Bull. Soc. Royale Sciences Liège, 33e année, n° 12, 1964, pp. 754-768

LES ESPACES DE SILVA

par R. MATAGNE
Assistant à l'Université de Liège

Introduction

Cet article est la suite de notre travail sur les espaces de SCHWARTZ [6]. Dans le présent article, nous donnons les résultats classiques qui se rapportent aux espaces de SILVA, les propriétés de son dual fort et des critères qui permettent de reconnaître si un espace E est de SILVA.

Dans nos articles consacrés aux espaces de SCHWARTZ et de SILVA, nous n'employons pas la méthode qui consiste à démontrer qu'un espace E possède une propriété en démontrant que l'espace dual possède la propriété duale, lorsque celle-ci nécessite l'usage de l'axiome de ZORN.

1. On appelle *espace de Silva* l'union d'une suite croissante d'espaces normés E_k munie des semi-normes des limites inductives, les espaces E_k étant tels que la boule centrée sur l'origine et de rayon 1 de l'un appartienne à un compact du suivant.

Il résulte de cette définition que la norme de E_{k+1} est plus faible que celle de E_k dans E_k, pour tout k. En effet, la boule B_k centrée sur l'origine et de rayon 1 de E_k appartenant à un compact de E_{k+1}, appartient à une boule λB_{k+1} de E_{k+1}. Par conséquent, B_{k+1} contient $1/\lambda\, B_k$ (*).

D'autre part, dire que la boule de E_k appartient à un compact de E_{k+1} signifie que l'opérateur identité I est compact de E_k dans E_{k+1}.

Il résulte également de cette définition qu'un *espace de Silva est séparable*. La boule B_k de E_k appartenant à un compact de E_{k+1} est précompacte dans E_{k+1}. Comme tout précompact d'un espace à s-n dénombrables est séparable, B_k est séparable dans E_{k+1}.

Présenté par H. Garnir, le 17 décembre 1964.

(*) Si l'on désigne par $\| \,\|_k$ la norme de E_k, on peut toujours supposer que, dans E_k, $\| \,\|_k \geqslant \| \,\|_{k+1}$, $\forall k$.

Si B_k possède cette propriété, E_k la possède également. Puisque E_k est séparable dans E_{k+1}, $\forall k$, l'espace E est séparable.

Énonçons d'abord une propriété des limites inductives qui nous servira dans la suite.

« *Soient* $\{E_k\}$ *et* $\{F_k\}$ *deux suites croissantes d'espaces linéaires à semi-normes tels que les semi-normes induites de l'un sur le précédent soient plus faibles que celles de ce dernier. Si l'espace* E_k *appartient à* F_{k+1} *et contient* F_k *et si les semi-normes de* E_k *sont plus fortes que celles de* F_{k+1} *et moins fortes que celles de* F_k *alors,*

— *les ensembles* $E = \cup E_k$ et $F = \cup F_k$ *possèdent les mêmes éléments,*

— *les semi-normes de limite inductive de* E *et de* F *sont équivalentes* ».

Nous appliquons directement ce résultat dans la proposition suivante.

2. *Dans la définition d'un espace de Silva* $E = \cup E_k$, *on peut supposer que les espaces* E_k *sont de* BANACH *et que la boule de* E_k *est compacte dans* E_{k+1}.

Désignons par B_k la boule centrée sur l'origine et de rayon 1 de E_k et par $\tilde{B}_k$ son adhérence dans E_{k+1}. Nous savons que $\tilde{B}_k$ est un compact de E_{k+1}.

D'après [2], p^o 53-4, l'enveloppe linéaire (*) $E_{\tilde{B}_k}$ de $\tilde{\tilde{B}}_k$ est un espace de BANACH appartenant à E_{k+1} et sa norme est plus forte que celle de E_{k+1}. D'autre part, puisque $B_k \subset \tilde{B}_k$, E_k appartient à $E_{\tilde{B}_k}$ et la norme de ce dernier est plus faible que celle de E_k. Finalement, puisque la boule de $E_{\tilde{B}_k}$ est $\tilde{B}_k$ et que ce dernier ensemble est compact dans E_{k+1}, il l'est également dans $E_{\tilde{B}_{k+1}}$ dont les semi-normes sont plus faibles que celles de E_{k+1}.

COROLLAIRE. — *On démontre facilement que si, quel que soit* k, $F \cap E_k$ *est un fermé de* E_k, *alors,* $F \cap E_{\tilde{B}_k}$ *est également fermé dans* $E_{\tilde{B}_k}$, *pour tout* k.

Soit f un élément de $E_{\tilde{B}_k}$ n'appartenant pas à F. Puisque $F \cap E_{k+1}$

(*) L'espace E_A, A étant un borné de E, est l'enveloppe linéaire de A munie de la norme : inf. $\{\lambda > 0, f \in \lambda A\}$. Cette norme est plus forte que les *s-n* naturelles de E et, si E est séparable, elle peut encore s'écrire :

$$\sup_{A^0} |< f.f' >|.$$

est fermé dans E_{k+1}, il existe une boule b_{k+1} (*) de cet espace telle que

$$(f + b_{k+1}) \cap F = \phi.$$

La norme de E_{k+1} étant plus faible que celle de $E_{\tilde{B}_k}$, il existe une boule b_k de ce dernier appartenant à $b_{k+1} \cap E_{\tilde{B}_k}$. Par conséquent,

$$(f + b_k) \cap F = \phi,$$

et $F \cap E_{\tilde{B}_k}$ est fermé dans $E_{\tilde{B}_k}$.

3. *Dans un espace de* Silva E, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble* F *soit fermé est que* $F \cap E_k$ *soit fermé dans* E_k, *quel que soit* k.

Démontrons d'abord la condition nécessaire.

Si F est fermé dans E, $F \cap E_k$ est fermé dans E_k muni des semi-normes induites par E et, par conséquent, fermé pour la norme de E_k, celle-ci étant plus forte que les semi-normes de E.

Démontrons maintenant la condition suffisante.

D'après la proposition 2 et son corollaire, on peut supposer que la boule de E_k est compacte dans E_{k+1}.

Désignons par f un élément n'appartenant pas à F. Soit p le plus petit entier tel que $f \in E_p$ et $F \cap E_p \neq \phi$. Démontrons qu'il existe une boule de E centrée en f et ne rencontrant pas F. Dans ce but, construisons une suite d'ensembles abs. convexes U_k, $k \geqslant p$, tels que

— $f + U_k$ soit disjoint de F, contienne une boule $f + b_k$ de E_k et soit compact dans E_{k+1},

— $U_k \subset U_{k+1}$.

Dans ce cas, l'enveloppe abs. convexe de $\bigcup\limits_{k \geqslant p} b_k$ est la boule demandée.

Passons maintenant à la construction des ensembles U_k.

Nous savons que $F \cap E_p$ est un fermé de E_p ne contenant pas f. Dès lors, il existe une boule b_p telle que $f + b_p$ ne rencontre pas F. De plus, $f + b_p$ est compact dans E_{p+1}. Posons $U_p = b_p$. Supposons la construction faite jusqu'à l'ensemble U_n et construisons l'ensemble U_{n+1}. Nous savons que l'ensemble $F \cap E_{n+1}$ est fermé dans E_{n+1} et qu'il est disjoint du compact $f + U_n$. Par conséquent, il

(*) Sauf mention explicite du contraire ou si une signification différente ressort du contexte, on désigne par b une semi-boule (ou une boule) centrée sur l'origine et par $f + b$ une semi-boule (ou une boule) centrée sur f.

existe une boule b_{n+1} de E_{n+1} telle que $(f + U_n + b_{n+1})$ ne rencontre pas F. Prenons pour U_{n+1} l'enveloppe abs. convexe de $U_n \cup b_{n+1}$. L'ensemble U_n étant compact dans E_{n+1}, l'est également dans E_{n+2} ; l'ensemble b_{n+1} est compact dans E_{n+2}. Par conséquent, U_{n+1} est un compact abs. convexe puisque enveloppe abs. convexe d'une union finie de compacts abs. convexes. Il est évident que U_{n+1} contient une boule de E_{n+1} ainsi que U_n. D'autre part,

$$U_{n+1} \subset U_n + b_{n+1}$$

donc finalement,

$$(f + U_{n+1}) \cap F = \phi.$$

4. *Dans un espace de* Silva, E, *un ensemble* F *est fermé si et seulement si il contient les limites de ses suites convergentes.*

Il est évident qu'un fermé contient les limites de ses suites convergentes. Passons à la démonstration de la réciproque.

Si F contient les limites de ses suites convergentes dans E, $F \cap E_k$ contient les limites de ses suites dans E_k, $\forall\, k$. Puisque E_k est normé, $F \cap E_k$ est fermé dans E_k. D'après la proposition 3., F est fermé dans E.

Voici une démonstration directe de cette propriété.

Soit f un élément de E n'appartenant pas à F. Puisque F contient les limites de ses suites convergentes, il existe une boule b_1 de E_1 telle que

$$(f + b_1) \cap F = \phi. \ (*)$$

(E_1 est en fait le premier espace auquel f appartient).

Démontrons maintenant qu'il existe une boule b_2 de E_2 telle que

$$(f + b_1 + b_2) \cap F = \phi.$$

Raisonnons par l'absurde. Si

$$\left(f + b_1 + \frac{1}{k} B_2\right) \cap F \neq \phi,$$

pour $k = 1, 2, \ldots$, B_2 étant la boule de rayon 1 de E_2, alors, il existe une suite $\{x_n\}$ telle que

$$x_k \in \left(f + b_1 + \frac{1}{k} B_2\right) \cap F.$$

Cette suite appartenant au compact $f + b_1 + B_2$ contient une sous-suite convergente $\{x'_n\}$. Soit x sa limite.

On sait que $x \in F$. D'autre part, vu la compacité de $f + b_1 + \frac{1}{k} B_2$, et du fait que ces ensembles forment une suite décroissante,

$$x \in f + b_1 + \frac{1}{k} B_2, \ \forall\, k.$$

Dès lors, $x \in f + b_1$. Ce qui est en contradiction avec la relation (*).
En continuant de la sorte, on construit une suite de boules b_n telle que

$$(f + b_1 + \dots + b_k) \cap \mathrm{F} = \phi, \forall\, k.$$

Par conséquent, $\langle \cup b_n \rangle$ est une boule de E telle que

$$(f + \langle \cup\, b_n \rangle) \cap \mathrm{F} = \phi.$$

5. *Dans un espace de* Silva, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble* F *soit fermé est que* $\mathrm{F} \cap \mathrm{B}$ *soit fermé dans* B, *pour tout borné* B.

La condition nécessaire est évidente.

Démontrons la condition suffisante.

Soit $\{f_n\}$ une suite appartenant à F et convergeant vers f dans E. La suite $\{f_n\}$ appartient à un borné fermé, soit B.

Puisque $\mathrm{F} \cap \mathrm{B}$ est fermé dans B fermé de E, $\mathrm{F} \cap \mathrm{B}$ est fermé dans E et $f \in \mathrm{F} \cap \mathrm{B} \subset \mathrm{F}$.

6. *Dans un espace de* Silva, *un ensemble est borné si et seulement si il appartient à l'un des* E_k *et y est borné.*

— Si un ensemble appartient à l'un des E_k et y est borné, il est borné dans E.

— Soit B un borné de E. Désignons par $b_n(n)$ la boule de centre 0 et de rayon n de E_n. Il suffit de démontrer que B appartient à l'un des $b_n(n)$. Raisonnons par l'absurde. Si B n'appartient pas à l'un des $b_n(n)$, il existe une suite x_n de B telle que $x_n \notin b_n(n)$ ou, ce qui revient au même, telle que $\frac{1}{n}\, x_n \notin b_n(1)$.

Nous savons que la suite $\left\{\frac{1}{n}\, x_n\right\} \not\subset b_1(1)$.

D'autre part, $\{x_1\} \cup \{\frac{1}{2}\, x_2\}$ étant fermé dans E_2 et $b_1(1)$ étant compact dans E_2, il existe une boule B_2 de E_2 telle que

$$(b_1(1) + \mathrm{B}_2) \cap (\{x_1\} \cup \{\tfrac{1}{2} x_2\}) = \phi.$$

Puisque $\left\{\frac{1}{n}\, x_n, n \geqslant 2\right\}$ n'appartient pas à $b_2(1)$ et que $b_2(1) \cap \mathrm{B}_2$ contient une boule β_2 de E_2, nous obtenons que

$$(b_1(1) + \beta_2) \cap \left\{\frac{1}{n}\, x_n\right\} = \phi.$$

En raisonnant de même et en posant $b_1(1) = \beta_1$, on construit une suite de boules $\beta_n \subset E_n$ telles que, $\forall\, k$,

$$(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_k) \cap \left\{\frac{1}{n}\, x_n\right\} = \phi.$$

Dès lors, $\langle \cup\, \beta_k \rangle$ est une boule b de E qui ne rencontre pas $\left\{\frac{1}{n}\, x_n\right\}$.

Si B est borné, la suite $\frac{1}{n}\, x_n$ doit tendre vers 0 dans E, ce qui est en contradiction avec l'existence de la boule b.

Remarquons que cette démonstration est indépendante de la proposition 3. De même que la proposition suivante.

7. *Dans un espace de* SILVA, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite converge est qu'elle appartienne à l'un des* E_k *et y converge.*

La condition suffisante est évidente.

Passons à la démonstration de la condition nécessaire. Si la suite $\{f_n\}$ converge vers un élément f dans E, cette suite est un ensemble borné. Par conséquent, elle appartient à l'un des E_k et y est bornée. Elle appartient donc à un compact de E_{k+1}. Dès lors, on peut en extraire une sous-suite convergeant dans E_{k+1} vers une limite qui ne peut être que f. On peut même affirmer que la suite $\{f_n\}$ converge vers f dans E_{k+1} (*).

(*) Cela résulte de la propriété suivante.

Soit T *un opérateur agissant de* E *dans* F.

Si, de toute suite $\{f_n\}$ *convergeant vers* f *dans un espace* E, *on peut extraire une sous-suite* $\{f'_n\}$ *telle que* Tf'_n *converge vers* Tf *dans un espace* F, *la suite* $\{Tf_n\}$ *converge vers* Tf *dans* F.

Raisonnons par l'absurde. Si la suite des Tf_n ne converge pas vers Tf dans F, il existe une semi-boule $b_p(Tf)$, centrée sur Tf, dans laquelle la suite ne finit pas par rester. Par conséquent, à tout k_N aussi grand que l'on veut, on peut associer Tf_{k_N} n'appartenant pas à $b_p\,(Tf)$.

Nous avons ainsi construit une suite $\{f_{k_N}\} \to f$ dans E. D'après l'hypothèse, cette suite doit contenir une sous-suite $\{f'_{k_N}\}$ telle que $T\, f'_{k_N}$ converge vers Tf dans F c'est-à-dire qui finit par pénétrer et par rester dans $b_p(Tf)$. Cela est absurde.

Si l'on prend pour T l'opérateur identité I, le théorème devient :

Si, de toute suite $\{f_n\}$ *convergeant vers* f *dans* E *muni d'un premier système de s-n, on peut extraire une sous-suite* $\{f'_n\}$ *convergeant vers* f *dans* E *muni d'un deuxième système de s-n, la suite* $\{f_n\}$ *converge vers* f *dans* E *muni du deuxième système de s-n.*

8. *Dans un espace de* SILVA, *un ensemble est compact si et seulement si il appartient à l'un des E_k et y est compact.*

Le « si » est évident. D'autre part, soit K un compact de E. Il est borné. Par conséquent, il appartient à une boule B_k de E_k, cette dernière appartenant à un compact de E_{k+1}. Il est donc compact dans E_{k+1}.

9. *Un espace de* SILVA *est un espace parfait.* Il est tonnelé comme limite inductive d'espaces tonnelés (*).

D'autre part, tout borné appartient à un compact. Soit B un borné. Nous savons que B appartient à l'un des E_k et y est borné. Donc, il appartient à une boule B_k de E_k qui, elle-même, appartient à un compact de E.

10. *Un espace de* SILVA *est complet.*

C'est une conséquence du fait que, dans un espace de SILVA, tout borné appartient à un compact.

11. *Soit* E *un espace de* SILVA. *Dans tout borné* B *de* E, *les semi-normes de* E *sont équivalentes à la norme d'un des* E_k.

On sait que les semi-normes de E sont plus faibles que celles de E_k. D'autre part, tout borné B appartenant à un compact de l'un des E_k, la norme de E_k doit être plus faible que les semi-normes de E (*).

12. *Un espace de* SILVA E *possède une suite fondamentale de bornés.* La famille fondamentale de bornés est

$$\{k\,B_k,\ k = 1,\ 2...\},$$

B_k était la boule centrée sur 0 et de rayon 1 de E_k.

13. *Un espace de* SILVA *métrisable* (*) *est de dimension finie.*

Supposons que l'espace de SILVA E est à *s-n* dénombrables. Dans ce cas, il est possible de construire la suite décroissante de semi-

(*) Un espace de SILVA est également bornologique comme limite inductive d'espaces bornologiques.

(*) *Si un ensemble* A *est compact pour un système de semi-normes donné ; dans* A, *toute autre système de semi-norme séparé est plus fort que celui-là.*

(*) On dit qu'un espace E est *métrisable* si ses semi-normes naturelles sont équivalentes à des semi-normes dénombrables.

boules $\{b_n(1/n)\}$. Nous savons également que toute suite construite en prenant successivement un élément dans chacun des $b_n(1/n)$ converge vers 0 dans E. Démontrons que l'une des boules $b_n(1/n)$ est précompacte dans E. Il suffit de prouver qu'elle est bornée. Raisonnons par l'absurde. Si aucune des boules n'est bornée. Il est toujours possible de trouver une suite $\{f_k^n\} \subset b_n(1/n)$ telle que

$$f_k^n \notin \mathrm{B}^k(k),$$

l'ensemble $\mathrm{B}^n(n)$ désignant la boule de rayon n de E_n.

Considérons maintenant la suite $\{f_k^k\}$. D'après sa construction, cette suite tend vers 0 dans E et n'est bornée dans aucun des E_k. Cela est absurde.

Passons maintenant à l'étude de l'espace dual d'un espace de Silva.

14. *Soit* $\mathrm{E} = \cup\, \mathrm{E}_i$ *un espace de* Silva. *Le dual fort* E'_b *de* E « *coïncide* » *avec l'espace dual de* Silva $\{(\mathrm{E}'_i)_b,\ \mathrm{T}_{i+1,i}\}$, *l'opérateur* $\mathrm{T}_{i+1,i}$ *agissant de* $(\mathrm{E}'_{i+1})_b$ *dans* $(\mathrm{E}'_i)_b$ *étant défini par*

$$\langle f,\, \mathrm{T}_{i+1,i} f'_{i+1}\rangle = \langle f,\, f'_{i+1}\rangle,\ \ \forall\, f'_{i+1} \in \mathrm{E}'_{i+1}$$

et $\forall\, f \in \mathrm{E}_i$.

Nous savons qu'une fonctionnelle linéaire définie dans une limite inductive $\mathrm{E} = \cup\, \mathrm{E}_i$ est bornée si et seulement si elle est bornée dans chacun des E_i. Par conséquent, à tout élément f' de E', on peut associer un élément de $\prod_{i=1}^{\infty} \mathrm{E}'_i$ à savoir

$$(f'_1, \dots, f'_i, \dots),$$

avec $\langle f, f'_i\rangle = \langle f, f'\rangle$, $\forall\, f \in \mathrm{E}_i$. Il s'en suit donc que $\mathrm{T}_{i+1,i} f'_{i+1} = f'_i$.

Réciproquement, à tout élément du produit tel que $f'_i = f'_{i+1}$ dans E_i, $\forall\, i$, c'est-à-dire tel que $\mathrm{T}_{i+1,i} f'_{i+1} = f'_i$, $\forall\, i$, on peut associer un élément f' de E' défini par

$$\langle f, f'\rangle = \langle f, f'_i\rangle, \text{ si } f \in \mathrm{E}_i.$$

Il est évident que la correspondance entre E' et l'ensemble

$$\Big\{f' \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathrm{E}'_i,\ \ f'_i = \mathrm{T}_{i+1,i} f'_{i+1},\ \forall\, i\Big\}$$

est linéaire et biunivoque.

Si l'on muni E' et E'_i des *s-n* uniformes sur les bornés, nous obtenons que

$$\sup_{B} |\langle f, f' \rangle| = \sup_{B} |\langle f, f'_i \rangle|, \text{ si } B \subset E_i,$$

et que

$$\sup_{i=1,\dots,n} \sup_{B_i} |\langle f, f'_i \rangle| = \sup_{\bigcup_{i=1}^{n} B_i} |\langle f, f' \rangle|.$$

Si I est l'opérateur identité agissant de E_i dans E_{i+1}, nous savons qu'il est compact. Par conséquent, son adjoint, qui n'est rien d'autre que $T_{i+1,i}$ agissant de $(E_{i+1})'_b$ dans $(E_i)'_b$ est également un opérateur compact.

De plus, l'opérateur $T_{i+1,i}$ agit de $(E'_{i+1})_b$ sur $(E'_i)_b$ car, E étant séparable, on peut prolonger les fonctionnelles linéaires bornées de E_i en des fonctionnelles linéaires bornées de E_{i+1}.

Corollaire. — *Le dual fort d'un espace de* Silva *est à s-n dénombrables, séparable, complet et parfait.*

Donnons maintenant quelques critères permettant de reconnaître si un espace E est de Silva.

15. *Un espace* E *est de* Silva *si et seulement si*

a. E *est bornologique,*

b. E *possède une suite fondamentale croissante de bornés,*

c. *A tout borné* A *de* E, *on peut associer un borné absolument convexe fermé* B *contenant* A *tel que* A *appartienne à un compact de* E_B (*).

La condition nécessaire résulte des propositions 9, 9(*), 12 et 11. Passons à la démonstration de la condition suffisante.

L'espace E vérifiant la condition *c* et possédant une suite fondamentale $\{B_k\}$ de bornés, il est possible de construire une suite fondamentale de bornés B_{k_i} tels que

$$B_{k_i} \text{ soit compact dans } E_{B_{k_{i+1}}}.$$

(*) La condition *c* est équivalente à la condition suivante :

d. — *Dans* E, *tout borné appartient à un compact.*

— *A tout borné* A *de* E, *on peut associer un borné absolument convexe fermé* B *contenant* A *tel que, dans* A, *les semi-normes naturelles soient équivalentes à la norme de* E_B.

D'abord, si $\{B_k\}$ est une suite fondamentale de bornés, la suite dont les éléments sont les enveloppes abs. convexes fermées des B_k est encore une suite fondamentale de bornés. Nous les désignons toujours par B_k, avec B_k absolument convexe fermé.

Soit B_{k_1} un élément de la suite. Nous savons qu'il existe un borné absolument convexe fermé $B'_1 \supset B_{k_1}$ tel que B_{k_1} soit compact dans $E_{B'_1}$.

D'autre part, puisque B'_1 est borné, il appartient à l'un des B_{k_i} de la suite, soit B_{k_2}. Nous obtenons que

$$B_{k_1} \subset B'_1 \subset B_{k_2},$$

par conséquent

$$E_{B_{k+1}} \subset E_{B'_1} \subset E_{B_{k_2}}.$$

Puisque la norme de $E_{B_{k_2}}$ est plus faible que celle de $E_{B'_1}$, B_{k_1} est compact dans $E_{B_{k_2}}$

En continuant de même, on construit la suite annoncée.

Posons $\tilde{E} = \cup E_{B_{k_i}}$. Muni des semi-normes des limites inductives, $\tilde{E}$ est un espace de SILVA.

Il est édivent que, du point de vue des éléments, $E = \tilde{E}$.

D'autre part, les espaces E et $\tilde{E}$ étant bornologiques et possédant les mêmes bornés, leurs semi-normes sont équivalentes (*). Il en résulte que E est un espace de SILVA.

16. *Un espace* E *est un espace de* SILVA *si et seulement si*

a. E *est séparable,*

b. E *est un espace du type* (DF), (*).

c. A *tout borné* A *de* E, *on peut associer un borné absolument convexe fermé* B *contenant* A *tel que* A *appartienne à un compact de* E_B,

d. E'_b *est séparable.*

(*) *Si un espace* E *est muni de deux systèmes de semi-normes tels que, pour chacun d'eux :*

— E *est bornologique,*

— E *possède les mêmes bornés,*

ces deux systèmes sont équivalents.

Si E possède les mêmes bornés pour chaque système de semi-normes, une semi-boule de l'un quelconque des systèmes absorbant les bornés pour ce système absorbe les bornés pour l'autre.

L'autre système rendant E bornologique, une semi-boule de l'un contient une semi-boule de l'autre.

(*) Pour tout ce qui concerne les espaces du type (DF) consultez [1].

La condition nécessaire est évidente. Démontrons la condition suffisante. D'après la condition c, tout borné est métrisable. Un espace du type DF dans lequel tout borné est métrisable et quasi-tonnelé. L'espace E étant séparable quasi-tonnelé et semi-réflexif, (tout borné fermé est compact d'après c), il « coïncide » avec $(E'_b)'_b$. De là, $(E'_b)'_b$ est quasi-tonnelé. Puisque E'_b est séparable et à *s-n* dénombrables, $(E'_b)'_b$ quasi-tonnelé entraîne $(E'_b)'_b$ bornologique. Ainsi E est bornologique.

On est ainsi ramené au critère précédent.

17. *Le dual fort d'un espace de* SCHWARTZ DE FRÉCHET *est un espace de* SILVA.

Un espace de SCHWARTZ DE FRÉCHET étant séparable et à *s-n* dénombrables, E'_s est séparable. Si E et E'_s sont séparables, E parfait $\rightarrow E'_b$ parfait. Par conséquent,

— dans E'_b, tout borné appartient à un compact,

— E'_b est tonnelé.

Puisque E est à *s-n* dénombrables et séparable, E'_b tonnelé $\Leftrightarrow E'_b$ bornologique.

La suite $\left\{\left(b_k\left(\frac{1}{k}\right)\right)^0\right\}$ est une suite fondamentale croissante d'équibornés.

D'autre part, à tout équiborné A' de E', on peut associer une semi-boule b de E centrée sur l'origine telle que dans A', la norme de $> b^0 <$ soit équivalente aux semi-normes uniformes sur les bornés. De plus, $b^0 \supset A'$.

Puisque, dans E, b-borné entraîne équiborné, cette dernière propriété peut encore s'écrire sous la forme suivante :

A tout borné A' de E'_b, on peut associer un borné absolument convexe fermé b^0 contenant A' tel que, dans A', les semi-normes naturelles soient équivalentes à la norme de $E'_b{}^0$.

Toutes les conditions de critère 15 sont donc réalisées.

18. *Le dual fort d'un espace de* SILVA « coïncide » avec *un espace de* SCHWARTZ DE FRÉCHET.

Cela résulte de la propositions 14.

19. *Un espace de* SCHWARTZ DE FRÉCHET « *coïncide* » *avec un espace dual de* SILVA $\{E_k, T_{k+1,k}\}$ *dont les* E_k *sont de* BANACH.

Soit E un espace de SCHWARTZ DE FRÉCHET. Il coïncide avec $(E'_b)'_b$.

D'après la proposition 17, E'_b est un espace de SILVA. Par conséquent, $(E'_b)'_b$ est un espace dual de SILVA. dont les E_k sont de BANACH (proposition 14).

20. *Un espace de Silva « coïncide » avec le dual fort d'un espace de* SCHWARTZ DE FRÉCHET.

En effet, E « coïncide » avec $(E'_b)'_b$.

21. *Une limite inductive stricte d'espaces de* SILVA *est un espace de* SILVA.

Toutes les conditions du critère 15 sont trivialement satisfaites.

COMPLÉMENTS SUR LES ESPACES DE SCHWARTZ

1. *Une limite inductive généralisée d'espaces de* SCHWARTZ *est un espace de* SCHWARTZ.

Soit $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ la limite inductive généralisée des espaces de SCHWARTZ E_n. Si b est une semi-boule de E, centrée sur l'origine, l'ensemble $b \cap E_n$ contient une semi-boule b_n de E_n, centrée sur l'origine. Puisque E_n est un espace de SCHWARTZ, à la semi-boule b_n, on peut associer la semi-boule b'_n également centrée sur l'origine et telle que

— $b'_n \subset b_n \subset b \cap E_n$ (*)

— $b'_n \subset \frac{\alpha}{2} b_n + F_n^{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \subset \frac{\alpha}{2}(b \cap E_n) + F_n^{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$, $\forall \alpha > 0$, $F_n^{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ étant une union finie d'éléments de E_n.

Considérons la semi-boule b' de E définie par

$$b' = < \bigcup_{n=1}^{\infty} \lambda_n b'_n >, \; 0 < \lambda_n \leqslant 1, \; \{\lambda_n\} \to 0.$$

Cette semi-boule est contenue dans l'ensemble abs. convexe

$$\frac{\alpha}{2} b + < \bigcup_{\{n, \lambda_n > \frac{\alpha}{2}\}} F_n^{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} >.$$

(*) On dit qu'un espace est de SCHWARTZ si, à toute semi-boule b centrée sur l'origine, on peut associer une semi-boule b' qui est centrée sur l'origine et qui est précompacte pour la semi-boule b.

Dans cette définition, on peut toujours supposer que $b' \subset b$. Il suffit de remplacer b' par la semi-boule contenue dans $b \cap b'$.

De fait,

— si $\lambda_n \leqslant \frac{\alpha}{2}$,

$$\lambda_n\, b'_n \subset \frac{\alpha}{2}\, b \cap \mathrm{E}_n \subset \frac{\alpha}{2}\, b \subset \frac{\alpha}{2}\, b + < \bigcup_{\{n, \lambda_n > \frac{\alpha}{2}\}} \mathrm{F}_n^{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} >,$$

— si $\lambda_n > \frac{\alpha}{2}$, puisque $\lambda_n < 1$,

$$\lambda_n\, b'_n \subset \frac{\alpha}{2}\,(b \cap \mathrm{E}_n) + \mathrm{F}_n^{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \subset \frac{\alpha}{2}\, b + < \bigcup_{\{n, \lambda_n > \frac{\alpha}{2}\}} \mathrm{F}_n^{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} >.$$

Les nombres λ_n supérieurs à $\frac{\alpha}{2}$ étant en nombre fini, l'ensemble $< \bigcup_{\{n, \lambda_n > \frac{\alpha}{2}\}} \mathrm{F}_n^{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} >$ est l'enveloppe abs-convexe d'une union finie d'éléments de E. Par conséquent, cet ensemble est un précompact de E et

$$< \bigcup_{\{n, \lambda_n > \frac{\alpha}{2}\}} \mathrm{F}_n^{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} > \subset \frac{\alpha}{2}\, b + \mathscr{F}^{(\alpha)},$$

$\mathscr{F}^{(\alpha)}$ étant une union finie d'éléments de E.

Finalement, nous obtenons que

$$b' \subset \frac{\alpha}{2}\, b + \frac{\alpha}{2}\, b + \mathscr{F}^{(\alpha)} \subset \alpha b + \mathscr{F}^{(\alpha)}, \ \forall \alpha > 0.$$

Ce qui revient à dire que b' est précompacte pour la semi-boule b.

2. *Désignons par* $\mathrm{E}_{\text{aff.}}$ *l'espace* E *muni des semi-normes affaiblies. Dès lors, quel que soit l'espace* E *linéaire à semi-normes,* $\mathrm{E}_{\text{aff.}}$ *est un espace de* SCHWARTZ.

Nous devons démontrer qu'à toute semi-boule faible

$$b(f'_1, \ldots, f'_n\,;\, \varepsilon) = \{f : \left| < f, f'_i > \right| \leqslant \varepsilon,\ i = 1, \ldots, n\}$$

on peut associer une semi-boule faible $b(g'_1, \ldots, g'_n\,;\, \varepsilon')$ qui est précompacte pour la première.

Dans ce cas, il suffit de prendre $b(g'_1,\dots g'_n ; \varepsilon') = b(f'_1,\dots f'_n, \varepsilon)$.

Considérons l'ensemble de C^n défini par

$$\{(\langle f, f'_1\rangle,\dots, \langle f, f'_n\rangle),\ f \in b(f'_1,\dots, f'_n ; \varepsilon)\}.$$

Cet ensemble est un borné de l'espace C^n normé par $\|(x_1,\dots, x_n)\| = \sup_{i=1,\dots,n} |x_i|$. Par conséquent, on peut toujours le recouvrir par un nombre fini de boules de C^n de diamètre plus petit ou égal à α. Désignons les par B_i^α, $i = 1,\dots, n_\alpha$. Alors, si l'on pose

$$A_i^\alpha = \{ f,\ (\langle f, f'_1\rangle,\dots, \langle f, f'_n\rangle) \in B_i^\alpha\},$$

$$b(f'_1,\dots, f'_n ; \varepsilon) \subset \bigcup_{i=1}^{n_\alpha} A_i^\alpha.$$

L'élément f_i^α étant fixé dans A_i^α, nous obtenons que

$$b(f'_1,\dots f'_n ; \varepsilon) \subset \bigcup_{i=1}^{n_\alpha} (f_i^\alpha + b(f'_1,\dots, f'_n ; \alpha)),\ \forall\alpha > 0.$$

En effet, si f et g appartiennent à A_i^α, nous savons que

$$\sup_{i=1,\dots,n} |\langle f\text{-}g, f'_i\rangle| \leqslant \alpha.$$

COROLLAIRE. — *Tout borné faible est un précompact faible.*

3. *Le dual simple* E'_s *d'un espace linéaire à semi-normes est un espace de* SCHWARTZ.

La démonstraction est identique à celle de la proposition 2.

COROLLAIRE. — *Tout borné simple est un précompact simple.*

4. *Le dual fort d'un espace à semi-normes dénombrables séparable et parfait est un espace de* SCHWARTZ.

Nous savons que E'_b est encore un espace parfait séparable.

D'autre part, puisque $(E'_b)'_b$ coincide avec E, le dual fort de E'_b est à semi-normes dénombrables. En vertu de la proposition 7 de [6], E'_b est un espace de SCHWARTZ. Lorsque le dual fort d'un espace est à semi-normes dénombrables et quasi-tonnelé, la condition *a* de la proposition 7 est vérifiée.

Nous tenons à remercier Monsieur le Professeur GARNIR ainsi que Monsieur SCHMETS qui se sont intéressés à ce travail.

BIBLOGRAPHIE

[1] A. GROTHENDIECK, Sur les espaces (F) et (DF). *Summa Brasiliensis Mathematicae*, Vol. 3, Fasc. 6. Rio De Janeiro, 1954.

[2] H-G. GARNIR-J. SCHMETS-M. DE WILDE, Espaces linéaires semi-normés I. *Université de Liège. Séminaires d'Analyse Mathématique et d'Algèbre.*

[3] G. KÖTHE, Topologische Lineare Räume I. *Springer-Verlag*, 1960.

[4] J. S. E. SILVA, Su certe classi di spazi localmente convessi important. per le applicazioni. *Università di Roma. Rendiconti di Matematica*, 1955i

[5] K. YOSHINAGA, On a locally convex space introduced by J. S. E. SILVA. *Journal of Science of the Hiroshima University*. Sér. A, Vol. 21, N° 2, July, 1957.

[6] R. MATAGNE, Les espaces de SCHWARTZ, ce *Bull.* 1964, p. 650-665.