

Manuscrit reçu le 18 janvier 2011 et accepté le 9 mars 2011

## SUR LE BASSIN D'ATTRACTION DE L'ATTRACTEUR DE FEIGENBAUM

NOURREDINE AKROUNE

**ABSTRACT.** The aim of this work is the determination of the attractive basin  $B$  of the well-known Feigenbaum chaotic attractor. In the complex plane, the boundary  $\partial B$  of this basin is identical to the Julia set of a quadratic map, and it exhibits a fractal structure. The capacity and the information dimension of this boundary are estimated using a modified Box-counting algorithm.

**Résumé :** Ce travail consiste en la détermination, dans le champ complexe puis dans l'axe réel, du bassin d'attraction  $B$  de l'attracteur Cantorien de Feigenbaum. La frontière  $\partial B$  de ce bassin coïncide, dans le cas complexe, avec l'ensemble de Julia d'un polynôme quadratique. Le tracé de cet ensemble montre que celui-ci possède une structure fractale. On utilise ensuite une variante de l'algorithme de "Box-counting" pour estimer la dimension fractale de cette frontière.

### 1. INTRODUCTION

Dans son travail sur les ensembles de mesure (de Lebesgue) nulle, Hausdorff ([13]) a souligné que leur caractéristique géométrique commune est la self-similarité : toute partie de l'ensemble considéré garde la structure de l'ensemble-père, et cela à différentes échelles d'examen.

L'étude de ce type d'ensembles a été ensuite relancée dans les années 1975 par Mandelbrot ([16]); il lui a donné l'appellation de "fractale" et a introduit la notion de dimension fractale pour quantifier le degré d'auto-similitude observé ainsi que la densité de l'ensemble dans l'espace de phases. Cette nouvelle donne généralise la dimension topologique usitée en algèbre linéaire et en géométrie différentielle. Contrairement à cette dernière dimension, dont la valeur est toujours entière, la dimension fractale est généralement fractionnaire.

Actuellement, les fractales trouvent leurs applications dans maintes branches des sciences et techniques; de ce fait, elles constituent un sujet de recherche important dans pratiquement toutes les disciplines ([10]).

En mathématiques, les fractales sont surtout rencontrées dans le cadre de la théorie des systèmes dynamiques. L'étude du comportement asymptotique des systèmes dynamiques discrets a, depuis longtemps, attiré l'attention de nombreux auteurs. Nous renvoyons, entre autres,

aux références ([15], [3], [2]) dans le cas holomorphe, et ([4], [5], [8], [9], [14]) dans le cas général.

Certains de ces systèmes présentent un caractère particulier : Dans leur évolution, on n'observe de convergence ni vers un point fixe (à distance finie ou non), ni vers un cycle limite, bien que la trajectoire reste dans une partie bornée de l'espace de phases. De plus, la distance entre deux trajectoires, même issues de points de départ infiniment proches, croît exponentiellement avec le temps. Un tel système dynamique est dit *sensible aux conditions initiales*, et l'ensemble-limite est alors appelé attracteur chaotique ([12], [6], [7]).

Les attracteurs chaotiques, ainsi que les ensembles de Julia ([2]) de systèmes holomorphes, présentent, pour la plupart, un aspect fractal. Si  $E$  désigne, soit un attracteur chaotique (sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  ou de  $\mathbb{R}^2$ ), soit un ensemble de Julia borné dans  $\mathbb{C}$ , alors, suivant les propriétés (métriques et/ou probabilistes, ... etc.) de  $E$  auxquelles on s'intéresse, et l'algorithme utilisé pour le calcul numérique de la dimension fractale  $Dim(E)$  de  $E$ , on distingue notamment : la dimension de Hausdorff, de capacité, d'information, de corrélation ... etc. ([7]).

Le présent travail est consacré à l'attracteur chaotique  $A$  de la transformation logistique ([8]), appelé aussi "Attracteur de Feigenbaum". On précisera, tracé à l'appui, son domaine (ou bassin) d'attraction  $B$  dans le champ complexe, puis on donnera deux estimations de  $Dim(A)$  (une de la dimension de capacité, et l'autre de la dimension d'information) de la frontière  $\partial B$  de  $B$ , et cela en utilisant une variante de l'algorithme dit de "Box-counting" ([1]). On terminera par la détermination du bassin réel  $B_{\mathbb{R}}$  à partir du bassin  $B$  de l'attracteur  $A$ .

## 2. L'APPLICATION LOGISTIQUE

Soit, pour  $\lambda \in [0, 4]$ , l'application

$$(1) \quad \begin{aligned} f_{\lambda} & : (I = [0, 1]) \longrightarrow I \\ x & \rightsquigarrow \lambda x(1 - x) \end{aligned}$$

M. J. Feigenbaum ([8]) a été le premier à étudier en détails le comportement itératif de ce système. Il présente une structure de bifurcations par dédoublement de périodes, cette caractéristique a été l'objet de nombreux travaux dans la littérature ([4], [11], [18]). Feigenbaum a montré que la plus petite valeur du paramètre  $\lambda$  pour laquelle le système  $(I, \mathbb{N}, f_{\lambda})$  admet une infinité d'orbites périodiques distinctes est ( $\hat{\lambda} \approx 3.5699456\dots$ ). L'ensemble de ces orbites est de longueur nulle et est non dénombrable dans  $I$  : c'est un attracteur de type chaotique (noté  $A$  dans toute la suite). Dans toutes les sections ci-après, on fixera ( $\lambda = \hat{\lambda}$ ).

**2.1. Sur la dimension fractale  $Dim(A)$  de l'attracteur chaotique de Feigenbaum.** Comme tout sous-ensemble Cantorien de  $\mathbb{R}$ , la dimension fractale de  $A$  vérifie l'inégalité ( $0 < Dim(A) < 1$ ). Grassberger et al ([11]) ont proposé des estimations (couramment admises dans la littérature) de la dimension de capacité  $d_{cap}(A)$  de  $A$  et de sa dimension d'information  $d_{inf}(A)$ , celles-ci ont pour valeurs :

$$(2) \quad d_{cap}(A) \approx 0.538... \quad , \quad d_{inf}(A) \approx 0.517...$$

Pour notre part, on a construit, dans ([1]), une variante de l'algorithme de Box-counting, réellement implémentable et expérimentalement efficace, qui détermine numériquement les deux précédentes dimensions d'un sous-ensemble quelconque borné de  $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2 \text{ ou } \mathbb{C})$ .

Appliquée à l'attracteur  $A$ , formé de  $(25 \times 10^4)$  points, cette variante a fourni les résultats suivants :

$$d_{cap}(A) \approx 0.534... \quad , \quad d_{inf}(A) \approx 0.511...$$

et on constate que ces valeurs sont très proches de celles des expressions (2.2) ci-dessus.

### 3. BASSIN D'ATTRACTION DE $A$ DANS LE CHAMP COMPLEXE

Afin de construire le bassin d'attraction de l'attracteur chaotique  $A$ , on propose de transposer le problème au champ complexe ([17]). Dans ce contexte, l'ensemble de Julia ([15])  $J = J(f_\lambda)$ , de la nouvelle transformation  $f_\lambda$  (cette fois, définie dans  $\mathbb{C}$ ), joue un rôle essentiel : en effet,  $J$  est formé des points du plan qui n'appartiennent à aucun domaine d'attraction. Comme  $f_\lambda$  est un polynôme,  $J$  forme une frontière entre, d'une part, le domaine total d'attraction du point à l'infini (qui est toujours un point fixe superattractif pour les polynômes), et le bassin d'attraction du cycle (ou point fixe) attractif de  $f_\lambda$ , d'autre part ([3]).

Les points fixes de  $f_\lambda$  sont  $x_1 = 0$  et  $x_2 = 1 - 1/\lambda \approx 0.7198...$ ; comme leurs multiplicateurs ( $|f'_\lambda(x_1)|$  et  $|f'_\lambda(x_2)|$ ) sont strictement supérieurs à l'unité, ces deux points stationnaires sont tous deux répulsifs, et l'ensemble  $J$  s'en déduit ([2]) :

$$(3) \quad J = \overline{\{z \in \mathbb{C} / f_\lambda^n(z) = z_0 ; n = 0, 1, 2, \dots\}}$$

avec  $z_0 = x_1$  (ou  $z_0 = x_2$ ),  $\overline{U}$  dénote la fermeture de l'ensemble  $U$  et  $f_\lambda^n$  est la composée ( $n$  fois) de l'application  $f_\lambda$ .

Les deux ensembles ( $J$  et  $A$ ) sont dessinés en (Figure 1).

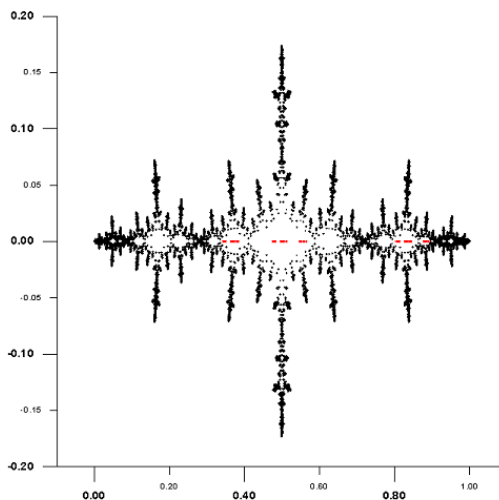


FIGURE 1. Les ensembles ( $J$  et  $A$ ) composés de  $(10^5)$  et  $(3 \times 10^4)$  points. **xxx** : Attracteur de Feigenbaum,  $\dots$  : Ensemble de Julia

Pour rendre compte de la structure fractale de  $J$ , ainsi que de la position de l'ensemble attractif  $A$ , un agrandissement d'une région rectangulaire de la (Figure 1) est présenté dans la (Figure 2) ci-dessous.

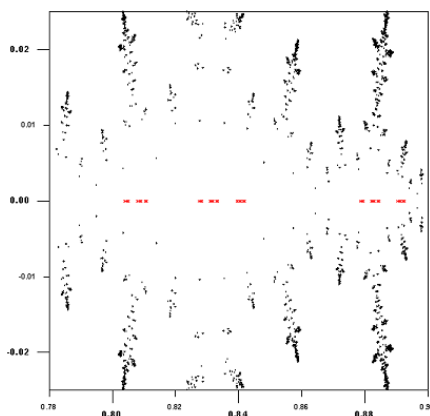


FIGURE 2. Zoom sur la région  $R = [0.78, 0.90] \times [-0.025, 0.025]$  de la figure 1. Ici,  $Card(J) = 3555$  et  $Card(A) = 15000$ .

Le compact  $J$  possède une structure fractale; en fait, il est connexe et est constitué d'une infinité de courbes de Jordan ([3], [4]). Il forme une frontière entre le bassin d'attraction du point à l'infini et le bassin

(total) d'attraction  $B$  d'un ensemble attractif et non dénombrable qui n'est autre que l'attracteur de Feigenbaum ( $A \subset I$ ), autrement dit :  $J \equiv \partial B$ . Signalons aussi que  $f_\lambda$  n'admet pas d'ensemble attractif à distance finie (autre que  $A$ ). En effet, les itérés de l'unique point critique de  $f_\lambda$  (ie : de  $x^* = 0.5$ , voir (eq. 2.1)) convergent vers  $A$  ([2]).

#### 4. CALCUL NUMÉRIQUE DE LA DIMENSION FRACTALE DE ( $J = \partial B$ )

En appliquant le procédé décrit dans ([1]) à l'ensemble de Julia de  $f_\lambda$  (approché par  $25 \times 10^4$  points), on trouve les valeurs suivantes de la dimension de capacité  $d_{cap}$  et de la dimension d'information  $d_{inf}$  :

$$d_{cap}(J) \approx 1.122... \quad , \quad d_{inf}(J) \approx 0.943...$$

Afin de tester la validité de ces résultats, on a représenté, en (Figure 3) ci-dessous, les diagrammes logarithmiques correspondants (sur cette notion, voir ([7]) pour plus de détails).

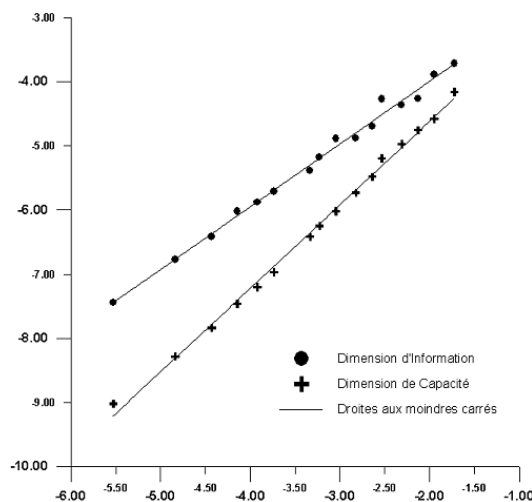


FIGURE 3. Diagrammes logarithmiques de  $d_{cap}(J)$  et  $d_{inf}(J)$ .

L'allure générale de ces deux nuages de points est sensiblement une droite, ceci est confirmé par les coefficients de détermination  $r^2$  issus des ajustements aux moindres carrés effectués, et qui sont

$$r^2(\text{capacité}) \approx 99.68 \% \quad \text{et} \quad r^2(\text{information}) \approx 99.22 \%$$

Pour appuyer ces observations, on a tracé, sur la même (Figure 3), les deux droites aux moindres carrés ainsi trouvées.

5. BASSIN D'ATTRACTION ( $B_{\mathbb{R}}$ ) DE  $A$  DANS  $\mathbb{R}$ 

Pour déterminer le bassin  $B_{\mathbb{R}}$  de l'attracteur de Feigenbaum  $A$ , on a besoin du

**Lemme 1.** *Les points de  $J$  situés sur l'axe réel vérifient l'inclusion :  $(J \cap \mathbb{R}) \subseteq (I = [0, 1])$ .*

*Proof.* Les deux points fixes ( $x_1$  et  $x_2$ ) de  $f_{\lambda}$  - voir section 3 - sont réels et appartiennent à  $I$  et la construction de  $J$  (eq. 3.1) découle directement des antécédents (par  $f_{\lambda}$ ) de ces deux points.

Si l'on note  $D = \{z \in \mathbb{C} / Re(z) \notin I\}$ , alors les itérés successifs (par  $f_{\lambda}$ ) d'un point quelconque ( $z \in D$ ) ont pour limite le point à l'infini. En effet, d'une part si  $Re(z) > 1$ , alors  $|f_{\lambda}(z)| \sim \lambda \cdot |z|^2$  et, par conséquent,  $f_{\lambda}(z)$  tend vers le point à l'infini avec  $z$ ; d'autre part, si  $Re(z) < 0$ , alors par le biais du changement de variables  $t = z - 1$ , on a  $Re(t) < -1$  et  $|f_{\lambda}(t)| \sim \lambda \cdot |t|^2$ .  $\square$

Ce résultat nous permet de déduire que le domaine d'attraction, dans  $I$ , de l'attracteur  $A$  est

$$B_{\mathbb{R}} = I - (J \cap \mathbb{R}) - A$$

et ceci est illustré par la représentation graphique (Figure 4) ci-après.

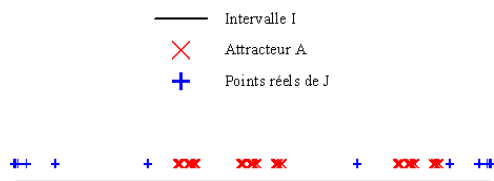


FIGURE 4. Localisation des points de  $B_{\mathbb{R}}$  dans  $I$ .

## 6. CONCLUSION

Afin d'affiner l'étude du comportement itératif de transformations unidimensionnelles réelles présentant une dynamique chaotique, à l'instar de l'application logistique, la démarche préconisée à travers ce travail consiste à transposer le problème au plan complexe. Dans ce nouvel espace de phases, l'ensemble de Julia, associé à l'application engendrant le système, joue un rôle prépondérant. En particulier, il nous permet d'extraire le bassin d'attraction (en le restreignant à l'axe réel) de l'attracteur chaotique considéré.

## REFERENCES

- [1] N. AKROUNE, *Sur une variante de la méthode des boîtes pour la détermination numérique de la dimension fractale d'un sous-ensemble du plan*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Série Mathématiques), Paris, Vol. 338 (2004), 899-904
- [2] P. BLANCHARD, *Complex analytic dynamics on the Riemann sphere*, Bulletin (New series) of the American Mathematical Society, Vol. 11, n° 1 (1984), 85-141
- [3] H. BROLIN, *Invariant sets under iteration of rational functions*, Arkiv für Mathematik, Band 6, n° 6 (1965), 103-144
- [4] P. COLLET, J. P. ECKMANN, *Iterated maps on the interval as Dynamical systems*, Birkhauser, Boston (1980)
- [5] R. L. DEVANEY, *An introduction to chaotic dynamical systems*, Addison-Wesley (2<sup>nd</sup> edition), (1989)
- [6] J. P. ECKMANN, D. RUELE, *Ergodic theory of chaos and strange attractors*, Review of Modern Physics, Vol. 57, n° 3 (1985), 617-655
- [7] J. D. FARMER, E. OTT, J. A. YORKE, *The dimension of chaotic attractors*, Physica D, Vol. 7 (1983) 153-180
- [8] M. J. FEIGENBAUM, *Quantitative universality for a class of nonlinear transformations*, Journal of Statistical Physics, Vol. 19 (1978), 25-52
- [9] M. J. FEIGENBAUM, *The onset of spectrum turbulence*, Physics Letters B, Vol. 74 (1979), 375-378
- [10] J. F. GOUYET, *Physique et structures fractales*, Masson, Paris (1992)
- [11] P. GRASSBERGER, I. PROCACCIA, *Measuring the strangeness of strange attractors*, Physica D, Vol. 9 (1983), 189-208
- [12] I. GUMOWSKI, C. MIRA, *Dynamique chaotique*, Cepadues Editions, Toulouse (1980)
- [13] F. HAUSDORFF, *Dimension und äusseres Mass*, Math. Annalen, 79 (1919), 157-179
- [14] M. HENON, *A two-dimensional mapping with a strange attractor*, Communications in Mathematical Physics, Vol. 50 (1976), 69-77
- [15] G. JULIA, *Mémoires sur l'itération de fonctions rationnelles*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Vol. 8 (1918), 47-245
- [16] B. MANDELBROT, *Fractals: form, chance and dimension*, Freeman, San-Francisco (1977)
- [17] B. MANDELBROT, *Fractal aspects of the iteration  $z \rightarrow \lambda z(1-z)$  for complex  $\lambda$  and  $z$* , Annals of the New-York Academy of Sciences, Vol. 357 (1980), 249-259
- [18] J. MILNOR, *On the concept of attractor*, Communications in Mathematical Physics, Vol. 99 (1985), 177-195

NOURREDINE AKROUNE  
 LABORATORY OF APPLIED MATHEMATICS, FACULTY OF EXACT SCIENCES,  
 UNIVERSITY OF BEJAIA (06000) - ALGERIA  
*E-mail address:* akroune\_n@yahoo.fr