Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 53e année, 3-4, 1984, pp. 173-178

CONGRUENCES NON ω DE DROITES DONT LES COMPLEXES DE WAELSCH NE DEPENDENT QUE D'UN PARAMETRE

C. READ-DERCHAIN

Chef de Travaux à l'Université de Liège

ABSTRACT

We characterize with respect to Cech classification the non-$\mathcal{W}$ rectilinear congruences whose Waelsch complexes depend on one parameter.

1. INTRODUCTION

Dans de nombreux travaux apparaissent des congruences $\mathcal{W}$ de droites dont le complexe linéaire osculateur dépend d'un seul paramètre [2] [4] [5].

Dans le cas des congruences non $\mathcal{W}$ on ne dispose plus d'un complexe osculateur. Aussi peut-on se proposer de traiter un problème analogue, mais à propos des complexes de Waelsch, confondus avec le complexe osculateur dans le cas des congruences $\mathcal{W}$. On connaît quelques résultats à ce sujet [6]; toutefois aucune étude systématique ne semble avoir été faite : c'est l'objet de ce travail.

2. Considérons dans l'espace projectif P_3 une congruence non $\mathcal{W}$ et non parabolique de droites (L) engendrée par le rayon A_1A_2 où les points A_1 et A_2 désignent les foyers de A_1A_2.

Soient $A_1A_2A_3$ et $A_1A_2A_4$ respectivement les plans tangents aux surfaces focales (A_1) et (A_2); soient aussi A_1A_3 et A_2A_4 les transformés de Laplace du rayon A_1A_2 de la congruence (L).

Dans ces conditions, en utilisant les notations de Cech [1], les déplacements du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ vérifient

$$dA_i = \omega_i^j A_j \ , \ i = 1,2,3,4 \qquad \text{(E)}$$

Présenté par J. Etienne, le 21 juin 1984.

où

$$\omega_1^4 , \omega_2^4 = 0 , \omega_1^2 = \alpha_1\omega_2 , \omega_2^1 = \alpha_2\omega_1 ,$$

$$\omega_3^4 = \beta_2\omega_1 , \omega_4^3 = \beta_1\omega_2 ,$$

si on introduit les notations

$$\omega_1^3 = \omega_1 , \omega_2^4 = \omega_2 .$$

Particularisons les points A_3 et A_4 sur les rayons transformés de Laplace de A_1A_2 de manière à les situer sur les surfaces focales de ces rayons. On a dans ces conditions

$$\omega_3^2 = \lambda\ \omega_1 , \omega_4^1 = \mu\omega_2 , \tag{1}$$

de sorte que le système (E) s'écrit

$$\begin{aligned} dA_1 &= \omega_1^1 A_1 + \alpha_1\omega_2 A_2 + \omega_1 A_3, \\ dA_2 &= \alpha_2\omega_1 A_1 + \omega_2^2 A_2 + \omega_2 A_4, \\ dA_3 &= \omega_3^1 A_1 + \lambda\omega_1 A_2 + \omega_3^3 A_3 + \beta_2\omega_1 A_4, \\ dA_4 &= \mu\omega_2 A_1 + \omega_4^2 A_2 + \beta_1\omega_2 A_3 + \omega_4^4 A_4. \end{aligned} \tag{E'}$$

Rappelons que la congruence (L) est W si et seulement si $\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 = 0$.

Désignons par $[ik]$ l'image dans l'espace de Klein de la droite A_iA_k dans la représentation de Klein-Plücker des droites de P_3 sur l'hyperquadrique Q de P_5. Au tétraèdre mobile $A_1A_2A_3A_4$ est alors associé un repère de P_5 dont on peut trouver les déplacements [3]. Les complexes de Waelsch associés à A_1A_2 ont pour image dans P_5 les points [3]

$$W_1 = \beta_1[13] - \alpha_1[24] , W_2 = \alpha_2[13] - \beta_2[24] .$$

3. En général les points W_1 et W_2 décrivent des surfaces dans P_5 et les complexes de Waelsch dépendent de deux paramètres.

Un calcul simple montre que

$$dW_1 = \{d\beta_1+\beta_1(\omega_1^1+\omega_3^3)\}[13] - \{d\alpha_1+\alpha_1(\omega_2^2+\omega_4^4)\}[24]$$

$$+ \{\lambda\beta_1\omega_1+\mu\alpha_1\omega_2\}[12] + \omega_1(\beta_1\beta_2-\alpha_1\alpha_2)[14] ,$$

$$dW_2 = \{d\alpha_2+\alpha_2(\omega_1^1+\omega_3^3)\}[13] - \{d\beta_2+\beta_2(\omega_2^2+\omega_4^4)\}[24]$$
$$+ \{\lambda\alpha_2\omega_1+\mu\beta_2\omega_2\}[12] - \omega_2(\beta_1\beta_2-\alpha_1\alpha_2)[14] .$$

Le point W_2 décrit une courbe si et seulement s'il existe un point $W_1^\star$ tel que pour tout ω_1,ω_2 on ait

$$dW_1 = hW_1 + h^\star W_1^\star ;$$

$W_1W_1^\star$ sera alors la tangente à cette courbe. En particulier, les points $A = dW_1$ pour $\omega_1 = 0$, $B = dW_1$ pour $\omega_2 = 0$, doivent être alignés quels que soient ω_1 et ω_2. On a si $\omega_1 = 0$

$$A \equiv dW_1 = \{d\beta_1+\beta_1(\omega_1^1+\omega_3^3)\}[13] - \{d\alpha_1+\alpha_1(\omega_2^2+\omega_4^4)\}[24] + \mu\alpha_1\omega_2[12];$$

on a si $\omega_2 = 0$

$$B \equiv dW_1 = \{d\beta_1+\beta_1(\omega_1^1+\omega_3^3)\}[13] - \{d\alpha_1+\alpha_1(\omega_2^2+\omega_4^4)\}[24] + \lambda\beta_1\omega_1[12] +\omega_1(\beta_1\beta_2-\alpha_1\alpha_2)[14];$$

si $\mu\alpha_1 \neq 0$, A est situé dans le plan $[13][24][12]$ et n'est pas sur la droite $[13][24]$; B ayant toujours une composante non nulle sur $[14]$ $(\beta_1\beta_2-\alpha_1\alpha_2\neq 0)$, le point B ne peut pas appartenir au plan $[13][24][12]$ de sorte que si $\mu\alpha_1 \neq 0$ les trois points W_1,A,B ne peuvent être alignés.

Supposons dorénavant $\mu\alpha_1 = 0$.

Posons

$$\varphi = d\beta_1 + \beta_1(\omega_1^1+\omega_3^3) , \quad \psi = - \{d\alpha_1+\alpha_1(\omega_2^2+\omega_4^4)\} ;$$

φ et ψ sont des formes différentielles en ω_1 et ω_2 qu'on écrira

$$\varphi = \varphi_1\omega_1 + \varphi_2\omega_2 , \quad \psi = \psi_1\omega_1 + \psi_2\omega_2, \qquad (2)$$

d'où

$$dW_1 = \omega_1\{\varphi_1[13] + \psi_1[24] + (\beta_1\beta_2-\alpha_1\alpha_2)[14] + \lambda\beta_1[12]\} + \omega_2\{\varphi_2[13] + \psi_2[24]\};$$

si $\omega_1 = 0$ et compte tenu du fait que A appartient à la droite $[13][24]$ lorsque $\mu\alpha_1 = 0$, les trois points W_1,A et B ne peuvent être alignés que si pour $\omega_1 = 0$ A coïncide avec W_1 ce qui arrive lorsque

$$\frac{\varphi_2}{\beta_1} = \frac{\psi_2}{-\alpha_1} , \qquad (3)$$

et on a dans ces conditions $dW_1 = hW_1 + h^{\star}W_1^{\star}$.

Supposons $\alpha_1\beta_1 \neq 0$, ce qui implique $\mu = 0$ ou de façon équivalente

$$\omega_4^1 = 0. \tag{4}$$

De plus, les conditions d'intégrabilité [1] s'écrivent ici

$$\begin{cases} \omega_3^2 \wedge \omega_1 + \{d\alpha_1 + \alpha_1(2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_4^4)\} \wedge \omega_2 = 0, \\ -\omega_4^1 \wedge \omega_1 + \{d\beta_1 + \beta_1(\omega_2^2 + \omega_3^3 - 2\omega_4^4)\} \wedge \omega_2 = 0, \end{cases}$$

ou encore si l'on tient compte des relations (1) et (4)

$$\begin{cases} \{\frac{d\alpha_1}{\alpha_1} + (2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_4^4)\} \wedge \omega_2 = 0, \\ \{\frac{d\beta_1}{\beta_1} + (\omega_2^2 + \omega_3^3 - 2\omega_4^4)\} \wedge \omega_2 = 0, \end{cases}$$

qui entraînent

$$(\frac{d\alpha_1}{\alpha_1} - \frac{d\beta_1}{\beta_1} + \omega_2^2 + \omega_4^4 - \omega_1^1 - \omega_3^3) \wedge \omega_2 = 0,$$

ou encore

$$(\frac{d\alpha_1}{\alpha_1} + \omega_2^2 + \omega_4^4) \wedge \omega_2 = (\frac{d\beta_1}{\beta_1} + \omega_1^1 + \omega_3^3) \wedge \omega_2 ,$$

soit, compte tenu des relations (2),

$$\frac{\varphi_1}{\beta_1} = \frac{\psi_1}{-\alpha_1} . \tag{5}$$

L'examen des relations (3) et (5) conduit alors à

$$\frac{\varphi}{\beta_1} = \frac{\psi}{\alpha_1} ,$$

ou encore

$$\frac{d\beta_1}{\beta_1} + \omega_1^1 + \omega_3^3 = \frac{d\alpha_1}{\alpha_1} + \omega_2^2 + \omega_4^4$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\beta_1}{\beta_1} - \frac{d\alpha_1}{\alpha_1} = \omega_2^2 + \omega_4^4 - \omega_1^1 - \omega_3^3;$$

par dérivation extérieure, on trouve alors

$$(\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2)\ \omega_1 \wedge \omega_2 = 0$$

et cette relation est impossible lorsque la congruence (L) est non $\mathcal{W}$.

En conclusion, le point W_1 ne peut pas décrire une courbe si $\alpha_1\beta_1 \neq 0$.

De façon analogue, on pourrait montrer que le point W_2 ne peut pas décrire une courbe lorsque $\alpha_2\beta_2 \neq 0$.

En résumé, les complexes de Waelsch d'une congruence non $\mathcal{W}$ ne peuvent dépendre d'un seul paramètre lorsque $\alpha_1\beta_1 \neq 0$ et $\alpha_2\beta_2 \neq 0$.

4. Les seuls cas possibles à envisager sont les six cas suivants :

1) $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2\beta_1\beta_2 \neq 0$; 2) $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1\beta_1\beta_2 \neq 0$;

3) $\beta_1 = 0$, $\alpha_1\alpha_2\beta_2 \neq 0$; 4) $\beta_2 = 0$, $\alpha_1\alpha_2\beta_1 \neq 0$;

5) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\beta_1\beta_2 \neq 0$; 6) $\beta_1 = \beta_2 = 0$, $\alpha_1\alpha_2 \neq 0$.

Dans le premier cas, on a

$$W_1 = \beta_1[13]\ ,\quad dW_1 = \{d\beta_1+\beta_1(\omega_1^1+\omega_3^3)\}[13] + \beta_1\omega_1\{\lambda[12] + \beta_2[14]\}$$

et il vient

$$dW_1 = h\ W_1 + h^\star W_1^\star ;$$

W_1 décrit une courbe et le complexe de Waelsch associé dépend d'un seul paramètre.

Ce cas correspond aux congruences de type II dans la classification de Cech [1] : la surface focale (A_1) est non développable et la surface focale (A_2) dégénère en une courbe non rectiligne.

Le deuxième cas est analogue au premier, mais relatif à W_2.

Dans le troisième cas, on a

$$W_1 = \alpha_1[24]\ ,$$

$$dW_1 = -\{d\alpha_1 + \alpha_1(\omega_2^2 + \omega_4^4)\}[24] + \alpha_1\{\mu\omega_2[12] - \alpha_2\omega_1[14]\ ,$$

il vient

$$dW_1 = hW_1 + h^\star W_1^\star ;$$

W_1 décrit une courbe et le complexe de Waelsch associé ne dépend que d'un paramètre.

Ce cas correspond aux congruences de type $II^{\star}$ dans la classification de Cech : la surface focale (A_1) n'est pas une courbe et la surface focale (A_2) est une surface développable.

Le quatrième cas est analogue au troisième, mais relatif à W_2.

Dans le cinquième cas, on a

$$W_1 = \beta_1[13], \quad W_2 = -\beta_2[24];$$

W_1 et W_2 décrivent des courbes et les deux complexes de Waelsch associés à la congruence (L) ne dépendent que d'un paramètre.

Ce cas correspond aux congruences de type V dans la classification de Cech : les surfaces focales (A_1) et (A_2) dégénèrent en deux courbes.

Dans le sixième cas, on a

$$W_1 = -\alpha_1[24], \quad W_2 = \alpha_2[13];$$

W_1 et W_2 décrivent des courbes et les complexes de Waelsch associés à la congruence (L) dépendent d'un seul paramètre.

Ce cas correspond aux congruences de type $V^{\star}$ dans la classification de Cech : les surfaces focales (A_1) et (A_2) sont des développables.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. CECH : Transformations développables des congruences de droites. *Czechoslovak Mat. J.*, 6(81)(1956), pp. 260-286.

[2] L. GODEAUX : Congruences *W* dont les complexes linéaires osculateurs sont en nombre simplement infini, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, n° 10 (1963), pp. 705-708.

[3] V. HORAK : Les complexes linéaires tangents des congruences de droites, *Czechoslovak. Mat. J.* 13(88)(1963), pp. 166-188.

[4] C. READ-DERCHAIN : Sur les congruences *W*, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, n° 1-2, (1963), pp. 24-26.

[5] O. ROZET : Sur les congruences *W* dont le complexe osculateur dépend d'un seul paramètre. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, n° 8-9-10, (1934), pp. 170-171.

[6] O. ROZET : Sur les complexes satellites des congruences de droites. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, n° 5, (1948), pp. 189-193.

Université de Liège
Institut de Mathématique
Avenue des Tilleuls, 15
B-4000 LIEGE (Belgium).