Bull. Soc. Royale Sciences Liège, 33e année, n° 9-10, 1964, pp. 540-557

OSCILLATIONS EN MODES NORMAUX DE SYSTÈMES DYNAMIQUES NON LINÉAIRES A PLUSIEURS DEGRÉS DE LIBERTÉ

par J. MAWHIN
Université de Liège
Institut d'Astrophysique

RÉSUMÉ

Le présent article rappelle les fondements des travaux de R. M. Rosenberg concernant la généralisation de la notion de mode normal de vibration dans les systèmes conservatifs à plusieurs degrés de liberté. Il propose en outre une méthode nouvelle de détermination d'une classe particulière de modes normaux.

1. Introduction

Le concept de vibration en mode normal pour un système dynamique linéaire à n degrés de liberté est bien connu depuis Lagrange et s'identifie avec les solutions fondamentales du système d'équations différentielles de Newton. Ces solutions possèdent la propriété essentielle de constituer une base de l'espace vectoriel des solutions du système différentiel.

Lorsque l'on passe à des systèmes dynamiques non linéaires, les méthodes de l'algèbre linéaire deviennent inopérantes. Pourtant, il est remarquable que certaines solutions de tels systèmes présentent, en ce qui concerne l'aspect qualitatif du mouvement, de nombreuses similitudes avec l'oscillation en mode normal d'un système dynamique linéaire, étant bien entendu toutefois que le principe de superposition n'est plus valable.

Cette situation a conduit R. M. Rosenberg à adopter, pour le concept d'oscillation en mode normal d'un système dynamique, une nouvelle définition qui, d'une part permet de retrouver univoque-

Présenté par P. Ledoux, le 15 octobre 1964.

ment les solutions normales classiques d'un système linéaire et, d'autre part, caractérise les mouvements particuliers, dont il a été question plus haut, de systèmes non linéaires. Les premières recherches relatives à ces trajectoires remontent aux mémoires de G. Bradistilov [1, 2] qui datent de 1939, de Th. Pöschl [3, 5] et de C. Schmieden [4]. Mais il faut attendre les travaux de R. M. Rosenberg et de son équipe [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15] pour reconnaître que les trajectoires particulières considérées rendaient bien, dans le cas de systèmes linéaires, les modes normaux habituels et pour obtenir une définition claire et une étude approfondie du concept.

2. Définition des systèmes dynamiques considérés

Le modèle mécanique suivant donne une représentation physique du système dynamique le plus général introduit par Rosenberg [9]. Il s'agit de n masses ponctuelles m_i, $m_i \in]0, \infty]$, possédant chacune un seul degré de liberté de translation dans une même direction et reliées entre elles et éventuellement à un support fixe (masse infinie) par des ressorts. Ceux-ci exercent des forces de rappel fonctions linéaires ou non des déformations des ressorts. On postule que ce système possède une position d'équilibre stable à partir de laquelle on mesurera le déplacement u_i de chacune des masses. Au lieu des u_i, on introduira en général un nouveau système de coordonnées généralisées x_i définies par les relations

$$x_i = \sqrt{m_i}\, u_i$$

et caractérisant le *pseudo-système* pour lequel l'énergie cinétique T prend une forme plus simple :

$$2\,\mathrm{T} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{u}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i^2 \qquad \left(\dot{x} = \frac{dx}{dt}\right)$$

Si on suppose que les forces de rappel des ressorts s'expriment par des fonctions analytiques et impaires de la déformation des ressorts, représentées avec une approximation suffisante par un développement limité en série de Taylor

$$\mathrm{F}_{ij}(u_i - u_j) = \mathrm{F}_{ij}\left(\frac{x_i}{\sqrt{m_i}} - \frac{x_j}{\sqrt{m_j}}\right) = \sum_{m=1,3\ldots}^{r_{ij}} a_{ij}^{(m)}(u_i - u_j)^m$$

avec (Principe d'égalité d'action et de réaction), $a_{ij}^{(m)} = a_{ji}^{(m)}$, on a la

Définition 1. — *Le pseudo-système, désigné par* S_n, *est un système dynamique à* n *degrés de liberté, de coordonnées généralisées* $x_1, \ldots, x_n$, *d'énergie cinétique*

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i^2 \tag{1}$$

et de fonction de forces

$$U(x_1, \ldots, x_n) = - \sum_{i} \sum_{j=i+1}^{n} \sum_{m=1, 3, \ldots}^{r_{ij}} \frac{a_{ij}^{(m)}}{m+1} \left(\frac{x_i}{\sqrt{m_i}} - \frac{x_j}{\sqrt{m_j}} \right)^{m+1} \tag{2}$$

où les $a_{ij}^{(m)}$ *sont tels que* U *soit défini négatif. La sommation sur l'indice* i *s'étendra de* 1 *à* n *ou de* 0 *à* n *avec dans ce cas la convention* $x_0 = 0$.

Ce dernier point distingue entre les systèmes mécaniques reliés ou non à un point fixe.

L'espace de configuration correspondant, de métrique

$$ds^2 = 2T dt^2 = \sum_{i=1}^{n} dx_i^2 \tag{3}$$

est euclidien, rapporté à des coordonnées cartésiennes et désigné par E_n.

Signalons sans entrer dans le détail que le problème des modes normaux a été considéré pour des systèmes plus généraux [14].

3. L'intégrale d'énergie et ses conséquences

Le système S_n étant conservatif et scléronome, il possède l'intégrale première d'énergie

$$T - U(x_1, \ldots, x_n) = U_0 \ (U_0, \text{ énergie totale}).$$

Dans E_n, le lieu des états d'énergie cinétique nulle est donné par l'équation

$$U(x_1, \ldots, x_n) + U_0 = 0$$

qui représente une variété à n-1 dimensions fermée S sur laquelle Rosenberg fait les hypothèses suivantes [9] :

1. L'intérieur de S est un ensemble simplement connexe.
2. S est étoilée sur l'origine 0 des coordonnées dans E_n.

Des hypothèses faites sur U et sur S résultent les théorèmes suivants dont on pourra trouver la démonstration dans [9] :

Théorème I. — *L'hypersurface* $U + U_0 = 0$ *est symétrique par rapport à l'origine des coordonnées.*

Théorème II : Lemme. — *Si* S *jouit des propriétés* 1 *et* 2 *ci-dessus, l'expression* $U + U_0$ *possède à l'intérieur de* S *un signe constant.*

Théorème. — *Toute trajectoire de* S_n *se trouve dans le domaine fermé de* E_n *limité par* S.

Pour cette raison, S porte le nom de *surface-frontière.*

Une autre conséquence fondamentale du caractère conservatif du système S_n est que la trajectoire géométrique du point représentatif dans E_n peut se déduire immédiatement du Principe de MAUPERTUIS écrit sous la forme de JACOBI : les trajectoires de S_n sont les extrémales de l'intégrale

$$\int_{s_0}^{s_1} \sqrt{U + U_0}\, ds$$

où ds est défini par (3), c'est-à-dire les géodésiques de l'espace de RIEMANN R_n de métrique

$$d\sigma^2 = (U + U_0) \sum_{i=1}^{n} dx_i^2$$

Les équations différentielles de la trajectoire sont donc les équations d'EULER-LAGRANGE de ce problème variationnel qui, en choisissant x_1 comme variable indépendante et en utilisant l'intégrale d'énergie, s'écrivent finalement [15] :

$$2(U + U_0)x_i'' + \left(\sum_{j=1}^{n} x_j'^2\right)\left(x_i' \left|\frac{\partial U}{\partial x_1}\right| - \frac{\partial U}{\partial x_i}\right) = 0 \quad \left(x_i' = \frac{dx_i}{dx_1}\right)$$
$$(i = 2, 3, \ldots, n) \qquad (4)$$

De ces équations et des propriétés de U, on peut encore déduire les théorèmes suivants [9, 16].

Théorème III. — *Toute trajectoire du pseudo-système* S_n *qui atteint réellement la surface-frontière* S *lui est orthogonale.*

Une telle trajectoire est dite *mixte* dans la nomenclature de PAINLEVE.

Théorème IV. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite de* E_n *soit trajectoire du système* S_n *est qu'elle soit trajectoire orthogonale de la famille des variétés équipotentielles* S_h *d'équation*

$$U + h = 0 \text{ où } h \in [0, U_0]$$

Ce sera dès lors une trajectoire *remarquable* au sens de PAINLEVE.

Corollaire. — *Toute droite trajectoire du système* S_n *passe par l'origine des coordonnées dans* E_n.

Théorème V. — *Si une courbe de* E_n *est solution du système d'équations différentielles* (4), *sa symétrique par rapport à l'origine des coordonnées est également solution de ce système d'équations différentielles.*

Ce théorème se déduit de (4) en utilisant les relations

$$U(-x_1,\ldots,-x_n) = U(x_1,\ldots,x_n) \text{ et } \frac{\partial U}{\partial x_i}(-x_1,\ldots,-x_n) = -\frac{\partial U}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_n)$$

Corollaire. — *Toute solution du système d'équations* (4) *qui passe par l'origine des coordonnées est symétrique par rapport à cette origine.*

4. Les oscillations suivant un mode normal

Le système S_n étant conservatif, son étude par les Principes variationnels de la Mécanique analytique peut se faire ou bien à partir du Principe de HAMILTON qui rend les équations de NEWTON

$$\ddot{x}_i = \frac{\partial U}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

ou bien à partir de la forme de JACOBI du Principe de MAUPERTUIS qui fournit les équations différentielles (4).

Il est intéressant de noter, avec ROSENBERG [12, 15] que le fait pour le système S_n d'être linéaire simplifie considérablement l'étude des équations (5) mais n'a aucun effet sur les équations (4) qui restent intrinsèquement non linéaires. D'autre part, pour un système linéaire, c'est-à-dire de fonction de forces

$$U(x_1,\ldots, x_n) = -\sum_i \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}^{(1)}}{2}\left(\frac{x_i}{\sqrt{m_i}} - \frac{x_j}{\sqrt{m_j}}\right)^2 \tag{6}$$

on sait que les solutions normales de (5) sont du type

$$x_i = C_i \cos(\omega t + \delta) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

c'est-à-dire sont des fonctions harmoniques de t auxquelles correspondent, pour les équations (4), la solution

$$\frac{x_1}{C_1} = \frac{x_2}{C_2} = \ldots = \frac{x_n}{C_n}$$

Celle-ci représente dans E_n la courbe la plus simple qui soit, une droite passant par l'origine. On est donc amené à penser que l'étude des oscillations suivant un mode normal est peut-être plus simple à partir des équations différentielles (4).

D'un autre point de vue, on peut, avec ROSENBERG [8, 12, 15], rechercher ce qui caractérise physiquement le mouvement d'un système vibratoire linéaire suivant un mode normal. On remarque que, dans un tel mouvement, les éléments mobiles :

1. effectuent un mouvement périodique de même période ;

2. passent simultanément par leur position d'équilibre ;

3. atteignent aux mêmes instants leurs positions de déplacement maximum et que,

4. le mouvement de tous les éléments est univoquement déterminé à tout instant par celui de l'un quelconque d'entre eux.

Traduites mathématiquement, ces caractéristiques imposent à la trajectoire dans E_n, comme on le vérifie aisément, certaines exigences ; celles-ci permettent d'introduire, pour le mouvement suivant un mode normal d'un système S_n, la définition ci-dessous, car on vérifiera que cette définition et ses conséquences, appliquées aux systèmes linéaires, conduisent et conduisent seulement aux vibrations normales au sens classique.

Définition II. — Un système dynamique S_n *possède un mode normal de vibration s'il possède une solution telle que*

1. *la trajectoire du point représentatif de* S_n *dans* E_n *soit définie par les* n-1 *relations*

$$x_i = x_i(x_r) \quad (i = 1, \ldots, r-1, r+1, \ldots, n) \tag{7}$$

x_r *étant l'une quelconque des coordonnées généralisées* (x_1 *par exemple*), *où*

a) *les fonctions* $x_i(x_r)$ *sont des fonctions uniformes et strictement monotones de* x_r *à l'intérieur de et sur* S ;

b) *les fonctions* $x_i(x_r)$ *sont telles que* $x_i(0) = 0$;

2. *la fonction* $x_r = x_r(t)$ *est une fonction périodique de* t *s'annulant pour une valeur de* t [16].

Signalons qu'on peut donner d'autres formes équivalentes à cette définition [8, 9, 15].

La trajectoire dans E_n du mouvement de S_n suivant un mode normal est dite *ligne modale* et possède, en vertu de la définition II et des théorèmes III et V les propriétés suivantes [9, 16] :

1. elle passe par l'origine des coordonnées ;

2. elle est symétrique par rapport à l'origine des coordonnées ;

3. elle atteint réellement la surface-frontière S et la coupe orthogonalement.

C'est donc, dans la classification de Painleve, une trajectoire mixte possédant deux points d'arrêt.

Du point de vue cinématique, le point représentatif effectue un mouvement de va-et-vient sur la ligne modale.

Une fois la ligne modale déterminée, la dépendance temporelle de x_r s'obtient par quadrature à partir de l'équation différentielle

$$\ddot{x}_r = \frac{\partial U}{\partial x_r}[x_1(x_r),\ldots,\, x_r,\ldots,x_n(x_r)]$$

où chaque $x_i \neq x_r$ est remplacé par la fonction correspondante dans (5). Comme x_r est l'une quelconque des coordonnées, on voit que la connaissance de la ligne modale permet de *découpler* le système d'équations différentielles de Newton, c'est-à-dire le ramener à la forme

$$\ddot{x}_i + F_i(x_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

5. Oscillations en modes normaux semblables

L'objet de cette section est de rechercher s'il existe, dans l'ensemble des systèmes S_n, des systèmes particuliers possédant une ou plusieurs lignes modales droites, soit d'équations

$$\frac{x_1}{C_1} = \frac{x_2}{C_2} = \ldots = \frac{x_n}{C_n} \tag{8}$$

Dans l'affirmative, nous dirons avec ROSENBERG [11, 12] que le système en question possède un ou plusieurs modes normaux *semblables*. De tels systèmes ont été étudiés par différentes méthodes [6, 7, 8, 9, 14]. Celle que nous développons dans cette section présente l'avantage, outre son caractère immédiat, de s'appliquer uniformément à de nombreux systèmes admettant des modes normaux semblables [16].

Les équations de NEWTON du système S_n le plus général s'écrivent

$$\ddot{x}_i = -\sum_j \sum_{m=1,3,\ldots}^{r_{ij}} \frac{a_{ij}^{(m)}}{\sqrt{m_i}} \left(\frac{x_i}{\sqrt{m_i}} - \frac{x_j}{\sqrt{m_j}} \right)^m \quad (i = 1, \ldots, n) \quad (9)$$

où la sommation sur j s'étend de 1 à n ou de 0 à n (avec alors $x_0 = 0$). Posons

$$R = \max_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=0 \text{ ou } 1,\ldots,n}} r_{ij}$$

Si l'on adopte la convention $a_{ij}^{(m)} = 0$ pour $R \geqslant m > r_{ij}$, les équations (9) peuvent s'écrire, en intervertissant les signes somme :

$$\ddot{x}_i = -\sum_{m=1,3,\ldots}^{R} \sum_{j=0 \text{ ou } 1}^{n} \frac{a_{ij}^{(m)}}{\sqrt{m_i}} \left(\frac{x_i}{\sqrt{m_i}} - \frac{x_j}{\sqrt{m_j}} \right)^m \quad (i = 1, \ldots, n) \quad (10)$$

Si le système possède un mode normal semblable, il existe entre les x_i au cours de ce mouvement les relations

$$x_i = \frac{C_i}{C_1} x_1 \quad (i = 2, \ldots, n)$$

et ces x_i doivent être solutions des équations différentielles de mouvement. On doit donc avoir

$$\ddot{x}_1 = -\sum_m \sum_j \frac{a_{1j}^{(m)}}{\sqrt{m_1}} \left(\frac{1}{\sqrt{m_1}} - \frac{1}{\sqrt{m_j}} \frac{C_j}{C_1} \right)^m x_1^m$$

$$\frac{C_i}{C_1} \ddot{x}_1 = -\sum_m \sum_j \frac{a_{ij}^{(m)}}{\sqrt{m_i}} \left(\frac{1}{\sqrt{m_i}} \frac{C_i}{C_1} - \frac{1}{\sqrt{m_j}} \frac{C_j}{C_1} \right)^m x_1^m \quad (i = 2, \ldots, n)$$

Il faut dès lors que, dans le mode considéré, toutes ces équations différentielles en x_1 fournissent la même solution. Les polynomes en x_1 obtenus en multipliant les deuxièmes membres de la i^e équation par C_1/C_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) doivent donc être identiques, ce qui fournit les équations algébriques auxquelles doivent satisfaire les C_i :

$$\frac{1}{C_1\sqrt{m_1}}\sum_j a_{1j}^{(m)}\left(\frac{C_1}{\sqrt{m_1}}-\frac{C_j}{\sqrt{m_j}}\right)^m = \ldots$$

$$= \frac{1}{C_i\sqrt{m_i}}\sum_j a_{ij}^{(m)}\left(\frac{C_i}{\sqrt{m_i}}-\frac{C_j}{\sqrt{m_j}}\right)^m = \ldots$$

$$= \frac{1}{C_n\sqrt{m_n}}\sum_j a_{nj}^{(m)}\left(\frac{C_n}{\sqrt{m_n}}-\frac{C_j}{\sqrt{m_j}}\right)^m \quad (m = 1, 3, \ldots, R) \qquad (11)$$

Un tel système contient en général plus d'équations que d'inconnues et un système dynamique S_n n'admettra donc pas, en général, de mode normal semblable. Nous allons rechercher si certains types particuliers ne fournissent pas pour (11) un nombre d'équations acceptable.

a) *Systèmes linéaires.*

De par sa fonction de forces donnée en (6), le système linéaire est tel que $a_{ij}^{(m)} = 0$ pour $m > 1$, ce qui entraîne $R = 1$, et le système (11) s'écrit

$$\frac{1}{C_1\sqrt{m_1}}\sum_j a_{1j}^{(1)}\left(\frac{C_1}{\sqrt{m_1}}-\frac{C_j}{\sqrt{m_j}}\right) = \ldots$$

$$= \frac{1}{C_i\sqrt{m_i}}\sum_j a_{ij}^{(1)}\left(\frac{C_i}{\sqrt{m_i}}-\frac{C_j}{\sqrt{m_j}}\right) = \ldots$$

$$= \frac{1}{C_n\sqrt{m_n}}\sum_j a_{nj}^{(1)}\left(\frac{C_n}{\sqrt{m_n}}-\frac{C_j}{\sqrt{m_j}}\right)$$

soit, en égalant chaque terme à un paramètre λ, puis en posant

$$-\frac{a_{ij}^{(1)}}{\sqrt{m_i m_j}} = A_{ij}, \quad \sum_{\substack{j=0 \text{ ou } 1\\ j\neq i}}^{n} \frac{a_{ij}^{(1)}}{m_i} = A_{ii} :$$

$$\begin{cases} (A_{11}-\lambda)C_1 + A_{12}C_2 + \ldots + A_{1n}C_n = 0 \\ A_{21}C_1 + (A_{22}-\lambda)C_2 + \ldots + A_{2n}C_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{n1}C_1 + A_{n2}C_2 + \ldots + (A_{nn}-\lambda)C_n = 0 \end{cases}$$

On obtient donc pour les C_i un système linéaire homogène de n

équations à n inconnues qui admettra une solution non triviale si et seulement si

$$\text{dét}(A - \lambda E) = 0, \quad A = (A_{ij}), E = (\delta_{ij}).$$

On retombe sur l'équation aux valeurs propres de la théorie classique et dès lors sur les n modes normaux correspondants.

Remarquons ici que pour que la définition soit vraiment satisfaisante, il faut encore qu'il n'existe pas, dans le système linéaire, d'autres trajectoires qui satisfont aux conditions imposées par cette définition. Or, on sait que si les fréquences propres du système sont $\omega^1, \ldots, \omega^n$, la solution générale est

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} C^k \cos(\omega^k t + \delta^k)\vec{s}_k$$

où $\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_n$ sont n vecteurs orthonormés ayant la direction des vecteurs propres de la matrice A et C^k et δ^k les $2n$ constantes d'intégration. Cette solution est également l'équation paramétrique de la trajectoire dans E_n et représente d'ailleurs une courbe de Lissajous. L'étude de ces courbes montre alors que la seule qui soit uniforme est la droite.

b) *Systèmes homogènes.*

Avec Rosenberg [6, 7], nous appellerons *système homogène de degré k* un système S_n tel que, dans le modèle mécanique associé, les forces exercées par *tous* les ressorts soient proportionnelles à la k^e puissance des déformations. Le pseudo-système correspondant est donc défini par la fonction de forces :

$$U(x_1, \ldots, x_n) = -\sum_i \sum_j \frac{a_{ij}^{(k)}}{k+1}\left(\frac{x_i}{\sqrt{m_i}} - \frac{x_j}{\sqrt{m_j}}\right)^{k+1} \tag{12}$$

ce qui entraîne que $a_{ij}^{(m)} = 0$ pour $m \neq k$. Dès lors, les équations (11) s'écrivent, si on pose $c_i = C_i/C_1$ ($i = 2, \ldots, n$), puisque les C_i ne sont définis qu'à un facteur constant près :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{m_1}} \sum_j a_{1j}^{(k)} \left(\frac{1}{\sqrt{m_1}} - \frac{c_j}{\sqrt{m_j}}\right)^k = \ldots \\
&= \frac{1}{c_i\sqrt{m_i}} \sum_j a_{ij}^{(k)} \left(\frac{c_i}{\sqrt{m_i}} - \frac{c_j}{\sqrt{m_j}}\right)^k = \ldots \\
&= \frac{1}{c_n\sqrt{m_n}} \sum_j a_{nj}^{(k)} \left(\frac{c_n}{\sqrt{m_n}} - \frac{c_j}{\sqrt{m_j}}\right)^k
\end{aligned} \tag{13}$$

Il s'agit d'un système de n-1 équations algébriques à n-1 inconnues c_i. Si ce système possède p solutions réelles, le système dynamique possédera p modes normaux semblables. Les équations (13) peuvent s'écrire

$$\sum_j \left[\frac{a_{ij}^{(k)}}{\sqrt{m_i}}\left(\frac{c_i}{\sqrt{m_i}} - \frac{c_j}{\sqrt{m_j}}\right)^k - \frac{a_{1j}^{(k)}}{\sqrt{m_1}}\left(\frac{1}{\sqrt{m_1}} - \frac{c_j}{\sqrt{m_j}}\right)^k c_i\right] = 0 \qquad (i = 2,..., n)$$

et constituent donc un système de n-1 équations de degré $k + 1$ en les c_i. Du théorème de BEZOUT généralisé, on déduit alors le

Théorème VI. — Le nombre maximum de modes normaux semblables d'un système dynamique homogène de degré k à n degrés de liberté est égal à

$$(k + 1)^{n-1}$$

On remarquera que *ce nombre peut être supérieur au nombre de degrés de liberté du système dynamique,* situation qui n'a pas son équivalent dans les systèmes linéaires où ces deux quantités sont toujours égales.

Examinons en particulier le cas d'un système à deux degrés de liberté. Les équations (13) se ramènent à l'équation unique

$$-\frac{\alpha_k}{\mu^{\frac{k+1}{2}}}c + \beta_k c^k - \left(1 + \frac{c}{\sqrt{\mu}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} - c\right)^k = 0$$

où l'on a posé

$$\mu = \frac{m_1}{m_2}, \ \alpha_k = \frac{a_{01}^{(k)}}{a_{12}^{(k)}}, \beta_k = \frac{a_{02}^{(k)}}{a_{12}^{(k)}}, c = \frac{C_2}{C_1}.$$

L'étude des propriétés de cette équation algébrique de degré $k + 1$ permet d'énoncer le théorème suivant [16] :

Théorème VII : Le nombre de modes normaux semblables d'un système homogène de degré k, k impair, à deux degrés de liberté, est au moins égal à 2 et au plus égal à $k + 1$. Un tel système possède toujours au moins un mode-i (en phase, $c > 0$) et un mode-o (en opposition de phase, $c < 0$). Le nombre de modes-i et le nombre de modes-o sont toujours des nombres impairs.

Dans le cas particulier de systèmes homogènes de degré 3 à 2 degrés de liberté tels que $\mu = 1$, les théorèmes suivants dont la démonstration, assez longue, sera seulement esquissée et peut être trouvée en [16], établissent l'existence de systèmes possédant plus de modes normaux que de degrés de liberté :

Théorème VIII. — A tout couple de nombres négatifs $(-r_1, -r_2)$, *on peut associer un système dynamique homogène de degré* 3 *à deux degrés de liberté tel que* $\mu = 1$ *admettant les droites modales d'équations*

$$x_2 + r_1 x_1 = 0, x_2 + r_2 x_1 = 0$$

et admettant toujours deux autres modes normaux semblables, un mode-i et un mode-o.

Théorème IX : Lorsqu'un système dynamique homogène de degré 3 *à deux degrés de liberté tel que* $\mu = 1$ *admet* 4 *modes normaux semblables, ils se répartissent toujours en un mode-i et* 3 *modes-o.*

Ces théorèmes sont basés sur le fait que l'équation en c possédant toujours une racine positive et une racine négative, il suffit de supposer l'existence de deux racines réelles de même signe pour être assuré de l'existence de quatre racines réelles. Ainsi, si l'on exprime que $-r_1$ et $-r_2$ vérifient cette équation, on obtient un système linéaire fournissant α_3 et β_3 en fonction de r_1 et r_2. On recherche alors s'il est possible d'obtenir des nombres α_3 et β_3 répondant à la fois aux conditions imposées par le problème mécanique, à savoir α_3 et $\beta_3 > 0$ puisque U est défini négatif, et aux conditions qui résultent de l'existence des deux racines de même signe. Dans le cas des deux racines négatives $-r_1$ et $-r_2$, on trouve que $\alpha_3(r_1, r_2)$ et $\beta_3(r_1, r_2)$ sont toujours positifs ce qui démontre le théorème VIII. Dans le cas de deux racines positives, on démontre que les inégalités $\alpha_3 > 0$, $\beta_3 > 0$ forment un système impossible ce qui entraîne le théorème IX.

Signalons qu'un modèle mécanique correspondant aux systèmes dont il est question dans ces deux théorèmes est donné par deux masses égales reliées entre elles et à un support fixe par des ressorts linéaires et se mouvant *perpendiculairement* à la direction de ces ressorts.

c) *Systèmes uniformes.*

Il s'agit de systèmes tels que, dans le modèle mécanique associé, aucune masse n'est reliée à un point fixe, tous les ressorts sont identiques et toutes les masses égales (et supposées unitaires).

Il en résulte que les équations (11) s'écrivent

$$\frac{1}{C_1}\sum_{j=1}^{n}(C_1 - C_j)^m = \frac{1}{C_2}\sum_{j=1}^{n}(C_2 - C_j)^m = \ldots$$

$$= \frac{1}{C_n}\sum_{j=1}^{n}(C_n - C_j)^m \qquad (m = 1, 3, \ldots, R) \tag{14}$$

où R désigne ici la valeur commune des r_{ij}.

Des propriétés des proportions et de l'imparité de m, on déduit à partir de (14)

$$\frac{\sum_{j=1}^{n}(C_1 - C_j)^m}{C_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(C_i - C_j)^m}{\sum_{i=1}^{n} C_i} = \frac{0}{C_1 + C_2 + \ldots + C_n} = 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

D'où, $C_1 = C_2 = \ldots = C_n$, ce qui fournit la solution

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n,$$

qui correspond à une translation d'ensemble du système traduisant l'absence de ressorts reliés à un point fixe et ne répond pas à la définition II.

D'autre part, le système (14) est équivalent au système

$$\frac{\sum_{j=1}^{n}(C_k - C_j)^m}{C_k} = \frac{\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\sum_{j=1}^{n}(C_i - C_j)^m}{\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} C_i} = \frac{\sum_{j=1}^{n}(C_k - C_j)^m}{\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} C_i} \qquad \begin{matrix}(k=1,\ldots,n)\\ (m = 1, 3, \ldots, R)\end{matrix}$$

soit

$$\frac{1}{C_k} = -\frac{1}{\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} C_i} \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

ce qui entraîne l'équation unique

$$C_1 + C_2 + \dots + C_n = 0 \tag{15}$$

d'ailleurs indépendante de la valeur de R. On retrouve ainsi un théorème démontré différemment par ROSENBERG [9] :

Théorème X. — Toutes les droites de l'espace de configuration E_n *passant par l'origine et dont les paramètres directeurs* C_i *vérifient la relation* (15) *sont des droites modales du système uniforme. Tout système uniforme possède les mêmes droites modales que le système linéaire associé obtenu en faisant* $R = 1$ *dans sa fonction de forces.*

d) *Systèmes compensés et symétriques à deux degrés de liberté.*

En faisant des restrictions sur les coefficients $a_{ij}^{(m)}$, on peut trouver d'autres systèmes dynamiques possédant des modes normaux semblables. A côté de ceux traités par ROSENBERG [6, 7, 9] et de ceux définis en [16], on peut encore consulter un travail de K. E. HAUGHTON [14] où, par une méthode originale que le manque de place nous empêche d'exposer ici, sont introduits d'autres systèmes auxquels la méthode exposée dans cet article est d'ailleurs applicable. Nous nous contenterons d'examiner encore le cas des *systèmes compensés* à deux degrés de liberté [16].

Pour $n = 2$, les équations (11) peuvent s'écrire

$$a_{12}^{(m)}\left(\frac{1}{C_1\sqrt{m_1}} + \frac{1}{C_2\sqrt{m_2}}\right)\left(\frac{C_1}{\sqrt{m_1}} - \frac{C_2}{\sqrt{m_2}}\right)^m =$$

$$= \frac{a_{02}^{(m)}}{C_2\sqrt{m_2}}\left(\frac{C_2}{\sqrt{m_2}}\right)^m - \frac{a_{01}^{(m)}}{C_1\sqrt{m_1}}\left(\frac{C_1}{\sqrt{m_1}}\right)^m \tag{16}$$

$$(m = 1, 3, \dots, R)$$

La forme de ces équations suggère d'examiner à quelles conditions le système S_2 admettra une droite modale de paramètres directeurs tels que

$$\frac{C_1}{\sqrt{m_1}} = \frac{C_2}{\sqrt{m_2}}$$

Il faudra que les seconds membres s'annulent pour ces valeurs de C_1 et C_2, soit que

$$\frac{a_{01}^{(m)}}{m_1} = \frac{a_{02}^{(m)}}{m_2} \qquad (m = 1, 3, \dots, R) \tag{17}$$

ce qui impose en outre que $r_{01} = r_{02}$.

Un système S_2 dont les coefficients $a_{01}^{(m)}$ et $a_{02}^{(m)}$ vérifient les relations (17) sera dit *système compensé de première espèce.*

Mais la forme des équations (16) suggère aussi de rechercher à quelles conditions S_2 admettra une droite modale de paramètres directeurs

$$\frac{C_1}{\sqrt{m_2}} = -\frac{C_2}{\sqrt{m_1}}$$

Il faut encore que ces valeurs de C_1 et C_2 annulent les seconds membres des équations (16), ce qui entraîne pour les coefficients les conditions

$$\frac{a_{01}^{(m)}}{m_1^m} = \frac{a_{02}^{(m)}}{m_2^m} \qquad (m = 1, 3, ..., R) \tag{18}$$

avec en outre $r_{01} = r_{02}$.

Un système S_2 dont les coefficients $a_{01}^{(m)}$ et $a_{02}^{(m)}$ vérifient les relations (18) sera dit *système compensé de seconde espèce.*

On a dès lors le

Théorème XI : Les systèmes dynamiques compensés de première espèce [respectivement : de seconde espèce] à deux degrés de liberté possèdent un mode normal de vibration semblable. La ligne modale correspondante est la droite d'équation

$$\frac{x_1}{\sqrt{m_1}} = \frac{x_2}{\sqrt{m_2}} \qquad (\textit{mode-i}).$$

[respectivement : la droite d'équation

$$\frac{x_1}{\sqrt{m_2}} = -\frac{x_2}{\sqrt{m_1}} \qquad (\textit{mode-o}).]$$

On voit que les conditions imposées n'affectent que les ressorts reliés au support fixe (ressorts d'ancrage), le ressort de couplage étant tout à fait quelconque.

Si on considère maintenant un système dynamique S_2 tel que $m_1 = m_2$ et que les ressorts d'ancrage soient identiques, les conditions (17) et (18) sont toutes deux remplies et un tel système, dit *symétrique* [6, 9], appartient à la fois à l'ensemble des systèmes compensés de première espèce et à l'ensemble de ceux de deuxième espèce. Il en résulte un théorème démontré d'une autre manière par ROSENBERG [6, 9] :

Théorème XII. — Les systèmes dynamiques symétriques possèdent deux modes normaux semblables, de droites modales respectives

$$x_2 = x_1 \ (\textit{mode-i}) \ \textit{et} \ x_2 = -x_1 \quad (\textit{mode-o}).$$

6. Oscillations en modes normaux non semblables

En ce qui concerne les modes normaux de vibration non semblables, les recherches se sont développées dans deux directions différentes.

D'une part, Rosenberg et Kuo ont étudié, par la méthode des perturbations, les oscillations en modes normaux de systèmes voisins d'autres systèmes possédant des modes normaux semblables [11].

D'autre part, dans un récent mémoire [13, 15], R. M. Rosenberg a obtenu le résultat essentiel suivant :

Théorème d'existence. — Un système dynamique conservatif à 2 degrés de liberté, d'énergie cinétique $T = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)$ *et dont la fonction de forces* U (x_1, x_2) *vérifie les conditions suivantes* :

a) *elle est définie négative* ;

b) *elle est fonction des valeurs absolues de ses arguments* x_1, x_2, $x_1 - x_2$:

$$U = U(|x_1|, |x_2|, |x_1 - x_2|) ;$$

c) *ses dérivées partielles des deux premiers ordres existent et sont continues, les dérivées premières étant de la forme*

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_1} &= ax_1 + bx_2 + P(x_1, x_2) \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} &= cx_1 + dx_2 + Q(x_1, x_2) \end{aligned}, \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

où P *et* Q *sont négligeables devant les termes linéaires lorsque* $|x_1|, |x_2| \ll 1$, *possède au moins deux modes normaux de vibration, un mode-i et un mode-o.*

On remarque que les conditions imposées à U sont plus faibles que pour les systèmes S_2 puisque l'analycité n'est plus requise.

La démonstration de ce théorème, assez longue et précédée de nombreux lemmes, se base sur les propriétés des *transversales* c'est-à-dire des trajectoires orthogonales à la famille des courbes équipotentielles $U + h = 0$, $h \in [0, U_0]$, et sur l'étude de la topologie des trajectoires issues des points de la courbe-frontière.

7. Conclusion

Le présent article n'a mis en évidence que certains aspects de la théorie des modes normaux des systèmes non linéaires. Parmi les domaines dont il n'a pas été fait mention, on peut citer l'étude de la dépendance temporelle de certaines solutions normales [9, 10], de la stabilité des oscillations en modes normaux [7, 9, 11, 12, 15] et l'examen des vibrations forcées de systèmes non linéaires soumis à une force extérieure périodique. En particulier, on démontre que si la force extérieure est d'amplitude suffisamment petite, les mouvements de grande amplitude en vibrations forcées se trouvent au voisinge des mouvements libres en modes normaux [12, 15]. C'est une des raisons de l'intérêt de l'étude des oscillations en modes normaux de systèmes conservatifs non linéaires, dont on pourra trouver un exposé très complet dans l'ouvrage cité en [15].

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Bradistilov, « Über periodische und asymptotische Lösungen beim n-fachen Pendel in der Ebene ». *Math. Ann.*, vol. 116, p. 181, 1939.

[2] G. Bradistilov, « Über periodische Bewegungen des n-fachen Pendels in der Ebene », *Math. Ann.*, vol. 116, p. 602, 1939.

[3] Th. Pöschl, « Über Hauptschwingungen met endlichen Schwingweiten », I, *Ing. Arch.*, vol. 20, p. 189, 1952 ; — II, *Ing. Arch.*, vol. 21, p. 396, 1953 ; — Correctionen, *Ing. Arch.*, vol. 22, p. 294, 1954.

[4] C. Schmieden, « Nichtlineare Schwingungen bei zwei Freiheitsgraden », I, *Ing. Arch.*, vol. 25, p. 292, 1957 ; — II, *Ing. Arch.*, vol. 26, p. 110, 1958.

[5] H. Kauderer, « Nichtlineare Mechanik », Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1958, 2er Teil, B, I, pp. 593-612.

[6] R. M. Rosenberg, « Normal Modes of Nonlinear Dual-Modes Systems », *Journal of Applied Mechanics*, vol. 27, Trans. ASME, vol. 82, Series E, juin 1960, pp. 263-268.

[7] R. M. Rosenberg, « On Normal Vibrations of a General Class of Nonlinear Dual-Mode Systems ». *J. of Appl. Mech.*, vol. 28, Trans. ASME, vol. 83, Series E, juin 1961, pp. 275-283.

[8] R. M. Rosenberg, « The Normal Modes of Nonlinear n-Degree-of-Freedom Systems », *J. of Appl. Mech.*, vol. 29, Trans. ASME, vol. 83, Series E, 1962, pp. 7-14.

[9] R. M. Rosenberg et C. S. Hsu, « On the Geometrization of Normal Vibrations of Nonlinear Systems having Many Degrees of Freedom ». *Comptes Rendus*, IUTAM Symposium on Nonlinear Vibrations, Kiev (1961), 1963, tome I, p. 380.

[10] R. M. Rosenberg, « The Ateb(h)-Functions and Their Properties ». *Quart. of Appl. Math.*, vol. XXI, nº 1, 1963, p. 37.

[11] R. M. Rosenberg et J. K. Kuo, « Non-similar Normal Mode Vibrations of Nonlinear Systems Having Two Degrees of Freedom », *J. of Appl. Mech.*, vol. 31, Trans. ASME, Series E, Juin 1964.

[12] R. M. Rosenberg, « La Géométrie de la Dynamique et les Vibrations des Systèmes non linéaires », *L'Onde électrique*, vol. XLIII, nº 433, avril 1963, pp. 425-434.

[13] R. M. Rosenberg, « On Motions with a Rest Point and the Existence of Normal Mode Vibrations in Nonlinear Systems », *Comptes Rendus, 11e Congrès International de Mécanique Appliquée*, Munich, 1964 (à paraître).

R. M. Rosenberg, « On Normal Mode Vibrations », *Cambridge Phil. Soc., Proceedings* (à paraître).

[14] K. E. Haughton, « Similar Motions of Multi-Degree of Freedom Nonlinear Vibrating Systems with Nonsymmetric Springs ». *Thèse de Doctorat, University of California*, Berkeley, 1964.

[15] R. M. Rosenberg, « Les vibrations non-linéaires de systèmes à plusieurs degrés de liberté », *C. N. R. S., Centre de Rech. Phys., Sémin. de Mécanique et d'Acoustique*, Marseille, 1964 (2 tomes).

[16] J. Mawhin, « Modes normaux de vibration des systèmes dynamiques non linéaires », *Mémoire de Licence en Sciences Mathématiques, Université de Liège*, 1964.