sqrt{2}} (x - ix) \quad (18)$$

en posant  $x^0 = t$  ( $c = 1$ );  $x^1 = x$ .

(18) peut alors s'écrire :

$$\tau^* + \xi^* = \frac{2}{\sqrt{2}} (t + x) + \frac{i}{\sqrt{2}} (t - x) \quad (19)$$

Définissons de nouvelles coordonnées inhérentes, en posant

$$\begin{cases} \tau = \frac{1}{\sqrt{2}} (t + x) \\ \xi = \frac{1}{\sqrt{2}} (t - x) \end{cases} \quad (20)$$

et soit  $\Omega$  le référentiel associé à ces coordonnées :  $\Omega (\tau, \xi, y'; z')$ .

Il est clair que l'on peut identifier ces nouvelles coordonnées et  $\Omega$  respectivement aux coordonnées du cône de lumière et au référentiel IMF [4], la transformation complète entre les deux systèmes de coordonnées  $(t, x, y, z)$  et  $(\tau, \xi, y', z')$  s'écrivant

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tau + \xi); \quad y = y' \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tau - \xi); \quad z = z' \end{array} \right. \quad (21)$$

Ces coordonnées  $(\tau, \xi)$  sont inhérentes, alors que  $y'$  et  $z'$  sont du type ORF.

On obtient la transformation IMF du genre espace de la même manière à partir de (17) et en permutant les axes  $\tau$  et  $\xi$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} T = \frac{1}{\sqrt{2}} (\overset{\sim}{\tau} + \overset{\sim}{\xi}); \quad Y = Y' \\ X = \frac{1}{\sqrt{2}} (\overset{\sim}{\xi} - \overset{\sim}{\tau}); \quad Z = Z' \end{array} \right. \quad (22)$$

En considérant strictement les coordonnées inhérentes, (21) correspond à la métrique  $-t^2 - x^2 = \tau\xi + \xi\tau > 0$  avec toujours  $\tau > 0$ ,  $\xi > 0$  et (22) à la métrique  $X^2 - T^2 = -\overset{\sim}{\xi}\overset{\sim}{\tau} - \overset{\sim}{\tau}\overset{\sim}{\xi} > 0$ , avec toujours  $\overset{\sim}{\tau} > 0$ ,  $\overset{\sim}{\xi} < 0$ , les lignes d'univers respectives du genre temps et du genre espace étant dans le sens  $x < 0$ , et avec toujours pour (21) et (22) :  $t > 0$ ;  $T > 0$ .

Des événements du genre temps et du genre espace peuvent donc s'exprimer dans le même système de coordonnées  $(\tau, \xi)$  dans deux référentiels du type  $\Omega$  strictement équivalents.

Considérons les quadrivecteurs d'impulsion énergie du genre temps  $(\pi^0, \pi)$  avec  $\pi^0 > 0$ ,  $\pi > 0$  et du genre espace  $(\overset{\sim}{\Pi}^0, \overset{\sim}{\Pi})$  avec  $\overset{\sim}{\Pi}^0 > 0$ ,  $\overset{\sim}{\Pi} < 0$ . Soit :

$$\pi^0 \pi + \pi \pi^0 = - \overset{\sim}{\Pi} \overset{\sim}{\Pi}^0 - \overset{\sim}{\Pi}^0 \overset{\sim}{\Pi} = m^2 c^2 > 0 \quad (23)$$

correspondant à :

$$\tau\xi + \xi\tau = - \overset{\sim}{\xi}\overset{\sim}{\tau} - \overset{\sim}{\tau}\overset{\sim}{\xi} > 0 \quad (24)$$

Nous poserons :

$$\begin{pmatrix} \Pi^0 \\ \overset{\sim}{\Pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi^0 \\ \pi \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \overset{\sim}{\tau} \\ \overset{\sim}{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ \xi \end{pmatrix} \quad (25)$$

soit 
$$\Pi = -\pi^0; \Pi^0 = \pi; \tau = \xi; \tilde{\xi} = -\tau$$

Nous dirons que  $(\tau, \xi)$  et  $(\tilde{\tau}, \tilde{\xi})$  sont conjuguées.

A partir de (21) et (22), nous obtenons respectivement :

$$\begin{aligned} t - x &= \sqrt{2} \xi \\ T - X &= \sqrt{2} \tilde{\tau} = \sqrt{2} \xi = tx \end{aligned} \quad (26)$$

De même, il est aisé de voir que l'on a

$$\begin{aligned} p^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} mc = \frac{1}{\sqrt{2}} hv/c = \frac{1}{\sqrt{2}} hv; \quad (c = 1) \\ P &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Pi = -\frac{1}{\sqrt{2}} mc = -\frac{1}{\sqrt{2}} hv; \quad (c = 1) \end{aligned} \quad (27)$$

correspondant respectivement à  $\beta = 0$  dans le système  $(t, x)$  et  $\beta = \infty$  dans le système  $(T, X)$ .

## II. SUR UN MODELE DE PARTICULE DONT LE REFERENTIEL PROPRE EST DU TYPE $\Omega$

Désignons par  $\Omega (\tau, \xi, x^2, x^3)$  le référentiel associé aux coordonnées  $(\tau, \xi)$  telles que nous venons de les définir. Par rapport au référentiel ORF (= Ordinary Referential Frame)  $x^\mu$  ( $\mu = 1, 1, 2, 3$ ) nous avons en prenant

$$\begin{aligned} p^1 &= p; p^2 = 0; p^3 = 0 \\ (p^0)^2 - (p)^2 &= m^2 c^2 \end{aligned} \quad (28)$$

et par rapport au référentiel  $\Omega$

$$\Pi^0 \Pi + \Pi \Pi^0 = (p^0)^2 - (p)^2 = m^2 c^2 \quad (29)$$

Dans le référentiel ORF, on obtient l'équation K.G en remplaçant :

$$p^0 \rightarrow -i \hbar \frac{\partial}{\partial t}; p \rightarrow i \hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad (30)$$

soit

$$\square \psi = \chi^2 \psi \quad \text{où} \quad \square = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (31)$$

en posant  $\chi = \frac{mc}{\hbar} = \frac{m}{\hbar}$  avec  $c = 1$ .

Nous postulons que les opérateurs quantiques sont les mêmes par rapport à  $\Omega$ , soit

$$\pi^0 = -i \hbar \frac{\partial}{\partial \tau}; \pi = i \hbar \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (32)$$

En remplaçant dans (29), on obtient :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \tau} \right] \psi(\tau, \xi) &= [\partial_{\tau} \partial_{\xi} + \partial_{\xi} \partial_{\tau}] \psi(\tau, \xi) \\ &= \chi^2 \psi(\tau, \xi) \end{aligned} \quad (33)$$

équation K.G. du genre temps dans le système de coordonnées  $(\tau, \xi)$ .

Par rapport au référentiel tachyonique  $X^{\mu}$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) nous avons en posant

$$\begin{aligned} P^1 &= P; P^2 = 0; P^3 = 0 \\ (P)^2 - (P^0)^2 &= m^2 c^2 \\ (P^0)^2 - (P)^2 &= .m^2 c^2 \end{aligned} \quad (34)$$

et

$$\Pi^0 \Pi + \Pi \Pi^0 = -m^2 c^2 \quad (35)$$

En remplaçant par les opérateurs quantiques, on obtient l'équation K.G. du genre espace dans le système de coordonnées  $(\tau, \xi)$  soit :

$$-[\partial_{\tau} \partial_{\xi} + \partial_{\xi} \partial_{\tau}] \tilde{\psi}(\tau, \xi) = \chi^2 \tilde{\psi}(\tau, \xi) \quad (36)$$

Pour obtenir l'équation du premier ordre du genre temps, nous employons la méthode classique, l'équation la plus simple étant de la forme

$$[\gamma_{\nu} \frac{\partial}{\partial y_{\nu}} - \chi] \psi(y_{\mu}) = 0 \quad (37)$$

ou

$$\begin{aligned} [\gamma_{\nu} \partial_{\nu} - \chi] \psi(y_{\mu}) &= 0 \quad (38) \\ (\nu, \mu = 0, 1; y_0 = \tau; y_1 = \xi) \end{aligned}$$

On applique l'opérateur

$$[\gamma_{\lambda} \partial_{\lambda} + \chi] \quad (\lambda = 0, 1) \quad (39)$$

sur (38) et l'on obtient

$$[\gamma_{\lambda} \partial_{\lambda} + \chi][\gamma_{\nu} \partial_{\nu} - \chi] \psi = [\gamma_{\lambda} \gamma_{\nu} \partial_{\lambda} \partial_{\nu} - \chi^2] \psi = 0 \quad (40)$$

ou encore

$$\left[ \frac{1}{2} (\gamma_{\lambda} \gamma_{\nu} + \gamma_{\nu} \gamma_{\lambda}) \partial_{\lambda} \partial_{\nu} - \chi^2 \right] \psi = 0 \quad (\lambda, \nu = 0, 1) \quad (41)$$



avec

$$\gamma_\lambda \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\lambda = 2 g_{\lambda\nu} [1] \quad (42)$$

$g_{\lambda\nu}$  ayant comme valeurs dans le référentiel  $\Omega$

$$\begin{aligned} g_{00} &= g_{11} = 0 \\ g_{01} &= g_{10} = 1 \end{aligned} \quad (43)$$

D'autre part, nous avons

$$(\gamma_0)^2 = (\gamma_1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = [0] \quad (44)$$

En résumé, les  $\gamma_\mu$  doivent satisfaire aux deux conditions

$$\begin{aligned} \gamma_0 \gamma_1 + \gamma_1 \gamma_0 &= 2 [1] \\ (\gamma_0)^2 &= (\gamma_1)^2 = [0] \end{aligned} \quad (45)$$

Les matrices

$$\gamma_0 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_1 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (46)$$

répondent à ces conditions; on a bien en effet

$$\gamma_0 \gamma_1 + \gamma_1 \gamma_0 = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (47)$$

Avec ces valeurs des  $\gamma_\mu$ , l'équation de Dirac du genre temps s'écrit dans le système de coordonnées  $(\tau, \xi)$

$$[\gamma_0 \partial_0 + \gamma_1 \partial_1 - \chi] \psi(\tau, \xi) = 0 \quad (48)$$

L'application de l'opérateur

$$[\gamma_0 \partial_0 + \gamma_1 \partial_1 + \chi] \quad (49)$$

sur (48) donne bien

$$[\partial_\tau \partial_\xi + \partial_\xi \partial_\tau - \chi^2] \psi(\tau, \xi) = [\partial_0 \partial_1 + \partial_1 \partial_0 - \chi^2] \psi(\tau, \xi) \quad (50)$$

Nous supposons que  $\partial_0 \partial_1 = \partial_1 \partial_0$

L'équation K.G du genre espace

$$[\partial_0 \partial_1 + \partial_1 \partial_0] \tilde{\psi} = -\chi^2 \tilde{\psi} \quad (51)$$

peut s'écrire

$$[\partial_0 \partial_1 + \partial_1 \partial_0 - \chi^2] \tilde{\psi} = 0 \quad (52)$$

en posant

$$\chi = i X \quad (53)$$

d'où en gardant les mêmes matrices  $\gamma_0, \gamma_1$  l'équation de Dirac du genre espace

$$[\gamma_0 \partial_0 + \gamma_1 \partial_1 - \tilde{\chi}] \tilde{\psi} = [\gamma_0 \partial_0 + \gamma_1 \partial_1 - i X] \tilde{\psi} = 0 \quad (54)$$

soit en multipliant par  $i$  les deux membres de (54)

$$[i \gamma_0 \partial_0 + i \gamma_1 \partial_1 + \chi] \tilde{\psi} = 0 \quad (55)$$

Les deux E.D. du genre temps et du genre espace sont donc

$$[\gamma_0 \partial_0 + \gamma_1 \partial_1 - \chi] \psi = 0 \quad (56)$$

$$[i \gamma_0 \partial_0 + i \gamma_1 \partial_1 + \chi] \tilde{\psi} = 0 \quad (57)$$

S'il existe une solution commune  $\psi$  à ces deux équations elle doit être telle que

$$[\gamma_0 \partial_0 + \gamma_1 \partial_1 - \chi] \psi + [i \gamma_0 \partial_0 + i \gamma_1 \partial_1 + \chi] \psi = 0 \quad (58)$$

soit

$$(1 + i) [\gamma_0 \partial_0 + \gamma_1 \partial_1] \psi = 0 \quad (59)$$

ou en multipliant (59) par  $(1 - i)$

$$[2 \gamma_0 \partial_0 + 2 \gamma_1 \partial_1] \psi = 0 \quad (60)$$

et en posant

$$\Gamma_0 = 2 \gamma_0 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Gamma_1 = 2 \gamma_1 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (61)$$

l'équation (60) devient

$$[\Gamma_0 \partial_0 + \Gamma_1 \partial_1] \psi = 0 \quad (62)$$

Si l'on applique l'opérateur

$$\frac{1}{4} [\Gamma_0 \partial_0 + \Gamma_1 \partial_1] = \frac{1}{2} [\gamma_0 \partial_0 + \gamma_1 \partial_1] \quad (63)$$

à l'équation (62) on obtient

$$[\gamma_0 \gamma_1 + \gamma_1 \gamma_0] \partial_0 \partial_1 \psi = 0 \quad (64)$$

en supposant  $\partial_0 \partial_1 = \partial_1 \partial_0$ , et comme

$$\gamma_0 \gamma_1 + \gamma_1 \gamma_0 = 2 [1]; \quad (65)$$

on obtient bien l'équation

$$[\partial_0 \partial_1 + \partial_1 \partial_0] \psi = 2 \partial_0 \partial_1 \psi = 0 \quad (66)$$

D'autre part, la transformation (21),  $\Omega$  - ORF, soit IMF-ORF appliquée au vecteur  $\Gamma$  de composantes

$$\Gamma_0 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Gamma_1 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (67)$$

avec la matrice de rotation

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cos \frac{\pi}{4} \\ \cos \frac{\pi}{4} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (68)$$

donne la matrice des valeurs propres suivant  $ox$

$$\Gamma_1 \rightarrow x = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (69)$$

matrice de Pauli suivant  $ox$ . Les valeurs propres fournissent le spin de la particule résultante, suivant  $Ox$ , soit

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (70)$$

soit  $\lambda = \pm 1$  dirigé suivant  $Ox$  dans le sens de l'impulsion ou en sens contraire, soit

$$|p \lambda \rangle \quad (71)$$

Nous dirons que la particule résultante a une hélicité  $\lambda = \pm 1$ .

Il faut remarquer que la même transformation appliquée dans les mêmes conditions donne comme valeurs propres du spin suivant  $Ox$  pour la composante du genre temps et du genre espace

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (72)$$

soit  $s = \pm \frac{1}{2}$ .

Quelle est l'interprétation que l'on peut donner de la fonction d'onde  $\psi$  ?  
L'équation

$$2 \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 2 \partial_0 \partial_1 \psi = 0, \text{ soit } \partial_0 \partial_1 \psi = 0 \quad (73)$$

admet comme solution

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 \quad (74)$$

$$\text{où } \psi_0 = e^{i/\hbar \pi \tau}; \quad \psi_1 = e^{-i/\hbar \pi \xi} \quad (75)$$

Dans ces conditions en effet (75) s'écrit

$$\partial_0 \psi_0 \partial_1 \psi_0 + \partial_0 \psi_1 \partial_1 \psi_1 = 0 \quad (76)$$

L'équation de premier ordre

$$[\Gamma_0 \partial_0 + \Gamma_1 \partial_1] \psi = 0 \quad (77)$$

devient en simplifiant par  $2\sqrt{2}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_0 \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_1 \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} = 0 \quad (78)$$

et a comme solution  $\psi_0$  et  $\psi_1$  données par (75).

Nous pouvons écrire (78) sous la forme :

$$\partial_0 \psi_1 = 0; \quad \partial_1 \psi_0 = 0 \quad (79)$$

ou

$$\partial_0 \psi_1 + \partial_1 \psi_0 = 0 \quad (80)$$

$-\psi_1$  et  $-\psi_0$  sont également solutions de (79) et (80). Nous allons montrer que  $\psi_0$  et  $\psi_1$  peuvent être identifiées à deux des composantes d'un tenseur antisymétrique du deuxième ordre, ayant six composantes indépendantes, quatre de ces composantes indépendantes étant nulles dans le référentiel propre de la particule. Soit

$$t^{\lambda\mu} \quad (\lambda, \mu = 0, 1, 2, 3)$$

ce tenseur, les deux composantes indépendantes non nulles étant

$$t^{20} = -\psi_1 ; \quad t^{02} = \psi_1 = e^{-i/\hbar\pi\xi} \quad (81)$$

$$t^{21} = -\psi_0 ; \quad t^{12} = \psi_0 = e^{i/\hbar\pi^\circ\tau} \quad (82)$$

Nous pouvons écrire d'après (26) et (27), en remplaçant dans (81) et (82)

$$t^{0'2'} = e^{2\pi i\nu(t-x)} \quad (83)$$

$$t^{1'2'} = e^{2\pi i\nu(t-x)} \quad (84)$$

qui sont les composantes de  $t^{\mu\nu}$  dans le référentiel ORF. (83) et (84) sont solutions de

$$\partial_0 t^{2'0'} + \partial_1 t^{2'1'} = 0 \quad (85)$$

soit

$$\partial_{\mu'} t^{\lambda'\mu'} = 0 \quad (\lambda' = 2; \mu' = 0,1) \quad (86)$$

(86) est identique à

$$\partial_{\mu} F^{\lambda\mu} = 0 \quad (J^\lambda = 0) \quad (87)$$

$$(\lambda = 2; \mu = 0,1)$$

correspondant à un photon se propageant dans le référentiel ORF  $(t, x, y, z)$  suivant l'axe des  $x$  ( $x < 0$ ). A ce photon est associée l'onde plane monochromatique  $(E_y, H_z)$  telle que

$$E_y = e^{2\pi i\nu(t-x)} ; \quad H_z = e^{2\pi i\nu(t-x)} \quad (88)$$

Toutes les composantes de  $F^{\lambda\mu}$  sont nulles

$$F^{23} = F^{31} = F^{10} = F^{30} = 0 \quad (89)$$

sauf

$$F^{02} = e^{2\pi i\nu(t-x)} = E_y \quad (90)$$

$$F^{12} = e^{2\pi i\nu(t-x)} = H_z \quad (91)$$

(93) et (94) étant identiques à (83) et (84).

Réciproquement, nous avons :

$$F^{1'2'} = e^{i/\lambda\pi^0\tau} \quad (92)$$

$$F^{0'2'} = e^{-i/\lambda\pi\xi} \quad (93)$$

dans le référentiel IMF, l'équation du photon dans ce référentiel étant

$$\partial_0 F^{2'0'} = 0 ; \quad \partial_1 F^{2'1'} = 0 \quad (94)$$

ou

$$\partial_0 F^{2'0'} + \partial_1 F^{2'1'} = 0 \quad (95)$$

équations identiques à

$$\partial_0 t^{20} = \partial_0 \psi_1 = 0 ; \quad \partial_1 t^{21} = \partial_1 \psi_0 = 0 \quad (96)$$

ou

$$\partial_0 t^{20} + \partial_1 t^{21} = 0 \quad (97)$$

*Nous exprimons toute notre gratitude au Professeur J.C. PECKER, membre de l'Académie des Sciences, Professeur au Collège de France, qui nous a fait l'honneur de présenter ce travail et au Professeur A. LICHNEROWICZ, membre de l'Académie des Sciences, Professeur au Collège de France, qui nous a guidé et prodigué de précieux conseils.*

## REFERENCES

- [ 1 ] DUTHEIL R. et A. RACHMAN, Sur la théorie de la relativité restreinte dans la région du genre espace. *Bull. Soc. Sci.*, Liège, 47 (5, 8), pp. 161-191, (1978).
- RACHMAN A. et R. DUTHEIL, *Lett. Nuovo Cimento*, 8, 611 et 893, (1973).
- [ 2 ] VIGIER J.P. et R. DUTHEIL, *Bull. Soc. Sci.*, Liège, 52 (5), (1983).
- [ 3 ] MARCHILDON L. et A.F. ANTIPA, A.E. EVERETT, *Physical Review D*, 27, 8, (1983).
- [ 4 ] KOGUT J. et L. SUSSKIND, *Physics Reports, Phys. Lett. C* 8, 75, (1973).
- [ 5 ] HUARD S., Thèse (Orsay), (1977).
- [ 6 ] GILMORE R., *Lie Groups, Lie Algebra and some of their Applications*. (Wiley, New-York), (1974).