

## SUR UNE CERTAINE CORRESPONDANCE ENTRE GRAPHES

par C. HEUCHENNE  
*Assistant à l'Université*

Pour la facilité de l'exposé ultérieur, j'adopte la définition suivante (\*) :

Un *graphe* est un quadruple  $G = (A, S, s, b)$  composé d'un ensemble  $A$  d'éléments, dits *arcs*, d'un ensemble  $S$  d'éléments, dits *sommets*, et de deux applications de  $A$  dans  $S$ , l'une  $s$  dite *source*, l'autre  $f$  dite *but*.

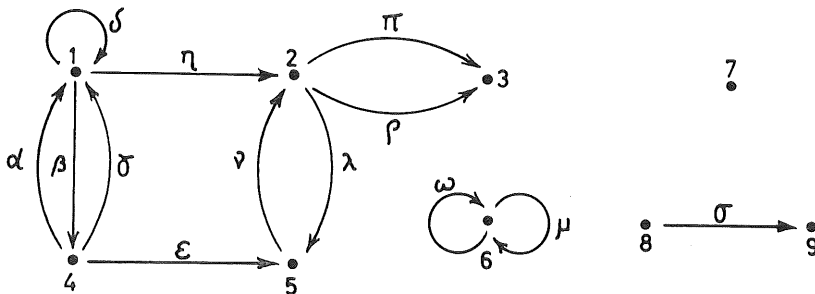
Graphiquement, les sommets seront représentés par des points, les arcs par des flèches, une flèche allant de la source au but de l'arc représenté.

*Exemple* :  $A = \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta, \lambda, \mu, \nu, \pi, \rho, \sigma, \omega \}$   
 $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$

Le tableau suivant donne les applications  $s$  et  $b$ .

arc	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$\varepsilon$	$\eta$	$\lambda$	$\mu$	$\nu$	$\pi$	$\rho$	$\sigma$	$\omega$
source	4	1	4	1	4	1	2	6	5	2	2	8	6
but	1	4	1	5	2	5	6	2	3	3	9	6	

Ce graphe peut être représenté par le dessin :



(\*) C'est une définition stricte et générale de ce qui, dans [1] (voir références), serait appelé multigraphe orienté, mais est appelé graphe dans [2] ; d'autres auteurs disent graphe coloré.

Présenté par F. Jongmans, le 17 décembre 1964.

On a immédiatement une application, que je noterai  $s \times b$ , de  $A$  dans  $S \times S$ , associant à un arc  $\alpha$  de  $A$  le couple  $(s(\alpha), b(\alpha))$  de  $S \times S$ . Si  $s \times b$  est une injection de  $A$  dans  $S \times S$ , le graphe est dit *pur*. Dans ce cas, on peut identifier  $A$  à une relation binaire de  $S$  qui n'est autre que  $(s \times b)(A) = \{(x, y) \in S \times S : y \in b[\bar{s}^{-1}(x)]\}$ ,  $s$  et  $b$  devenant alors les restrictions à ce sous-ensemble des première et seconde projections de  $S \times S$  sur ses facteurs  $S$ .

Ainsi un graphe pur est complètement défini par la donnée de  $S$  et de l'application multivoque  $\Gamma = b\bar{s}^{-1}$  de  $S$  dans  $S$ .

On voit que les graphes de BERGE [1] coïncident avec les graphes purs du présent travail.

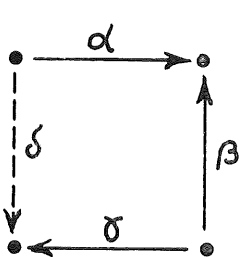
Un *sous-graphe*  $G_1$  de  $G$  est un graphe  $(A_1, S_1, s_1, b_1)$  où  $S_1 \subset S$ ,  $A_1 \subset \bar{s}^{-1}(S_1) \cap \bar{b}^{-1}(S_1)$  et  $s_1$  (resp.  $b_1$ ) est la restriction de  $s$  (resp.  $b$ ) à  $A_1$ . Trois cas remarquables se présentent :

1)  $S_1 = S$  :  $A_1$  est alors une partie quelconque de  $A$ .

2)  $A_1 = A$  :  $s(A) \cup b(A)$  doit être inclus dans  $S_1$  ; c'est le cas où on peut enlever à volonté des sommets isolés de  $G$  (c'est-à-dire des sommets qui ne sont ni sources, ni buts).

3)  $A_1 = \bar{s}^{-1}(S_1) \cap \bar{b}^{-1}(S_1)$  : je dis alors que  $G_1$  est la *section* de  $G$  engendrée par  $S_1$  (\*).

Une *chaîne* est une partie finie  $\{z_i\}_{i=1,0,\dots,n}$  de  $S$  telle que  $z_i \in b\bar{s}^{-1}(z_{i-1}) \cup s\bar{b}^{-1}(z_{i-1})$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ . L'entier  $n$  sera la *longueur* de la chaîne. Un graphe sera dit *connexe* si pour tout couple  $(x, y)$  de sommets il existe une chaîne  $\{z_i\}_{i=0,\dots,n}$  telle que  $x = z_0$  et  $y = z_n$ .



Un graphe  $G$  est dit *quadrangulaire* si  $b(\alpha) = b(\beta)$  et  $s(\beta) = s(\gamma)$  entraînent l'existence d'un arc  $\delta$  tel que  $s(\alpha) = s(\delta)$  et  $b(\delta) = b(\gamma)$ .

Considérons dans l'ensemble d'arcs  $A$  d'un graphe  $G$  la relation  $\parallel$  défini par :

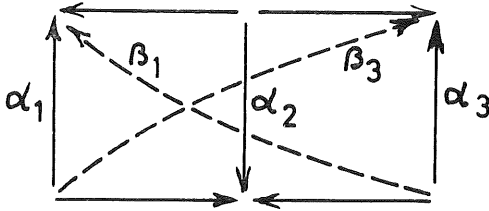
$\alpha$  est en relation  $\parallel$  avec  $\gamma$  s'il existe des arcs  $\beta$  et  $\delta$  tels que  $s(\alpha) = s(\delta)$ ,  $b(\alpha) = b(\beta)$ ,  $s(\gamma) = s(\beta)$  et  $b(\gamma) = b(\delta)$ .

(\*) Pour des graphes purs, le cas 1 correspond aux graphes partiels et le cas 3 aux sous-graphes de BERGE. La terminologie du cas 3 est inspirée de ORE [3, 1.3].

La relation  $\parallel$  est évidemment réflexive et symétrique. En outre, deux arcs de même but ou de même source vérifient cette relation.

THÉORÈME :  $\parallel$  est une équivalence de  $A$  si et seulement si  $G$  est quadrique.

Si  $G$  est quadrique, prouvons la transitivité de  $\parallel$ . Si  $\alpha_1 \parallel \alpha_2$  et  $\alpha_2 \parallel \alpha_3$ , on a la situation représentée en traits pleins sur la figure



Par hypothèse, il existe  $\beta_1$  et  $\beta_3$  tels que figurés en traits interrompus. Il en résulte que  $\alpha_1$  est en relation  $\parallel$  avec  $\alpha_3$ .

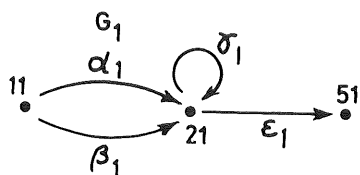
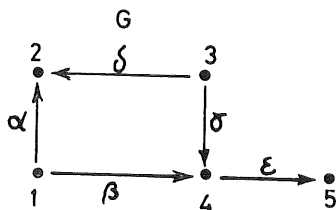
Réciproquement si  $\parallel$  est une équivalence, si  $b(\alpha) = b(\beta)$  et si  $s(\beta) = s(\gamma)$ , on a  $\alpha \parallel \beta$  et  $\beta \parallel \gamma$ , donc  $\alpha \parallel \gamma$  ce qui entraîne l'existence d'un  $\delta \in A$  tel que  $s(\alpha) = s(\delta)$  et  $b(\gamma) = b(\delta)$  :  $G$  est quadrique.

Un homomorphisme du graphe  $G = (A, S, s, b)$  dans le graphe  $G_1 = (A_1, S_1, s_1, b_1)$  est, par définition, une paire  $(f, h)$  d'applications,  $f$  de  $A$  dans  $A_1$ ,  $h$  de  $S$  dans  $S_1$ , telle que  $s_1 f = h s$  et  $b_1 f = h b$ . Dans ces conditions, le quadruple  $(f(A), h(S), s_1, b_1)$  est un sous-graphe de  $G_1$ , appelé *image homomorphe* de  $G$ . En effet, de  $s_1 f(A) = h s(A) \subset h(S)$  et de  $b_1 f(A) = h b(A) \subset h(S)$ , on tire

$$f(A) \subset s_1^{-1} [h(S)] \cap b_1^{-1} [h(S)].$$

$G$  et  $G_1$  sont dits *isomorphes* s'il existe un homomorphisme  $(f, h)$  de  $G$  dans  $G_1$  tel que  $f$  (resp.  $h$ ) soit une bijection de  $A$  (resp.  $S$ ) sur  $A_1$  (resp.  $S_1$ ). Dans ce cas,  $G_1$  est image homomorphe de  $G$  et inversement, puisque  $s f^{-1} = h^{-1} s_1$  et  $b f^{-1} = h^{-1} b_1$ ,  $G$  est image homomorphe de  $G_1$ .

On vérifiera facilement que l'image homomorphe d'un graphe connexe est un graphe connexe. Par contre, l'exemple suivant montre que l'image homomorphe d'un graphe pur et quadrique peut n'être ni pur ni quadrique :



$f$  envoie  $\alpha$   $\beta$   $\gamma$   $\delta$   $\varepsilon$   $h$  envoie 1 2 3 4 5  
sur  $\alpha_1$   $\beta_1$   $\gamma_1$   $\gamma_1$   $\varepsilon_1$  sur 11 21 21 21 51

$G$  est pur et quadrique ;  $G_1$ , image homomorphe de  $G$  par  $(f, h)$ , n'est ni pur ni quadrique (car il n'existe pas d'arc de 11 vers 51).

Je définis la *perspective* du graphe  $G = (A, S, s, b)$  comme étant le graphe  $G' = (B, A, s', b')$ , où  $B$  est l'ensemble  $\{(\alpha, \beta) \in A \times A : b(\alpha) = s(\beta)\}$ ,  $s'$  (resp.  $b'$ ) est l'application de  $B$  dans  $A$  associant à  $(\alpha, \beta)$  l'arc  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ).

Plus concrètement, la perspective  $G'$  du graphe  $G$  est le graphe dont les sommets sont les arcs de  $G$ , un sommet  $\alpha$  allant vers un sommet  $\beta$  dans  $G'$  si et seulement si, dans  $G$ , on a la situation :

$\xrightarrow{\alpha} \cdot \xrightarrow{\beta}$ . Une notion similaire mais plus simple existe en 1.5 de Ore, sous le nom de « interchange graph » ; la considération implicite de certains aspects de  $G'$  peut être décelée çà et là, notamment dans [4], pp. 17-19 et 20-22.

**THÉORÈME :** *Le graphe  $G' = (B, A, s', b')$  est la perspective d'un graphe si et seulement si  $G'$  est pur et quadrique.*

*Condition nécessaire :*  $G'$  est la perspective de  $G = (A, S, s, b)$ .  $G'$  est pur car l'application  $s' \times b'$  de  $B$  dans  $A \times A$  est injective comme restriction à  $B$  de l'identité de  $A \times A$ . Prenons  $C_1, C_2, C_3 \in B$  tels que  $b'(C_1) = b'(C_2) = \alpha_2$  et  $s'(C_2) = s'(C_3) = \beta_1$  ; donc  $C_1 = (\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $C_2 = (\beta_1, \alpha_2)$  et  $C_3 = (\beta_1, \beta_2)$ . Considérons l'élément  $C_4 = (\alpha_1, \beta_2)$  de  $A \times A$ .  $(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $(\beta_1, \alpha_2)$ ,  $(\beta_1, \beta_2)$  étant des éléments de  $B$ , on a  $b(\alpha_1) = s(\alpha_2)$ ,  $s(\alpha_2) = b(\beta_1)$ ,  $b(\beta_1) = s(\beta_2)$ , donc  $b(\alpha_1) = s(\beta_2)$  c'est-à-dire  $C_4 \in B$ . En outre,  $s'(C_4) = \alpha_1 = s'(C_1)$  et  $b'(C_4) = \beta_2 = b'(C_3)$ . L'existence d'un tel  $C_4$  montre que  $G'$  est quadrique.

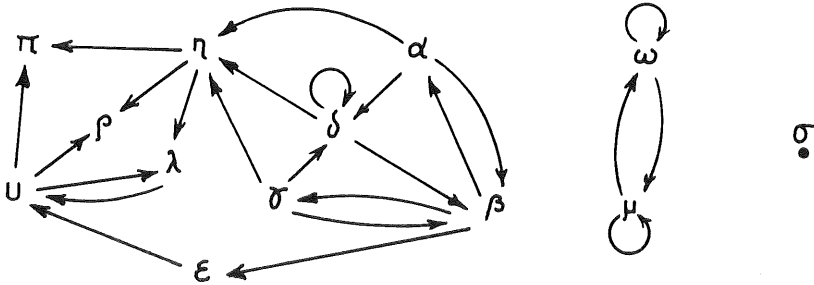
*Condition suffisante.*  $G' = (B, A, s', b')$  étant pur par hypothèse,  $B$  peut être identifié à une partie de  $A \times A$  et, par définition, si  $(\alpha, \beta) \in B$ ,  $s'(\alpha, \beta) = \alpha$  et  $b'(\alpha, \beta) = \beta$ .  $G'$  étant quadrique, la

relation  $\parallel$  est une équivalence de  $B$ . Notons  $|\alpha, \beta|$  la classe de  $(\alpha, \beta) \in B$  et  $B/\parallel$  l'ensemble des classes (c'est-à-dire l'ensemble quotient de  $B$  par l'équivalence  $\parallel$ ).

Je définis  $b$  comme suit. Si  $\alpha \in A$  est tel qu'il existe  $\beta \in A$  avec  $(\alpha, \beta) \in B$ , posons  $b(\alpha) = |\alpha, \beta|$ . La définition est cohérente car s'il existe un autre  $\beta_1 \in A$  avec  $(\alpha, \beta_1) \in B$ ,  $(\alpha, \beta_1)$  est en relation  $\parallel$  avec  $(\alpha, \beta)$  puisqu'ils ont même source  $\alpha$  et  $|\alpha, \beta_1| = |\alpha, \beta|$ . Si pour  $\alpha \in A$ , il n'y a aucun  $\beta \in A$  avec  $(\alpha, \beta) \in B$ , posons  $b(\alpha) \in E_1$ ,  $E_1$  étant un ensemble arbitraire. Je définis  $s$  d'une manière semblable : si  $\beta \in A$  est tel qu'il existe  $\alpha \in A$  avec  $(\alpha, \beta) \in B$ ,  $s(\beta) = |\alpha, \beta|$ ; sinon  $s(\beta) \in E_2$ ,  $E_2$  étant un ensemble arbitraire.

Convenant que  $S$  est la somme ensembliste de  $B/\parallel$ ,  $E_1$  et  $E_2$ , j'affirme que le graphe donné  $G'$  est la perspective du graphe  $(A, S, s, b)$ . Il suffit de montrer que  $B$  est l'ensemble des couples  $(\alpha, \beta)$  tels que  $b(\alpha) = s(\beta)$ . Si  $(\alpha, \beta) \in B$ , par définition de  $s$  et  $b$ ,  $s(\beta) = |\alpha, \beta| = b(\alpha)$ . Inversement, si  $b(\alpha) = s(\beta)$ ,  $b(\alpha) \in B/\parallel + E_1$  et  $s(\beta) \in B/\parallel + E_2$ .  $E_1$  étant disjoint de  $E_2$ , nécessairement  $b(\alpha) = s(\beta)$  est élément de  $B/\parallel$ . Il existe donc  $\alpha_1 \in A$  tel que  $(\alpha_1, \beta) \in B$  et  $s(\beta) = |\alpha_1, \beta|$  d'une part,  $\beta_1 \in A$  tel que  $(\alpha, \beta_1) \in B$  et  $b(\alpha) = |\alpha, \beta_1|$  d'autre part.  $|\alpha_1, \beta|$  et  $|\alpha, \beta_1|$  sont une même classe d'équivalence, d'où  $(\alpha_1, \beta)$  est en relation  $\parallel$  avec  $(\alpha, \beta_1)$ . Ainsi il existe  $C \in B$  tel que  $s'(C) = s'(\alpha, \beta_1) = \alpha$  et  $b'(C) = b'(\alpha_1, \beta) = \beta$ . Finalement  $(\alpha, \beta) = C \in B$  et, au total,  $(\alpha, \beta) \in B$  équivaut à dire que  $b(\alpha) = s(\beta)$ .

On remarquera que,  $G'$  étant donné pur et quadrique, l'ensemble  $A$  des arcs de  $G$  est immédiatement défini, mais que  $S, s, b$  sont partiellement indéterminés du fait de l'arbitraire de  $E_1$  et  $E_2$ . Ainsi, la perspective  $G'$  du graphe  $G$  donné en premier exemple dans cette étude est :



$G'$  étant quadrique, on peut partitionner l'ensemble  $B$  de ses arcs en classes selon l'équivalence  $\parallel$ , ce qui donne :

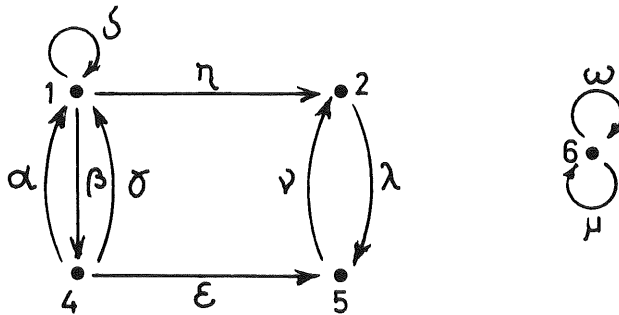
classe 1 =  $\{(\alpha, \beta), (\alpha, \delta), (\alpha, \eta), (\delta, \beta), (\gamma, \beta), (\gamma, \delta), (\delta, \delta), (\delta, \eta), (\gamma, \eta)\}$  ;

classe 2 =  $\{(\eta, \pi), (\eta, \rho), (\eta, \lambda), (\nu, \pi), (\nu, \rho), (\nu, \lambda)\}$  ;

classe 4 =  $\{(\beta, \gamma), (\beta, \alpha), (\beta, \varepsilon)\}$  ; classe 5 =  $\{(\lambda, \nu), (\varepsilon, \nu)\}$  ;

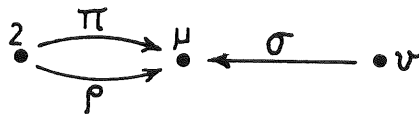
classe 6 =  $\{(\omega, \omega), (\omega, \mu), (\mu, \mu), (\mu, \omega)\}$ .

On peut déjà construire la section  $G_1$  engendrée par  $B/\parallel = \{1, 2, 4, 5, 6\}$  :

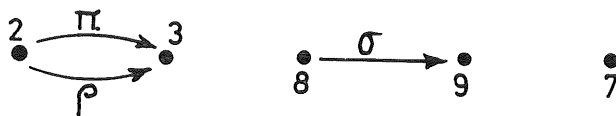


On sait aussi que  $s(\pi) = s(\rho) = 2$ . Mais  $\sigma, \pi, \rho$  n'étant pas sources dans  $G'$ ,  $b(\sigma), b(\pi)$  et  $b(\rho)$  sont quelconques dans  $E_1$  arbitraire ;  $\sigma$  n'étant pas but dans  $G'$ ,  $s(\sigma)$  est quelconque dans  $E_2$  arbitraire.

*Première solution* : prenons  $E_1 = \{u\}, E_2 = \{v\}$ . De cette manière on obtient un graphe, de perspective donnée  $G'$ , dont l'ensemble des sommets est minimum. Dans le cas présent, ce graphe est composé de la section  $G_1$  augmentée de la situation :



*Deuxième solution* : prenons  $E_1 = \{3,9\}, E_2 = \{7,8\}, b(\sigma) = 9, b(\pi) = b(\rho) = 3, s(\sigma) = 8$ . Ce graphe est composé de la section  $G_1$  augmentée de la situation :



On retrouve le graphe  $G$  primitif.

Il est clair qu'il y a une infinité d'autres solutions, c'est-à-dire de graphes ayant pour perspective  $G'$ , tous contenant cependant  $G_1$  comme section.

**THÉORÈME :**  $(\bar{b}^1s(A), s(A), s, b)$  est une section de  $G$ , image homomorphe de sa perspective  $G'$ .

C'est une section car  $\bar{b}^1s(A) = A \cap \bar{b}^1s(A) = \bar{s}^1s(A) \cap \bar{b}^1s(A)$ . Les applications  $s'$  de  $B$  dans  $A$  et  $s$  de  $A$  dans  $S$  forment un homomorphisme de  $G'$  dans  $G$  car  $ss' = ss'$  et  $bs' = sb'$ , puisque  $bs'(\alpha, \beta) = b(\alpha) = s(\beta) = sb'(\alpha, \beta)$  si  $(\alpha, \beta) \in B$ . Enfin

$$s'(B) = \{\alpha \in A : b(\alpha) = s(\beta)\} = \bar{b}^1s(A).$$

**THÉORÈME :**  $(\bar{s}^1b(A), b(A), s, b)$  est une section de  $G$ , image homomorphe de sa perspective  $G'$ .

Ici l'homomorphisme est la paire  $(b', b)$ .

**COROLLAIRES :** Si  $s$  ou  $b$  est surjectif,  $G$  est image homomorphe de  $G'$ ; si  $s$  (resp.  $b$ ) est surjectif,  $s'$  (resp.  $b'$ ) est surjectif.

**THÉORÈME :** Si  $s$  (resp.  $b$ ) est injectif,  $s'$  (resp.  $b'$ ) est injectif.

Si  $s'$  n'est pas injectif, il existe deux éléments distincts  $(\alpha_1, \beta_1)$  et  $(\alpha_2, \beta_2)$  de  $B$  tels que  $s'(\alpha_1, \beta_1) = s'(\alpha_2, \beta_2)$  c'est-à-dire  $\alpha_1 = \alpha_2$ .

Ceci implique  $\beta_1 \neq \beta_2$  bien que  $s(\beta_1) = b(\alpha_1) = b(\alpha_2) = s(\beta_2)$ , donc  $s$  n'est pas injectif.

**COROLLAIRES :** Si  $s$  ou  $b$  est bijectif,  $G$  est isomorphe à  $G'$ ; si  $s$  (resp.  $b$ ) est bijectif,  $s'$  (resp.  $b'$ ) est bijectif.

**THÉORÈME :** Si le graphe  $G$  connexe est isomorphe à sa perspective  $G'$ ,  $s$  ou  $b$  est surjectif.

Si non il existe  $x, y \in S$  avec  $\bar{b}^1(x) = \bar{s}^1(y) = \emptyset$ .  $G$  étant connexe, il y a une chaîne  $\{z_i\}_{i=0,1,\dots,n}$  telle que  $x = z_0$  et  $y = z_n$ .

*Premier cas :* les sommets de cette chaîne sont tels que  $z_i \in b\bar{s}^1(z_{i-1})$

pour  $i = 1, 2, \dots, n$ . Posons  $z_i = b(\alpha_i)$  avec  $\alpha_i \in \bar{s}^1(z_{i-1})$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ . Quel que soit  $i$  dans  $\{1, 2, \dots, n-1\}$ ,  $b(\alpha_i) = z_i = s(\alpha_{i+1})$  entraîne  $(\alpha_i, \alpha_{i+1}) \in B$ . En outre, de  $\bar{b}^1 s(\alpha_1) = \bar{b}^1(x) = \emptyset$  et de  $\bar{s}^1 b(\alpha_n) = \bar{s}^1(y) = \emptyset$ , on tire  $\bar{b}^1(\alpha_1) = \bar{s}^1(\alpha_n) = \emptyset$ .  $G$  étant isomorphe à  $G'$ , les sommets  $x_1, \dots, x_n$  de  $G$ , homologues des sommets  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  de  $G'$ , constituent une chaîne de longueur  $(n-1)$  telle que  $\bar{b}^1(x^1) = \bar{s}^1(x_n) = \emptyset$ .

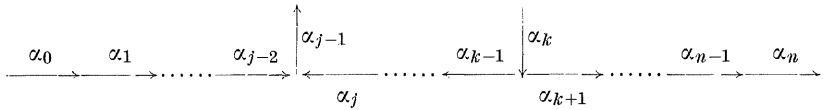
*Deuxième cas* : il existe  $i$  dans  $1, 2, \dots, n$  tel que  $z_i \in s\bar{b}^1(z_{i-1})$ . Soient  $j$  le plus petit et  $k$  le plus grand de ces indices. Comme  $\bar{b}^1(z_0) = \bar{s}^1(z_n) = \emptyset$ , on a  $0 < j-1 < k < n$  et, par définition de  $j$  et  $k$ ,  $z_{j-1} \in b\bar{s}^1(z_{j-2})$ ,  $z_{k+1} \in b\bar{s}^1(z_k)$ . Graphiquement, la situation est la suivante :

$$x = z_0 \rightarrow z_1 \dots z_{j-2} \rightarrow z_{j-1} \leftarrow z_j \dots z_{k-1} \leftarrow z_k \rightarrow z_{k+1} \dots z_{n-1} \rightarrow z_n = y.$$

Par isomorphisme, on aura dans  $G'$  :

$$\alpha_0 \rightarrow \alpha_1 \dots \alpha_{j-2} \rightarrow \alpha_{j-1} \leftarrow \alpha_j \dots \alpha_{k-1} \leftarrow \alpha_k \rightarrow \alpha_{k+1} \dots \alpha_{n-1} \rightarrow \alpha_n$$

avec  $\bar{b}^1(\alpha_0) = \bar{s}^1(\alpha_n) = \emptyset$ , ce qui montre que dans  $G$  les arcs  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  sont tels que :



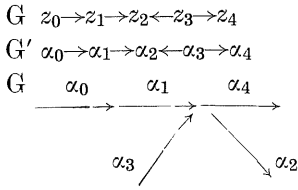
avec  $\bar{b}^1 s(\alpha_0) = \bar{s}^1 b(\alpha_n) = \emptyset$ . On obtient ainsi dans  $G$  une chaîne de longueur  $(n-1)$  au plus telle que  $s(\alpha_0)$  n'est pas but et  $b(\alpha_n)$  n'est pas source.

Dans les deux cas, de la chaîne  $\{z_i\}_{i=0,1,\dots,n}$  de longueur  $n$  où  $z_0$  est non but et  $z_n$  non source, je déduis une chaîne de longueur  $(n-1)$  au plus où une extrémité est non but et l'autre est non source. Par récurrence, j'obtiens dans  $G$  une chaîne de longueur nulle avec une extrémité non but et une extrémité non source, c'est-à-dire un point isolé. Or ceci est contradictoire avec la connexité de  $G$ .

Pour plus de clarté, je donne ici les derniers termes de cette récurrence.

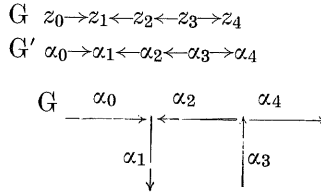


2<sup>e</sup> cas, a.



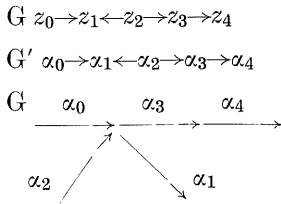
On passe au 1<sup>er</sup> cas, b.

2<sup>e</sup> cas, b.



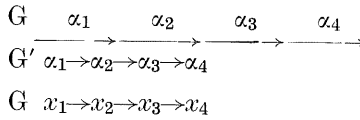
On passe au 2<sup>e</sup> cas, d.

2<sup>e</sup> cas, c.



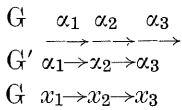
On passe en 1<sup>er</sup> cas, b.

1<sup>er</sup> cas, a.



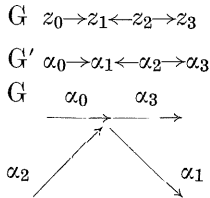
On passe au 1<sup>er</sup> cas, b.

1<sup>er</sup> cas, b.



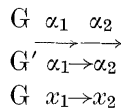
On passe au  
1<sup>er</sup> cas, c.

2<sup>e</sup> cas, d.



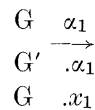
On passe au  
1<sup>er</sup> cas, c.

1<sup>er</sup> cas, c.



On passe au  
1<sup>er</sup> cas, d

1<sup>er</sup> cas, d



On obtient un  
point isolé

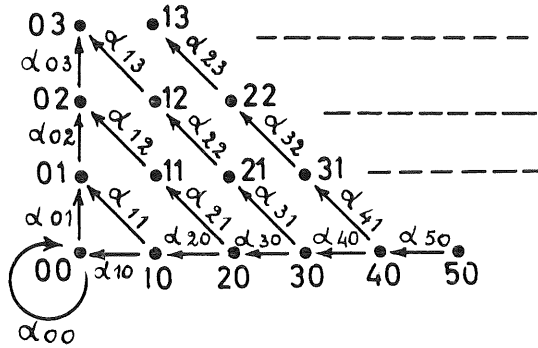
COROLLAIRE : *Un graphe connexe G ayant un nombre fini de sommets est isomorphe à sa perspective G' si et seulement si s ou b est bijectif.*

La condition suffisante a été vue. G étant connexe et isomorphe à G', s ou b est surjectif. Comme A et S sont des ensembles finis équipotents, s ou b est bijectif.

Les exemples qui suivent montrent que les théorèmes et corollaires précédents ne peuvent être renforcés.

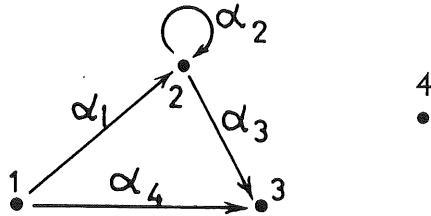
I.  $G$  connexe, isomorphe à  $G'$ ,  $S$  infini, ni  $s$  ni  $b$  bijectifs.

Pour l'isomorphisme, faire correspondre à  $ij$  l'arc  $\alpha_{ij}$ .



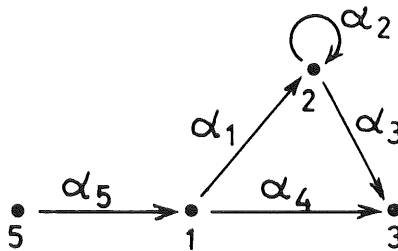
II.  $G$  non connexe, isomorphe à  $G'$ , ni  $s$  ni  $b$  surjectifs.

Pour l'isomorphisme, faire correspondre  $\alpha_i$  au sommet  $i$ .



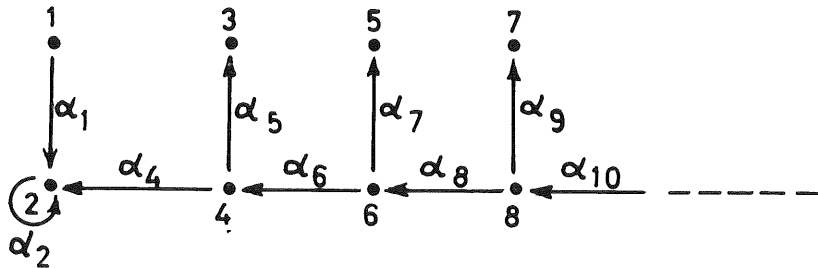
III.  $G$  connexe, image homomorphe de  $G'$ , ni  $s$  ni  $b$  surjectifs.

Pour l'homomorphisme, faire correspondre  $i$  à  $\alpha_i$  et 1 à  $\alpha_4$ .



IV.  $G'$ , image homomorphe de  $G$  connexe, ni  $s$  ni  $b$  surjectifs.

Pour l'homomorphisme, faire correspondre  $\alpha_i$  à  $i$  et  $\alpha_2$  à 3.



#### RÉFÉRENCES

- [1] C. BERGE, Théorie des Graphes et ses Applications, Dunod, 1958.
- [2] C. BERGE et A. GHOUILA-HOURI, Programmes, jeux et réseaux de transport, Dunod, 1962.
- [3] O. ORE, Theory of Graphs, A. M. S., 1962.
- [4] KAUFMANN et DESBAZEILLE, La méthode du chemin critique, Dunod, 1964.