Bull. Soc. Royale Sciences Liège, 33e année, n° 12, 1964, pp. 736-742

SUR LES SYSTÈMES CONJUGUÉS ET AUTOCONJUGUÉS DE SECONDE ESPÈCE D'UNE SURFACE Φ DE SEGRE NON PARABOLIQUE DE S_5

par J. VANGELDERE
Docteur en Sciences

Résumé

Dans cette note, nous démontrons d'abord quelques propriétés des lignes principales d'une surface Φ de Segre de S_5 (non développable et non parabolique). Nous établissons notamment qu'il existe trois types de propriétés qui correspondent respectivement au fait que l'hyperplan osculateur à la surface en son point générateur dépend de 0, 1 ou 2 paramètres essentiels. Ensuite, nous donnons une interprétation géométrique de la relation de liaison entre tangentes conjuguées de seconde espèce par l'intermédiaire de la notion de groupe polaire relatif aux tangentes principales. Finalement, nous donnons les conditions nécessaires et suffisantes pour que, dans un double système conjugué de seconde espèce, l'un des systèmes de courbes soit indéterminé.

1. Considérons dans un espace projectif à cinq dimensions une surface Φ de Segre du type non parabolique (voir par exemple [7] où C. Segre étudie ces surfaces ou [8] pages 736 à 740 dans lesquelles A. Terracini rappelle les définitions essentielles). Nous désignerons par x le point générateur de cette surface et nous représenterons par x_u, x_v, x_{uu}, x_{uv}, ... etc. les points $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$, ... etc., où u et v sont les paramètres de référence de la surface. Nous utiliserons encore la notation (η, y) au lieu de $\sum_{i=0}^{5} \eta_i y_i$ où η_i et y_i $(i = 0,1,..., 5)$ sont respectivement les coordonnées tangentielles de l'hyperplan η et les coordonnées du point y. La condition nécessaire et suffisante d'appartenance d'un point y à l'hyperplan η est donc traduite par $(\eta, y) = 0$.

Présenté par F. Jongmans, le 17 décembre 1964.

2. Il est toujours possible de choisir les paramètres de référence de la surface (x) pour qu'ils correspondent aux courbes caractéristiques de cette surface (il suffit d'effectuer un changement adéquat de ces paramètres de référence si cela est nécessaire). Dans ces conditions, les coordonnées de x vérifient une équation du type

$$x_{uv} = ax + bx_u + cx_v, \tag{1}$$

où a, b, c sont des fonctions de u, v.

Nous supposerons encore que cette surface (x) n'est pas une développable (c'est-à-dire un cône ou le lieu des tangentes à une courbe). La relation (1) est donc la seule équation aux dérivées partielles du second ordre vérifiée par x (voir [7], numéro 12, pages 1059 à 1062). Par conséquent, les points x, x_u, x_v, x_{uu}, x_{vv} sont linéairement indépendants et déterminent un hyperplan η qui est l'hyperplan osculateur à la surface (x) en son point générateur. Analytiquement, cet hyperplan est défini par

$$(\eta, x) = (\eta, x_u) = (\eta, x_v) = (\eta, x_{uu}) = (\eta, x_{vv}) = 0. \tag{2}$$

Les lignes principales de la surface (x) sont caractérisées par $(\eta, x_{uuu})du^3 + 3(\eta, x_{uuv})du^2dv + 3(\eta, x_{uvv})dudv^2 + (\eta, x_{vvv})dv^3 = 0$ (voir [7] pages 1071 et 1072 ou [8] pages 754 et 755 où A. Terracini donne plusieurs définitions de ces courbes).

En dérivant (1) par rapport à u et v, on constate directement que $(\eta, x_{uuv}) = (\eta, x_{uvv}) = 0$. Cela entraîne que l'équation différentielle des lignes principales de la surface (x) se réduit à

$$(\eta, x_{uuu})du^3 + (\eta, x_{vvv})dv^3 = 0. \tag{3}$$

Notons encore que E. Bompiani a démontré que les courbes autoconjuguées de seconde espèce de la surface (x) coïncident avec les lignes principales de cette surface (voir [2] pages 94 et 95). Par conséquent, l'équation différentielle des courbes autoconjuguées de seconde espèce de (x) est également donnée par (3).

3. Nous allons démontrer les trois théorèmes suivants qui classifient en trois types distincts les surfaces Φ de Segre de S_5 et qui donnent pour chacun des cas considérés des propriétés caractéristiques des lignes principales de la surface et de l'hyperplan osculateur η.

1° *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface* Φ *de* SEGRE *de* S_5 (*non développable et de type non parabolique*) *ait ses lignes principales indéterminées* (*toute courbe de la surface est une ligne principale*) *est que l'hyperplan osculateur à la surface en son point générateur reste fixe lorsque ce point décrit la surface* (*ou, ce qui est équivalent, que la surface soit située entièrement dans un hyperplan fixe qui coïncide donc avec l'hyperplan osculateur*).

2° *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface* Φ *de* SEGRE *de* S_5 (*non développable et de type non parabolique*) *ne possède qu'un seul système de lignes principales est que l'hyperplan osculateur à la surface en son point générateur ne décrive qu'une famille à un paramètre essentiel lorsque ce point décrit la surface. Dans ce cas, les lignes principales sont des courbes planes et coïncident avec les courbes d'un des deux systèmes de caractéristiques de la surface* (*elles coïncident avec les courbes* u *lorsque* η *est fixe le long de ces courbes et coïncident avec les courbes* v *lorsque* η *est fixe le long de ces dernières*).

3° *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface* Φ *de* SEGRE *de* S_5 (*non développable et de type non parabolique*) *possède trois systèmes distincts de lignes principales est que l'hyperplan osculateur à la surface en son point générateur décrive une famille à deux paramètres essentiels lorsque ce point décrit la surface. Dans ce cas, les tangentes à la surface en son point générateur aux courbes caractéristiques coïncident avec le couple Hessien du terne des tangentes principales de la surface en ce même point* (*pour la définition du Hessien, voir par exemple* [1]).

Pour démonter ces théorèmes, notons que les équations (1) et (2) entraînent

$$(4) \quad \begin{aligned} &(\eta_u, x)=(\eta_u, x_u)=(\eta_u, x_v)=(\eta_u, x_{vv})=0 \text{ et } (\eta_u, x_{uu})=-(\eta, x_{uuu}),\\ &(\eta_v, x)=(\eta_v, x_u)=(\eta_v, x_v)=(\eta_v, x_{uu})=0 \text{ et } (\eta_v, x_{vv})=-(\eta, x_{vvv}).\end{aligned}$$

On déduit directement de ces équations que la condition nécessaire et suffisante pour que η reste fixe lorsque u et v varient ou, ce qui est équivalent, que la surface (x) soit située entièrement dans un S_4 fixe est que $(\eta, x_{uuu}) = (\eta, x_{vvv}) = 0$. Le premier théorème se démontre très simplement à partir de (3) et de cette remarque.

Considérons à présent le cas où η ne dépend que d'un paramètre essentiel lorsque u et v varient. On a donc une relation du type

$$\tau_1\eta_u + \tau_2\eta_v = \varepsilon\eta.$$

Les équations (2) et (4) donnent alors

$$\tau_1(\eta_u, x_{uu}) = -\tau_1(\eta, x_{uuu}) = 0 \text{ et } \tau_2(\eta_v, x_{vv}) = -\tau_2(\eta, x_{vvv}) = 0.$$

En conséquence, si l'hyperplan η ne dépend que d'un paramètre essentiel (sans être fixe), il n'y a que les deux cas suivants qui soient possibles.

a) L'hyperplan osculateur η reste fixe le long des caractéristiques u (η_u coïncide géométriquement avec η). Cela arrive sous la condition nécessaire et suffisante que $(\eta,\ x_{uuu}) = 0$.

b) L'hyperplan osculateur η reste fixe le long des caractéristiques v (η_v coïncide géométriquement avec η). Cela arrive sous la condition nécessaire et suffisante que $(\eta,\ x_{vvv}) = 0$.

Ceci permet déjà de déduire une grande partie du second théorème. Il ne reste plus en fait qu'à démontrer que, dans ces hypothèses, les lignes principales sont planes. Supposons par exemple que $(\eta, x_{uuu}) = 0$: les lignes principales de la surface se confondent donc avec les courbes caractéristiques u et les coordonnées de x vérifient l'équation (1) et une seconde du type

$$x_{uuu} = \mathrm{A}x + \mathrm{B}x_u + \mathrm{E}x_v + \mathrm{F}x_{uu} + \mathrm{H}x_{vv}. \tag{5}$$

Cette relation dérivée par rapport à v donne la valeur de x_{uuuv} sous la forme d'une combinaison linéaire des points x, x_u, x_v, x_{uu}, x_{vvv} qui sont linéairement indépendants. Par ailleurs, en dérivant (1) deux fois par rapport à u, on obtient une nouvelle valeur de x_{uuuv}. La comparaison de ces deux résultats donne six conditions d'intégrabilité parmi lesquelles se trouve $\mathrm{E} = \mathrm{H} = 0$. Les courbes u sont donc planes sur la surface (x) et le second théorème est démontré.

Le Hessien de la forme cubique du premier membre de (3) est (à un facteur constant près) $\mathscr{H} = (\eta,\ x_{uuu})\ (\eta, x_{vvv})\ dudv$. Puisque la condition nécessaire et suffisante pour que l'hyperplan η dépende de deux paramètres essentiels est $(\eta,\ x_{uuu})\ (\eta,\ x_{vvv}) \neq 0$, on obtient ainsi directement la démonstration du troisième théorème.

Ces résultats contiennent la propriété démontrée par C. Segre à la fin du numéro 21, page 1072 de [7] et sont comparables à ceux de Madame Read-Derchain (voir [5]) lorsque la surface (x) représente une congruence W de S_3 puisque, dans ce cas, les asymptotiques des nappes focales de la congruence marquent sur la surface (x) les courbes caractéristiques (voir par exemple [3] page 60) et que le complexe linéaire osculateur à la congruence correspond à l'hyperplan η (voir par exemple [6] pages 154 et 155).

4. Par ailleurs, E. BOMPIANI a défini les systèmes conjugués de seconde espèce d'une surface de S_5 (voir [2] pages 92 et 93). Soient (C) et (K) deux systèmes quelconques de courbes de la surface. Caractérisons les tangentes aux courbes C par $du = \mathrm{D}u$, $dv = \mathrm{D}v$ et celles aux courbes K par $du = \partial u$, $dv = \partial v$. La tangente au point générateur x de la surface (x) à la courbe C issue de ce point joint donc le point x au point $Dx = x_u \mathrm{D}u + x_v \mathrm{D}v$.

Ces systèmes de courbes (C) et (K) formeront sur la surface (x) ce que E. BOMPIANI appelle un double système conjugué de seconde espèce $(\mathrm{C}^2, \mathrm{K}^1)$ sous la condition nécessaire et suffisante que (voir [2], page 96)

$$(\eta, \partial \mathrm{D}^2 x) = (\eta, x_{uuu}) \partial u \mathrm{D}u^2 + (\eta, x_{vvv}) \partial v \mathrm{D}v^2 = 0. \tag{6}$$

En comparant (6) et (3), on retrouve immédiatement (dans le cas considéré ici) la propriété de E. BOMPIANI disant que les lignes principales d'une surface de S_5 coïncident avec les courbes autoconjuguées de seconde espèce de la surface.

Par contre, si l'on considère le premier groupe polaire de $(\partial u, \partial v)$ par rapport aux trois tangentes principales définies par (3) (pour la définition, voir par exemple [4]), on obtient les deux tangentes caractérisées par

$$(\eta, x_{uuu})\, \partial u du^2 + (\eta, x_{vvv}) \partial v dv^2 = 0.$$

De même, le second groupe polaire de $(\mathrm{D}u, \mathrm{D}v)$ par rapport aux trois tangentes principales donne la tangente

$$(\eta, x_{uuu}) \mathrm{D}_u{}^2 du + (\eta, x_{vvv}) \mathrm{D}v^2 dv = 0.$$

On obtient ainsi le théorème suivant (valable pour une surface Φ de SEGRE de S_5, non développable et de type non parabolique).

Le premier groupe polaire d'une tangente quelconque $(\partial u, \partial v)$ par rapport aux trois tangentes principales de la surface donne les tangentes (généralement deux) par rapport auxquelles cette tangente $(\partial u, \partial v)$ est conjuguée de seconde espèce.

Le second groupe polaire d'une tangente quelconque (Du, Dv) par rapport aux trois tangentes principales de la surface donne la tangente conjugée de seconde espèce par rapport à cette tangente (Du, Dv).

5. Dans [2], E. Bompiani a étudié les doubles systèmes conjugués de seconde espèce (C^2, K^1) des surfaces de S_n tels que, l'un des systèmes de courbes étant fixé, l'autre est indéterminé (voir [2] pages 97 à 99) et a démontré deux théorèmes qui donnent une classification des différents cas possibles auxquels le système de courbes donné ou la surface doit nécessairement appartenir. Toutefois, la généralité de ces résultats entraîne un appauvrissement de la finesse dans certains cas particuliers et plus spécialement dans l'un des plus importants : les surfaces Φ de Segre de S_5. Or, les propriétés et relations des numéros 3 et 4 de ci-dessus permettent de préciser très fortement les deux théorèmes de E. Bompiani dans le cas qui nous intéresse. On obtient ainsi les deux théorèmes suivants dont les démonstrations se déduisent directement des résultats précédents.

1° *Si* (C^2, K^1) *est un double système conjugué de seconde espèce sur une surface* Φ *de* Segre *de* S_5 *(non développable et de type non parabolique), le système de courbes* (K) *est indéterminé sur la surface sous la condition nécessaire et suffisante que l'on ait au moins l'un des deux cas suivants* :

a) *la surface se trouve dans un* S_4 *(le système de courbes* (C) *étant quelconque)* ;

b) *l'hyperplan osculateur de la surface ne dépend que d'un paramètre essentiel et le système de courbes* (C) *coïncide avec l'unique système de lignes principales de la surface.*

2° *Si* (C^2, K^1) *est un double système conjugué de seconde espèce sur une surface* Φ *de* Segre *de* S_5 *(non développable et de type non parabolique), le système de courbes* (C) *est indéterminé sur la surface sous la condition nécessaire et suffisante que l'on ait au moins l'un des deux cas suivants* :

a) *la surface se trouve dans un* S_4 *(le système de courbes* (K) *étant quelconque)* ;

b) *l'hyperplan osculateur de la surface ne dépend que d'un paramètre essentiel et le système de courbes* (K) *coïncide avec l'unique système de lignes principales de la surface.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Andoyer, Leçons élémentaires sur la théorie des formes, Paris, Gauthier-Villars, 1898.

[2] E. Bompiani, Sistemi coniugati sulle superficie degli iperspazi, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 46, 1922, pp. 91 à 104.

[3] L. Godeaux, La géométrie différentielle des surfaces considérées dans l'espace réglé, *Académie Royale de Belgique, Classe des Sciences*, deuxième série, t. 34, fasc. 6, 1964, 83 pages.

[4] L. Godeaux, Introduction à la géométrie supérieure, Université de Liège, 1946.

[5] C. Read-Derchain, Sur les congruences W, *Bull. Soc. Royale Sciences Liège*, 32e année, 1963, pp. 24 à 26.

[6] O. Rozet, Recherches sur les congruences de droites, *Bull. Soc. Royale Sciences Liège*, 1941, pp. 138 à 167.

[7] C. Segre, Su una classe di superficie degl'iperspazi legata colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2o ordine, *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, 42, 1906-907, pp. 1047 à 1079.

[8] A. Terracini, Esposizione di alcuni risultati di geometria proiettiva differenziale negli iperspazi, appendice III_A, pp. 729 à 769 du tome II de la *Geometria proiettiva differenziale, Bologne, Zanichelli*, 1927, de Fubini-Cech.