Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, Vol. 80, 2011, p. 837 - 845

Manuscrit reçu le 14 mars 2011 et accepté le 2 mai 2011

EXISTENCE, NON-EXISTENCE ET STABILITÉ DES SOLUTIONS PÉRIODIQUES D'UN SYSTÈME DIFFÉRENTIEL DANS $\mathbb{R}^5$.

AHMED BERBOUCHA AND AKILA NASRI

Abstract. In this work, we consider a five-dimensional differential system which depends on a parameter α. According to the values of the parameter, we study the existence and the non-existence of the periodic solutions of this system.

Résumé. Dans ce travail, on considère un système différentiel dans $\mathbb{R}^5$ dépendant d'un paramètre α. On étudie, suivant les valeurs de ce paramètre, l'existence et la non-existence de solutions périodiques pour ce système.

1. Introduction

Dans ce travail on considère le système d'équations différentielles ordinaires suivant

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha x - F(x) \tag{1.1}$$

où α est un paramètre réel, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$, $F(x) = \begin{pmatrix} f(x_2) \\ f(x_3) \\ f(x_4) \\ f(x_5) \\ f(x_1) \end{pmatrix}$

C'est un système qui modélise des réactions chimiques en chaîne, il dépend du paramètre α.

Notre but est d'étudier, suivant les valeurs de ce paramètre, l'existence et la non-existence de solutions périodiques pour ce système.

Pour $x \in \mathbb{R}^3$, par des méthodes classiques, O. Arino et A.A. Cherif [**?**] ont montré que pour $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, ce système admet au moins une solution périodique.

Pour les systèmes différentiels dans $\mathbb{R}^2$, la théorie de Poincaré-Bendixson est bien indiquée pour l'étude de l'existence ou de la non-existence de solutions périodiques.

Ces dernières années des auteurs ont, en introduisant des hypothèses supplémentaires, généralisé les théorèmes de Poincaré et Bendixson, concernant l'existence et la non-existence de solutions périodiques, à des systèmes différentiels dans $\mathbb{R}^n$ avec $n > 2$ (voir [**?**, 5, 6, 7, 9]). En appliquant ces théories nous avons (voir [**?**]) donné des conditions d'existence et de non existence de solutions périodiques pour ce système, en dimension trois.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 34C05, 34C15, 34D20 .

Key words and phrases. Système différentiel, Solutions périodiques.

Dans ce qui suit nous allons, en utilisant les résultats théoriques de R.A. Smith [?, 6, 7, 8, 9] et ceux de Y. Li and J.S. Muldowney [?], montrer pour le système (??) l'existence de solutions périodiques orbitalement stables pour certaines valeurs du paramètre α et la non-existence de solutions périodiques pour d'autres valeurs de ce paramètre.

2. Bref exposé de la théorie de R.A. Smith.

Considérons l'équation différentielle autonome :

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{2.1}$$

où $f : S \to \mathbb{R}^n$ est localement lipschitzienne sur un ouvert S de $\mathbb{R}^n$. On suppose que l'équation (??) satisfait les deux hypothèses suivantes :

($\mathbf{H}_1$) Il existe des constantes strictement positives λ, ε et une matrice P de type $n \times n$, constante, réelle, symétrique, régulière, avec 2 valeurs propres négatives et $n-2$ valeurs propres positives telle que :

$$(x-y)^* P \left[f(x) - f(y) + \lambda(x-y) \right] \le -\varepsilon \left| x-y \right|^2, \forall x, y \in S.$$

où $(x-y)^*$ est le vecteur transposé de $(x-y)$ et $|x-y|$ est la norme euclidienne du vecteur $(x-y)$.

($\mathbf{H}_2$) Il existe un sous-ensemble ouvert D borné de $\mathbb{R}^n$ positivement invariant avec fermeture $\overline{D} \subset S$ tel que sa frontière ∂D entoure toute orbite de (??) qui la rencontre.

Cette dernière hypothèse signifie que si $x(t)$ est une solution de (??) telle que $x(t_0) \in \partial D$ alors $x(t) \in \overline{D}$ pour tout $t > t_0$ et il existe $t_1 > t_0$ tel que $x(t) \in D$ pour tout $t > t_1$. En particulier si $S = \mathbb{R}^n$ et l'équation (??) est dissipative alors ($\mathbf{H}_2$) est vérifiée.

Définition 2.1. *On dit que l'équation (??) est dissipative s'il existe une constante $b > 0$ et une fonction $\tau : (0, \infty) \to (0, \infty)$ telle que toute solution x de (??) qui vérifie $|x(t_0)| \le \rho$ existe pour $t_0 \le t < +\infty$ et vérifie $|x(t)| < b$ pour $t > t_0 + \tau(\rho)$.*

Si on choisit $\rho > b$ et on prend pour D, la réunion de toutes les semi-orbites, qui au temps t_0, sont dans la boule $|x| < \rho$, alors D est un ouvert borné satisfaisant ($\mathbf{H}_2$).

Théorème 2.2. [?] *Supposons que l'équation (??) satisfait ($\boldsymbol{H}_1$) et ($\boldsymbol{H}_2$) et D contient un seul point critique k. Supposons de plus que f soit continûment différentiable dans un voisinage de k avec $Re\,(z_2) > 0 > Re\,(z_3)$ où $z_1, z_2, ..., z_n$ sont les valeurs propres de la matrice jacobienne de f au point k arrangées dans l'ordre $Re\,(z_1) \ge Re\,(z_2) \ge ... \ge Re\,(z_n)$. Alors toute semi-orbite dans D converge soit vers k soit vers une trajectoire fermée quand $t \to +\infty$ et D contient au moins une trajectoire fermée qui soit orbitalement stable. Si de plus f est analytique dans S alors D contient seulement un nombre fini de trajectoires fermées et au moins l'une d'elles est asymptotiquement orbitalement stable.*

3. Conditions suffisantes pour que les hypothèses (H_1) et (H_2) soient vérifiées

Soit l'équation

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B\Phi(Cx) \tag{3.1}$$

où A, B, C sont des matrices réelles et constantes de type $n \times n, n \times r, s \times n$, respectivement et Φ une fonction continue de $\mathbb{R}^s$ dans $\mathbb{R}^r$. Si $S \subset \mathbb{R}^n$ et $CS = \{Cx : x \in S\}$ alors $CS \subset \mathbb{R}^s$. On suppose qu'il existe une constante $\Lambda(CS) \geq 0$ telle que :

$$|\Phi(\xi_1) - \Phi(\xi_2)| \leq \Lambda(CS)\, |\xi_1 - \xi_2| \;\; \forall \xi_1, \xi_2 \in CS. \tag{3.2}$$

La matrice de type $r \times s$;

$$\chi(z) = C(zI - A)^{-1}B \tag{3.3}$$

est appelée la matrice de transfert de (**??**), elle est définie pour tout complexe z tel que

$$\det(zI - A) \neq 0.$$

Si A n'a pas de valeur propre z telle que $Re\,(z) = -\lambda$, alors on peut définir ;

$$\mu(\lambda) = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |\chi(i\omega - \lambda)|\,. \tag{3.4}$$

Le lemme suivant est un cas particulier du théorème 10 de [**?**].

Lemme 1. *Supposons que la matrice A ait* 2 *valeurs propres z qui vérifient $Re\,(z) > -\lambda$ et $n - 2$ valeurs propres z telles que $Re\,(z) < -\lambda$. Si* (**??**) *est vérifiée avec $\Lambda(CS) < \mu(\lambda)^{-1}$ alors il existe une constante $\varepsilon > 0$ et une matrice P, de type $n \times n$, constante, réelle, symétrique et régulière telle que ($\boldsymbol{H}_1$) soit vérifiée avec $f(x) = Ax + B\Phi(Cx)$.*

Remarque 2. *L'équation* (**??**) *peut s'écrire sous la forme de l'équation* (**??**) *en posant,*

$$\Phi(y) = B^{-1}\left[f(C^{-1}y) - AC^{-1}y\right]$$

où A, B et C sont des matrices arbitraires de type $n \times n$.

Pour vérifier l'hypothèse ($\mathbf{H}_2$), Pliss [**?**] nous donne une condition suffisante pour que l'équation (**??**) soit dissipative.

Proposition 1. *Une condition suffisante pour que l'équation* (**??**) *soit dissipative est qu'il existe une matrice constante L de type $r \times s$ telle que :*

$$|\xi|^{-1}\left[\Phi(\xi) - L\xi\right] \to 0, \textit{quand } |\xi| \to \infty \tag{3.5}$$

et $Re\,(z) < 0$ pour toutes les valeurs propres z de la matrice $A + BLC$.

4. Existence de solutions périodiques

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que, pour certaines valeurs du paramètre α, le système différentiel (**??**) admet au moins une solution périodique orbitalement stable.

Théorème 4.1. *Considérons l'équation différentielle* (**??**).
Nous supposons que f est une fonction impaire, monotone croissante sur $\mathbb{R}^+$, différentiable et telle que $f'(0) = 1$, $xf(x) > 0$ pour $x \neq 0$.
Si cette équation vérifie les hypothèses suivantes
1) $\alpha \in \left]\frac{1}{8}\sqrt{5} + \frac{1}{8}, \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\right[$;
2) $f \in C^1(\mathbb{R})$, *et* $\frac{5 - \sqrt{5}}{4} < f'(x) < \frac{\sqrt{5} + 3}{4}$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

3) $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{\frac{1}{2}x-f(x)}{x}=0.$
Alors elle admet au moins une solution périodique orbitalement stable.

Démonstration : Pour la démonstration, nous allons vérifier qu'avec les hypothèses du théorème, l'équation (**??**) vérifie les hypothèses $(\mathbf{H}_1)$, $(\mathbf{H}_2)$ et donc il suffira d'appliquer le théorème **??**. Ecrivons d'abord l'équation (**??**) sous la forme (**??**) en posant

$$A=\begin{pmatrix} -\alpha & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\alpha & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\alpha & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & -1\\ -1 & 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix},\ B=C=I_5$$

on obtient

$$\Phi\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_2-f(x_2)\\ x_3-f(x_3)\\ x_4-f(x_4)\\ x_5-f(x_5)\\ x_1-f(x_1)\end{pmatrix}.$$

Un calcul de la norme spectrale de la matrice $[((i\omega-\lambda)I-A)]^{-1}$ en posant $\lambda=\alpha$ donne

$$\mu(\lambda)^{-1}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

en effet on a

$$((i\omega-\lambda)I-A)=\begin{pmatrix} i\omega & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & i\omega & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & i\omega & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & i\omega & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & i\omega \end{pmatrix}$$

et

$$[(i\omega-\lambda)I-A]^{-1}=\frac{1-i\omega^5}{\omega^{10}+1}\begin{pmatrix} \omega^4 & i\omega^3 & -\omega^2 & -i\omega & 1\\ 1 & \omega^4 & i\omega^3 & -\omega^2 & -i\omega\\ -i\omega & 1 & \omega^4 & i\omega^3 & -\omega^2\\ -\omega^2 & -i\omega & 1 & \omega^4 & i\omega^3\\ i\omega^3 & -\omega^2 & -i\omega & 1 & \omega^4 \end{pmatrix}=Q$$

la norme spectrale de la matrice Q est la racine carré de la plus grande valeur propre de la matrice Q^*Q où Q^* est la matrice adjointe de Q. On cherche $\mu(\lambda)=\sup\limits_{\omega\in\mathbb{R}}|Q|$.

$$Q^*Q=\frac{1}{\omega^{10}+1}\begin{pmatrix} A & \overline{B} & \overline{C} & C & B\\ B & A & \overline{B} & \overline{C} & C\\ C & B & A & \overline{B} & \overline{C}\\ \overline{C} & C & B & A & \overline{B}\\ \overline{B} & \overline{C} & C & B & A \end{pmatrix}$$

où on a posé
$$\begin{aligned} A&=\omega^2+\omega^4+\omega^6+\omega^8+1\\ B&=\omega^4+i\left(\omega+\omega^3+\omega^5+\omega^7\right)\\ C&=-\omega^2-\omega^4-\omega^6+i\left(\omega^3+\omega^5\right)\end{aligned}$$

er où $\overline{x}$ désigne le nombre complexe conjugué de x.

les valeurs propres de cette matrice sont

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{\omega^2+1}\\
\lambda_2 &= \frac{1}{\omega^2+1+\frac{1}{2}\omega\left(\sqrt{5+2\sqrt{5}}-\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)},\\
\lambda_3 &= \frac{1}{\omega^2+1+\frac{1}{2}\omega\left(\sqrt{5+2\sqrt{5}}+\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)}\\
\lambda_4 &= \frac{1}{\omega^2+1-\frac{1}{2}\omega\left(\sqrt{5+2\sqrt{5}}+\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)},\\
\lambda_5 &= \frac{1}{\omega^2+1-\frac{1}{2}\omega\left(\sqrt{5+2\sqrt{5}}-\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)}
\end{aligned}$$

on a

$$\sup_{\omega\in\mathbb{R}}|\lambda_1(\omega)| = \lambda_1(0) = 1$$

et

$$\begin{aligned}
&\sup_{\omega\in\mathbb{R}}|\lambda_2(\omega)| = \sup_{\omega\in\mathbb{R}}|\lambda_5(\omega)|\\
&= \lambda_2\left(\frac{1}{4}\left(\sqrt{5-2\sqrt{5}}-\sqrt{2\sqrt{5}+5}\right)\right)\\
&= \lambda_5\left(\frac{1}{4}\left(\sqrt{2\sqrt{5}+5}-\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)\right)\\
&= 6-2\sqrt{5}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\sup_{\omega\in\mathbb{R}}|\lambda_3(\omega)| = \sup_{\omega\in\mathbb{R}}|\lambda_4(\omega)|\\
&= \lambda_3\left(-\frac{1}{4}\left(\sqrt{5-2\sqrt{5}}+\sqrt{2\sqrt{5}+5}\right)\right)\\
&= \lambda_4\left(\frac{1}{4}\left(\sqrt{5-2\sqrt{5}}+\sqrt{2\sqrt{5}+5}\right)\right)\\
&= 6+2\sqrt{5}
\end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\mu(\lambda) = \sqrt{6+2\sqrt{5}}.$$

Comme $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$, le calcul de la jacobienne de Φ en x donne

$$\Phi'(x) = \begin{pmatrix}
0 & 1-f'(x_2) & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1-f'(x_3) & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1-f'(x_4) & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1-f'(x_5)\\
1-f'(x_1) & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

et

$$|\Phi'(x)| = \sup_{i=1,2,3,4,5}|1-f'(x_i)|$$

en prenant

$$\Lambda(\mathbb{R}^5) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |1 - f'(x)| < \mu(\lambda)^{-1}$$

on doit avoir

$$|1 - f'(x)| < \frac{\sqrt{5}-1}{4} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

et donc

$$\frac{5-\sqrt{5}}{4} < f'(x) < \frac{\sqrt{5}+3}{4} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Les valeurs propres de la matrice A sont

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{1+\sqrt{5}}{4} - \alpha - i\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}},\\
\beta_2 &= \frac{1+\sqrt{5}}{4} - \alpha + i\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\\
\beta_3 &= -\alpha - 1,\\
\beta_4 &= \frac{1-\sqrt{5}}{4} - \alpha + i\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}},\\
\beta_5 &= \frac{1-\sqrt{5}}{4} - \alpha - i\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}
\end{aligned}$$

Avec $\lambda = \alpha$ la matrice A admet deux valeurs propres β_1, β_2 avec $Re\ (\beta_i) > -\lambda$ et trois valeurs propres β_3, β_4, β_5, telles que $Re\ (\beta_i) < -\lambda$. Et par conséquent l'hypothèse $(\mathbf{H}_1)$ est satisfaite.

D'autre part, en posant

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on aura

$$\Phi(x) - Lx = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_2 - f(x_2)\\ \frac{1}{2}x_3 - f(x_3)\\ \frac{1}{2}x_4 - f(x_4)\\ \frac{1}{2}x_5 - f(x_5)\\ \frac{1}{2}x_1 - f(x_1) \end{pmatrix}$$

et

$$\lim_{|x|\longrightarrow\infty} |x|^{-1} |\Phi(x) - Lx| = 0 \Longleftrightarrow \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\frac{1}{2}x - f(x)}{x} = 0$$

De plus les valeurs propres de $A + BLC$ sont les valeurs propres de

$$A + L = \begin{pmatrix} -\alpha & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\alpha & -\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\alpha & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

qui sont

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{1+\sqrt{5}}{8} - \alpha + i\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\ ; \\
\gamma_2 &= \frac{1+\sqrt{5}}{8} - \alpha - i\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\ ; \\
\gamma_3 &= -\alpha - \frac{1}{2}\ ; \\
\gamma_4 &= \frac{1-\sqrt{5}}{8} - \alpha - i\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\ ; \\
\gamma_5 &= \frac{1-\sqrt{5}}{8} - \alpha + i\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}
\end{aligned}$$

pour avoir $Re\,(\gamma_i) < 0$, $\forall i = 1, 2, 3, 4, 5$ on doit avoir

$$\alpha > \frac{1+\sqrt{5}}{8}$$

et par suite l'hypothèse $(\mathbf{H}_2)$ est bien satisfaite.

Pour terminer la démonstration du théorème, il suffit de vérifier que l'ensemble D pour lequel on vérifie l'hypothèse $(\mathbf{H}_2)$, contient un seul point critique k et que la matrice jacobienne de $-\alpha x - F\,(x)$ au point k a ses valeurs propres z_i telles que, $Re\,(z_1) \geqslant Re\,(z_2) > 0$ et $Re\,(z_i) < 0$, pour $i = 3, 4, 5$. Pour cela, observons d'abord que l'équation (**??**) n'admet comme point critique que le point 0 et que la matrice jacobienne de $-\alpha x - F\,(x)$ en ce point est précisément la matrice A dont les valeurs propres sont telles que

$$Re\,(\gamma_1) = Re\,(\gamma_2) > 0 \text{ si } \alpha < \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

et

$$Re\,(\gamma_i) < 0, \text{ pour } i = 3, 4, 5$$

Ainsi les hypothèses du théorème **??** sont vérifiées et donc l'équation (**??**) admet au moins une solution périodique orbitalement stable.□

5. Non existence de solutions périodiques

Grâce à sa technique de réduction, R.A. Smith [**?**] a pu généraliser le théorème de Bendixson, de non-existence de solutions périodiques non triviales à des systèmes d'ordre $n > 2$ (voir théorème 4 dans [**?**]). Y. Li et J.S Muldowney [**?**] ont pu, en utilisant d'autres techniques, montrer un résultat qui englobe celui de R.A. Smith, ils ont montré le théorème suivant :

Théorème 5.1. [**?**] *Si l'une quelconque des conditions suivantes est vérifiée sur $\mathbb{R}^n$, il ne peut exister d'arc fermé rectifiable pour l'équation*

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \ \textit{où}\ x \in \mathbb{R}^n.$$

$$i)\ \sup\left\{\frac{\partial f_r}{\partial x_r} + \frac{\partial f_s}{\partial x_s} + \sum_{q\neq r,s}\left(\left|\frac{\partial f_q}{\partial x_r}\right| + \left|\frac{\partial f_q}{\partial x_s}\right|\right) : 1 \leqslant r < s \leqslant n\right\} < 0$$

$ii)$ $\sup\left\{\dfrac{\partial f_r}{\partial x_r}+\dfrac{\partial f_s}{\partial x_s}+\sum\limits_{q\neq r,s}\left(\left|\dfrac{\partial f_r}{\partial x_q}\right|+\left|\dfrac{\partial f_s}{\partial x_q}\right|\right):1\leqslant r<s\leqslant n\right\}<0$

$iii)$ $\lambda_1+\lambda_2<0$

$iv)$ $\inf\left\{\dfrac{\partial f_r}{\partial x_r}+\dfrac{\partial f_s}{\partial x_s}+\sum\limits_{q\neq r,s}\left(\left|\dfrac{\partial f_q}{\partial x_r}\right|+\left|\dfrac{\partial f_q}{\partial x_s}\right|\right):1\leqslant r<s\leqslant n\right\}>0$

$v)$ $\inf\left\{\dfrac{\partial f_r}{\partial x_r}+\dfrac{\partial f_s}{\partial x_s}+\sum\limits_{q\neq r,s}\left(\left|\dfrac{\partial f_r}{\partial x_q}\right|+\left|\dfrac{\partial f_s}{\partial x_q}\right|\right):1\leqslant r<s\leqslant n\right\}>0$

$vi)$ $\lambda_{n-1}+\lambda_n>0$,

où $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\ldots\geqslant\lambda_n$ *sont les valeurs propres de* $\dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^*+\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$; $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *désigne la matrice jacobienne de* f *et* $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^*$ *sa transposée.*

N.B $(i)\Leftrightarrow(ii)\Leftrightarrow(iii)$ et $(iv)\Leftrightarrow(v)\Leftrightarrow(vi)$.

La condition (iii) est la même que celle du théorème 4 dans [**?**].
En utilisant ce théorème nous obtenons :

Théorème 5.2. *Si l'équation différentielle* (**??**) *vérifie*

$$|\alpha|>\sup|f'(x)|,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

alors elle n'admet pas de solution périodique non triviale.

Démonstration : D'après le théorème **??**, la condition (i) nous donne

$$\begin{aligned}
&\sup\left\{\frac{\partial f_r}{\partial x_r}+\frac{\partial f_s}{\partial x_s}+\sum_{q\neq r,s}\left(\left|\frac{\partial f_q}{\partial x_r}\right|+\left|\frac{\partial f_q}{\partial x_s}\right|\right)1\leq r<s\leq 5\right\}\\
=\ &\sup\left\{\begin{array}{c}-2\alpha+|f'(x_i)|,\ i=\overline{1,5},\ -2\alpha+|f'(x_3)|+|f'(x_1)|,\\ -2\alpha+|f'(x_4)|+|f'(x_1)|,\ -2\alpha+|f'(x_2)|+|f'(x_4)|,\\ -2\alpha+|f'(x_2)|+|f'(x_5)|,\ -2\alpha+|f'(x_3)|+|f'(x_5)|\end{array}\right\}\\
=\ &\sup\left\{-2\alpha+2|f'(x)|,\ x\in\mathbb{R}\right\}\\
=\ &-2\alpha+2\sup|f'(x)|<0,\ x\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

par suite on aura

$$\alpha>\sup|f'(x)|,\ x\in\mathbb{R}$$

D'autre part la condition (iv) nous donne

$$\begin{aligned}
&\inf\left\{\frac{\partial f_r}{\partial x_r}+\frac{\partial f_s}{\partial x_s}-\sum_{q\neq r,s}\left(\left|\frac{\partial f_q}{\partial x_r}\right|+\left|\frac{\partial f_q}{\partial x_s}\right|\right)1\leq r<s\leq n\right\}\\
=\ &\inf\left(-2|f'(x)|\right)-2\alpha>0,\ x\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\alpha<\inf\left(-|f'(x)|\right),\ x\in\mathbb{R}$$

c'est à dire

$$\alpha<-\sup|f'(x)|,\ x\in\mathbb{R}$$

d'où le résultat.$\square$

References

[1] O. ARINO and A.A. CHERIF, *More on ordinary differential equations which yield periodic solutions of delay differential equations,* J. Math. Anal. Appl. 180 (1993) pp 361-385.

[2] Y. LI and J.S. MULDOWNEY, *On Bendixson's criterion.* J. Differential Equations, 106 (1993) pp 27-39.

[3] M.S. MOULAY & A. BERBOUCHA, *Sur les solutions périodiques d'un système différentiel de* $\mathbb{R}^3$, Bull. Soc. Roy. Sci. de Liège, Vol. 73, (5-6), 2004, pp. 247-256.

[4] V. A. PLISS, *Nonlocal problems of the theory of oscillation*, Academic press, New York, 1966.

[5] R.A. SMITH, *The Poincaré-Bendixson theorem for certain differential equations of higher order*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect A, 83 (1979) pp 63-79.

[6] R.A. SMITH, *Existence of periodic orbits of autonomous ordinary differential equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 85 (1980) pp 153-172.

[7] R.A. SMITH, *Poincaré index theorem concerning periodic orbits of differential equations*, Proc. London Math. Soc. (3). 48 (1984) pp 341-362.

[8] R.A. SMITH, *Some applications of Hausdorff dimension inequalities for ordinary differential equations,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh sect A 104 (1986) pp 235-259.

[9] R.A. SMITH, *Orbital stability for ordinary differential equations*, J. Differential Equations, 69 (1987) pp 265-287.

Laboratoire de Mathématiques Appliquées, Université A. MIRA - Béjaia, Algérie.
E-mail address: aberboucha@yahoo.fr