Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, Vol. 81, 2012, p. 50 - 74

Manuscrit reçu le 12 octobre 2009 et accepté le 20 avril 2011

Analyticité des fonctions, minimum de deux fonctions plurisousharmoniques et principe du maximum

Jamel ABIDI
Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Tunis
1060 - Tunis - Tunisia.
E-mail: abidijamel1@yahoo.fr

Mathematical subject classification. 32U05, 32D05, 32D20, 32U30, 32T05

Résumé. Nous caractérisons les fonctions analytiques complexes par l'étude du minimum de deux fonctions plurisousharmoniques à croissance logarithmiques. Nous poursuivons leur caractérisation grâce à un procédé de fibration. Ensuite, on donne des résultats relatifs aux fonctions harmoniques et plurisousharmoniques.

Abstract. We investigate complex analytic functions by the study of the minimum of two plurisubharmonic functions with logarithmic growth. We proceed their caracterisation with some fibration method. Then we give some results concerning harmonic and plurisubharmonic functions.

1. Préliminaires.

Soit U un domaine dans $\mathbb{R}^d (d \geq 2)$, sh(U) désigne l'ensemble des fonctions sousharmoniques sur U. Si $A \subset \mathbb{R}^d, \partial A$ est la frontière de A et $\overline{A}$ est son adhérence dans $\mathbb{R}^d$. Soit D un domaine dans $\mathbb{C}^n$.
$u : D \to [-\infty, +\infty[$ est plurisousharmonique si
(a) u est semi-continue supérieurement sur D.
(b) $u \neq -\infty$ sur toute composante connexe de D.
(c) Pour tout $a \in D$ et $b \in \mathbb{C}^n$, pour tout $r > 0$ avec $[a + r\overline{\Delta}(0,1)b] \subset D$ on a $u(a) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta})d\theta$.
psh(D) et prh(D) sont respectivement l'ensemble des fonctions plurisousharmoniques et pluriharmoniques sur D. Si $z^0 = (z_1^0, ..., z_n^0) \in \mathbb{C}^n$, $\parallel z^0 \parallel = [|z_1^0|^2 + ... + |z_n^0|^2]^{\frac{1}{2}}$.
Soit $r > 0$. $B(z^0, r) = \{z \in \mathbb{C}^n / \parallel z - z^0 \parallel < r\}$ et si $z^0 \in \mathbb{C}, D(z^0, r)$ est le disque ouvert centré en z^0 et de rayon r(noté parfois $\triangle(z^0, r)$). Pour $x^0 \in \mathbb{R}^d, B(x^0, r) = \{x \in \mathbb{R}^d / \parallel x - x^0 \parallel < r\}$. L'abbréviation analytique signifie analytique complexe.
Pour $u : U \to [-\infty, +\infty[$, on écrit u est s.c.s pour signifier que u est semi-continue supérieurement sur U.
$C_c^\infty(U) = \{\varphi : U \to \mathbb{C},\ \varphi$ de classe C^∞ et à support compact dans $U\}$ et si $\theta : U \to \mathbb{C}$ de classe C^2, $\Delta(\theta)$ est le laplacien de θ. Pour $f : D \to \mathbb{C}$, Ré(f) et Im(f) sont respectivement les parties réelles et imaginaires de f et pour $a \in \mathbb{C}$, Ré(a) et Im(a) sont les parties réelles et imaginaires de a respectivement. m_{2n} est la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{C}^n$ et l'abbréviation (p.p) sur $\mathbb{C}^n$ signifie presque partout par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}^n$. Pour la théorie des fonc-

tions harmoniques, sousharmoniques, plurisousharmoniques et analytiques, nous citons les ouvrages, Rudin[14], Hörmander [7], Krantz[9], Klimek[8], Lelong[10], Ronkin[13], Range[11], Vladimirov[16], Henkin-Leiterer[5], Hervé[6], Gunning-Rossi[4] et Conway[2].

2. Principaux résultats.

Théorème 1. Soit $f, g : D \to \mathbb{C}$ analytiques, D domaine dans $\mathbb{C}^n$. Soit α, β, γ et $\delta \in \mathbb{R}$ ($\alpha \geq 0$ et $\gamma \geq 0$). Considérons
$u(z,w) = \min(\alpha \log \mid w - f(z) \mid +\beta, \gamma \log \mid w - g(z) \mid +\delta)$ pour $(z,w) \in D \times \mathbb{C}$; $A = \{(z,w) \in D \times \mathbb{C} \ / \ u$ est psh au voisinage de $(z,w)\}$; $E = \{(z,w) \in D \times \mathbb{C} \ / \ \alpha \log \mid w - f(z) \mid +\beta = \gamma \log \mid w - g(z) \mid +\delta \}$. Alors
(i) $A = D \times \mathbb{C} \backslash E$ si et seulement si ($\alpha = \gamma = 0$ et $\beta \neq \delta$) **ou** ($\alpha \neq \gamma, f \neq g$, $\alpha > 0$ et $\gamma > 0$) **ou** ($\alpha = \gamma > 0$ et ($f \neq g$ ou $\beta \neq \delta$)) **ou** ($\alpha = 0$ et $\gamma > 0$ ou $\alpha > 0$ et $\gamma = 0$).
(ii) Si D est pseudoconvexe alors A est un ouvert pseudoconvexe.
(iii) $A = D \times \mathbb{C}$ si et seulement si ($\alpha = \gamma > 0$ et $f = g$) **ou** ($\alpha = \gamma = 0$).

Démonstration. On note par Γ_1 le graphe de f et par Γ_2 le graphe de g dans toute la suite.
Remarquons d'abord qu'on a les inclusions $D \times \mathbb{C} \backslash E \subset A \subset D \times \mathbb{C}$ et que A ne peut pas être vide.
Pour (i). Si $\alpha = \gamma = 0$ et $\beta \neq \delta$, alors on a $E = \emptyset$, $u = \inf(\beta, \delta)$ est psh sur $D \times \mathbb{C}$. Donc $A = D \times \mathbb{C} = D \times \mathbb{C} \backslash E$.
Supposons que $\alpha \neq 0$. Fixons $(z^0, w_0) \in E$.
On note $u_1(z,w) = \alpha \log \mid w - f(z) \mid +\beta$ et $v_1(z,w) = \gamma \log \mid w - g(z) \mid +\delta$ pour $(z,w) \in \mathbb{C}$.
1^{er}**cas.** $u_1(z^0, w_0) = v_1(z^0, w_0) = -\infty$, alors $(z^0, w_0) \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$. Supposons que $(z^0, w_0) \in A$.
u est psh au voisinage de (z^0, w_0), de plus u_1 et v_1 sont pluriharmoniques sur $D \times \mathbb{C} \backslash [\Gamma_1 \cup \Gamma_2]$. Soit $r > 0$, $R > 0$ avec $B(z^0, r) \subset D$ et u psh sur $B(z^0, r) \times D(w_0, R)$. On a besoin du lemme suivant.

Lemme 1. Soit $h, k : U \to \mathbb{R}$ harmoniques sur U domaine dans $\mathbb{R}^d (d \geq 2)$. Supposons que $\min(h,k)$ soit sousharmonique sur U. Alors $h = k$ ou $h < k$ ou $h > k$ partout sur U.

Démonstration. $\min(h,k) = \inf(h,k) = \frac{1}{2}[h + k - \mid h - k \mid]$ est sousharmonique sur U. Donc $- \mid h - k \mid$ est sousharmonique sur U. Notons que $\mid h - k \mid$ est sousharmonique sur U. Il résulte que $\mid h - k \mid$ est harmonique sur U.
Supposons que $h \neq k$ sur U. Par l'absurde supposons qu'il existe $\xi_0, \zeta_0 \in U$ avec $h(\xi_0) > k(\xi_0)$ et $h(\zeta_0) < k(\zeta_0)$. Donc il, existe $\xi_1 \in U$ avec $h(\xi_1) = k(\xi_1)$. Soit K un sous-ensemble compact connexe dans U et contenant dans son intérieur ξ_0, ζ_0 et ξ_1. On a donc $0 = \mid h(\xi_1) - k(\xi_1) \mid$ où ξ_1 est intérieur à K. Puisque $\mid h - k \mid$ est harmonique sur U donc $h - k = 0$ sur K. Comme $h - k$ est harmonique sur U, alors $h - k = 0$ dans U. Ceci étant impossible et la preuve du lemme 1 est terminée.
Maintenant u_1 et v_1 sont pluriharmoniques sur $U = D(z^0, r) \times D(w_0, R) \backslash [\Gamma_1 \cup \Gamma_2]$ avec $\min(u_1, v_1)$ est plurisousharmonique sur U. D'aprés le lemme 1, $u_1 = v_1$ ou $u_1 < v_1$ ou $u_1 > v_1$ partout sur U.
L'hypothèse $u_1 = v_1$ sur U implique $u_1 = v_1$ sur $B(z^0, r) \times D(w_0, R)$. Le cas

$\gamma = 0$ est impossible car $v_1(z^0, w_0) = -\infty$, donc $\gamma > 0$.
$\mid w - f(z) \mid^\alpha e^\beta =\mid w - g(z) \mid^\gamma e^\delta$ pour $(z, w) \in B(z^0, r) \times D(w_0, R)$. Fixons $z \in B(z^0, r)$, on a
$\mid w - f(z) \mid^\alpha e^\beta =\mid w - g(z) \mid^\gamma e^\delta$ pour tout $w \in D(w_0, R)$. Considérons alors $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ avec $ac \neq 0$ et $\mid aw + b \mid^\alpha =\mid cw + b \mid^\gamma e^{\delta-\beta}$ pour tout $w \in D(w_0, R)$.
En choisissant une branche du logarithme adéquate sur $D(w_0, R)\setminus\{-\frac{b}{a}, -\frac{d}{c}\}$,

$w \mapsto \frac{(aw+b)^\alpha}{(cw+d)^\gamma}$ est une fonction localement analytique avec la condition

$\mid \frac{(aw+b)^\alpha}{(cw+d)^\gamma} \mid= e^{\delta-\beta}$ sur l'ouvert connexe $D(w_0, R)\setminus\{-\frac{b}{a}, -\frac{d}{c}\}$. Donc elle est

constante. D'où il existe $\theta \in [0, 2\pi]$ avec
$(aw + b)^\alpha = (cw + b)^\gamma e^{\delta-\beta+i\theta}$, pour tout $w \in D(w_0, R)$.
Dérivons par rapport à w on a donc
$\alpha a(aw + b)^{\alpha-1} = \gamma c(cw + d)^{\gamma-1} e^{i\theta+\delta-\beta}$. Soit encore $\alpha a(aw + b)^\alpha = \gamma c(cw + d)^{\gamma-1}(aw + b)e^{i\theta+\delta-\beta} = \alpha a(cw + d)^\gamma e^{i\theta+\delta-\beta}$. Donc $\gamma c(aw + b) = \alpha a(cw + d)$ et par suite $\alpha = \gamma$. Fixons $w \in D(w_0, R)$, on a pour tout $z \in B(z^0, r); \mid w - f(z) \mid e^{\frac{\beta}{\alpha}} =\mid w - g(z) \mid e^{\frac{\delta}{\alpha}}$.
La condition $f(z) = w$ pour tout $z \in B(z^0, r)$ implique que $g(z) = w$ pour tout $z \in B(z^0, r)$ et par suite $\beta = \delta$. S'il existe $z_1 \in B(z^0, r)$ avec $f(z_1) \neq w$, alors $F = \{z \in B(z^0, r)/f(z) = w\} = \{z \in B(z^0, r)/g(z) = w\}$ est fermé pluripolaire dans $B(z^0, r)$.

Sur $B(z^0, r)\setminus F$, $\mid \frac{f(z)-w}{g(z)-w} \mid= e^{\frac{\delta-\beta}{\alpha}}$, donc $\frac{f(z)-w}{g(z)-w} = e^{\frac{\delta-\beta}{\alpha}+im(w)}$ où $m(w) \in [0, 2\pi[$.

$f(z) - w = (g(z) - w)e^{im(w)}e^{\frac{\delta-\beta}{\alpha}}$, $\forall z \in B(z^0, r), \forall w \in D(w_0, R)\setminus\{f(z), g(z)\}$.

Remarquons que e^{im} est analytique sur $D(w_0, R)\setminus\{f(z), g(z)\}$. De plus, $\mid e^{im} \mid= 1$. Donc e^{im} est constante. Aussi, on a

$[e^{\frac{\delta-\beta}{\alpha}}e^{im} - 1]w = -f(z) + g(z)e^{\frac{\delta-\beta}{\alpha}}e^{im}$. L'indépendance par rapport à w

de la quantité $[-f(z) + g(z)e^{im}e^{\frac{\delta-\beta}{\alpha}}]$ implique que $e^{im}e^{\frac{\delta-\beta}{\alpha}} = 1$.

Mais $m \in [0, 2\pi[$ et $\frac{\delta-\beta}{\alpha} \in \mathbb{R}$, donc $\delta - \beta = 0$ et $m = 0$.

Par suite, on a $(-f + g) = 0$ sur $B(z^0, r)$. D'où $f = g$ sur D.
On obtient maintenant $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$ et $f = g$. Ceci étant impossible. Donc $(z^0, w_0) \notin A$.
$2^{\text{ème}}$ cas. $u_1(z^0, w_0) = v_1(z^0, w_0) > -\infty$.
Supposons encore que $(z^0, w_0) \in A$. u étant psh au voisinage de (z^0, w_o), fixons donc $r > 0, R > 0$ avec $\overline{B}(z^0, r) \times D(w_0, R) \subset D \times \mathbb{C}$, $0 <\mid w - f(z) \mid< 1$, $0 <\mid w - g(z) \mid< 1$ pour tout $(z, w) \in \overline{B}(z^0, r) \times \overline{D}(w_0, R)$. Donc u_1 et v_1 sont prh sur $B(z^0, r) \times D(w_0, R)$. D'où $u_1 = v_1$ ou $u_1 < v_1$ ou $u_1 > v_1$ partout sur $B(z^0, r) \times D(w_0, R)$. Comme $u_1(z^0, w_0) = v_1(z^0, w_0)$, on déduit

alors que $u_1 = v_1$ sur $B(z^0, r) \times D(w_0, R)$ et ceci implique que $\frac{|w-f(z)|^\alpha}{|w-g(z)|^\gamma} = e^{\delta-\beta}$ pour tout $(z, w) \in B(z^0, r) \times D(w_0, R)$. Donc, il existe $\theta(z) \in [0, 2\pi[$ avec $[w - f(z)]^\alpha = [w - g(z)]^\gamma e^{\delta-\beta+i\theta(z)}$ pour z fixé dans $B(z^0, r)$. En dérivant par rapport à w, on obtient $\alpha[w - f(z)]^{\alpha-1} = \gamma[w - g(z)]^{\gamma-1} e^{\delta-\beta+i\theta(z)}$. Donc $\alpha[w - f(z)]^\alpha = \gamma[w - g(z)]^{\gamma-1}[w - f(z)]e^{\delta-\beta+i\theta(z)} = \alpha[w - g(z)]^\gamma e^{\delta-\beta+i\theta(z)}$. Soit alors $\gamma[w - f(z)] = \alpha[w - g(z)]$, pour tout $w \in D(w_0, R)$.
En dérivant encore par rapport à $w \in D(w_0, R)$, on obtient alors $\alpha = \gamma$. Comme $\alpha \neq 0$, alors $\alpha = \gamma > 0$. Il s'ensuit que $f = g$ sur $B(z^0, r)$ et par suite $f = g$ sur D. De la relation $u_1 = v_1$ sur $B(z^0, r) \times D(w_0, R)$, on a alors $\beta = \delta$. Ceci étant impossible. D'où $(z^0, w_0) \notin A$. Il résulte que $A \cap E = \emptyset$.
L'hypothèse $D \times \mathbb{C}\backslash E \subset A \subset D \times \mathbb{C}$ implique $A = D \times \mathbb{C}\backslash E$ si $\alpha \neq 0$ et ($f \neq g$ ou $\beta \neq \delta$).
La même situation sera alors traitée si $\alpha \neq \gamma$ et $f \neq g$.
Pour la réciproque supposons que $A = D \times \mathbb{C}\backslash E$. Si $\alpha = \gamma = 0$, l'hypothèse $\beta = \delta$ implique que $E = D \times \mathbb{C}$. Donc $A = \emptyset$. Mais, on a $A = D \times \mathbb{C}$ dans ce cas. Contradiction et par suite $\beta \neq \delta$. D'où $E = \emptyset$ et $A = D \times \mathbb{C} = D \times \mathbb{C}\backslash E$.
Si $\alpha \neq 0$. Le cas où $\gamma = 0$ implique $\alpha \neq \gamma$.
Si $\gamma \neq 0$. Supposons que $\alpha = \gamma$ et admettons aussi que $f = g$.
Le cas où $\beta = \delta$ étant impossible. En effet $E = D \times \mathbb{C}$, donc $A = \emptyset$. Or $u = u_1 = v_1$ est psh sur $D \times \mathbb{C}$. Il résulte que $A = D \times \mathbb{C}$, mais $A = D \times \mathbb{C}\backslash E = \emptyset$ ceci étant impossible. Donc $\beta \neq \delta$.
Supposons que $f \neq g$. Alors $\alpha = \gamma > 0$ et $f \neq g$ et la preuve de l'assertion (i) est maintenant terminée.
Pour (ii), remarquons d'abord que $E = D \times \mathbb{C}$ si et seulement si ($\alpha = \gamma$ et $\beta = \delta$) ou ($\alpha = \gamma > 0, f = g$ et $\beta = \delta$). En effet, si ($\alpha = \gamma = 0$ et $\beta = \delta$) ou ($\alpha = \gamma > 0, f = g$ et $\beta = \delta$) on vérifie que $E = D \times \mathbb{C}$.
Pour la réciproque, on a $E = D \times \mathbb{C}$. L'hypothèse $\alpha = 0$ implique que $e^\beta =\mid w - g(z) \mid^\gamma e^\delta$ pour $z \in D$ et $w \in \mathbb{C}$.
Donc $\mid w - g(z) \mid^\gamma = e^{\beta-\delta}$. Si $\gamma \neq 0$, alors pour tout $z \in D$ fixé, on aurait $\mid w - g(z) \mid = e^{\frac{\beta-\delta}{\gamma}}$, pour tout $w \in \mathbb{C}$. Mais si $w_0 = g(z) \in \mathbb{C}$, on a $0 = e^{\frac{\beta-\delta}{\gamma}}$ ce qui est impossible. D'où $\gamma = 0$ et par suite $\beta = \delta$.
Supposons maintenant que $\alpha > 0$. On a, pour $z^0 \in D$, $\mid w - f(z^0) \mid^\alpha e^\beta = \mid w - g(z^0) \mid^\gamma e^\delta$ pour tout $w \in \mathbb{C}$. Si $w = f(z^0)$, alors $w = g(z^0)$. D'où $f = g$ sur D. De plus, si $\mid w - f(z^0) \mid = 1$, alors $e^\beta = e^\delta$, donc $\beta = \delta$. Il résulte alors que $\mid w - f(z^0) \mid^\alpha = \mid w - f(z^0) \mid^\gamma$ pour tout $w \in \mathbb{C}$. On choisit $w_0 \in \mathbb{C}$ avec $\mid w_0 - f(z^0) \mid = 2$. Donc $2^\alpha = 2^\gamma$ et par suite $\alpha = \gamma > 0$. Remarquons de plus que si $E = D \times \mathbb{C}$, alors $A = D \times \mathbb{C}$.
Pour la preuve de l'assertion (ii), d'abord il est clair que A est ouvert dans $D \times \mathbb{C}$. Maintenant, supposons que D est pseudoconvexe. Si $E = D \times \mathbb{C}$, alors $A = D \times \mathbb{C}$ est pseudoconvexe dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$. Supposons que $E \neq D \times \mathbb{C}$. Alors $A = D \times \mathbb{C}\backslash E = D_1 \cup D_2$, où $D_1 = \{(z, w) \in D \times \mathbb{C} \ / \ u_1(z, w) < v_1(z, w)\}$ et $D_2 = \{(z, w) \in D \times \mathbb{C} \ / \ u_1(z, w) > v_1(z, w)\}$.
Remarquons que $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, de plus $D_1 = \{(z, w) \in D \times \mathbb{C}\backslash\Gamma_2 \ / \ u_1(z, w) < v_1(z, w)\} = \{(z, w) \in D \times \mathbb{C}\backslash\Gamma_2 \ / \ u_1(z, w) - v_1(z, w) < 0\}$. Notons que $D \times \mathbb{C}\backslash\Gamma_2$ est pseudoconvexe, de plus $(u_1 - v_1)$ est psh sur$D \times \mathbb{C}\backslash\Gamma_2$. Donc D_1 est un ouvert

pseudoconvexe.
$D_2 = \{(z,w) \in D \times \mathbb{C}\backslash\Gamma_1 \ / \ v_1(z,w) < u_1(z,w)\} =$
$\{(z,w) \in D \times \mathbb{C}\backslash\Gamma_1 \ / \ v_1(z,w) - u_1(z,w) < 0\}$. D_2 est aussi un ouvert pseudoconvexe. D'où A est un ouvert pseudoconvexe dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$.
Pour (iii), remarquons que si ($\alpha = \gamma > 0$ et $f = g$) ou ($\alpha = \gamma = 0$) alors $A = D \times \mathbb{C}$. Notons que la réciproque se démontre de manière analogue comme plus haut.

Remarque 1. Pour $(z,w) \in \mathbb{C}^2$, on note $u_1(z,w) = \log \mid w \mid$, $v_1(z,w) = 2\log \mid w \mid$ et $u = \min(u_1, u_2)$. Posons aussi $f(z) = g(z) = 0$ et notons Γ_1 et Γ_2 les graphes de f et g respectivement.
Alors u est psh au voisinage de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. De plus notons que
$E = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \ / \ u_1(z,w) = v_1(z,w)\} = \mathbb{C} \times [\{0\} \cup \partial D(0,1)]$.
Notons aussi que $A = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \ / \ u$ est psh au voisinage de $(z,w)\} = \mathbb{C}^2\backslash\mathbb{C} \times \partial D(0,1) \neq \mathbb{C}^2\backslash E$.

Corollaire 1. Soient $f, g : D \to \mathbb{C}$ analytiques non constantes, D domaine dans $\mathbb{C}^n$. $u_1(z,w) = \alpha \log \mid p(w) - f(z) \mid + \beta$ et $v_1(z,w) =$
$\gamma \log \mid q(w) - g(z) \mid + \delta$, $(z,w) \in D \times \mathbb{C}$, α et $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$, β et $\delta \in \mathbb{R}$, p et q sont deux polynômes analytiques et non constants sur $\mathbb{C}^m$.
On note $u = \inf(u_1, v_1)$, $F_1 = \{(z,w) \in D \times \mathbb{C}^m / p(w) = f(z)\}$ et $F_2 = \{(z,w) \in D \times \mathbb{C}^m / q(w) = g(z)\}$. On a les équivalences suivantes
(i) $u \in \text{psh}(D \times \mathbb{C}^m)$;
(ii) $u \in \text{psh}(D \times \mathbb{C}^m \backslash F_1)$;
(iii) $u \in \text{psh}(D \times \mathbb{C}^m \backslash F_2)$;
(iv) $f = cg + k$, $\alpha = \gamma$ et $p = cq + k$ ($c \in \mathbb{C}^*$ et $k \in \mathbb{C}$);
(v) u est psh sur $D \times \mathbb{C}^m \backslash (F_1 \cup F_2)$;
(vi) Il existe $(z^0, w_0) \in D \times \mathbb{C}^m$, $u_1(z^0, w_0) = v_1(z^0, w_0) > -\infty$ et u psh au voisinage de (z^0, w_0).

Démonstration. (i) implique (ii) étant triviale. Pour la réciproque notons que F_1 est fermé pluripolaire dans $D \times \mathbb{C}^m$, e^u est continue sur $D \times \mathbb{C}^m$ et psh sur $D \times \mathbb{C}^m \backslash F_1$, donc e^u est psh sur $D \times \mathbb{C}^m$.
Par une méthode analogue on démontre l'équivalence entre les assertions (i) et (iii).
(iv) implique (i) est triviale. Pour la réciproque notons que u_1 et v_1 sont psh sur $D \times \mathbb{C}^m$ et prh sur $D \times \mathbb{C}^m \backslash [F_1 \cup F_2]$. Rappelons que $[F_1 \cup F_2]$ est fermé pluripolaire dans $D \times \mathbb{C}^m$. Donc $u_1 = v_1$ ou $u_1 < v_1$ ou $u_1 > v_1$ partout sur le domaine $D \times \mathbb{C}^m \backslash [F_1 \cup F_2]$. L'hypothèse $u_1 = v_1$ sur $D \times \mathbb{C}^m \backslash [F_1 \cup F_2]$ implique $u_1 = v_1$ sur $D \times \mathbb{C}^m$. Donc $\mid p(w) - f(z) \mid^\alpha e^\beta = \mid q(w) - g(z) \mid^\gamma e^\delta$. Sur $\mathbb{C}^m \backslash \{w \in \mathbb{C}^m / p(w) = f(z)$ ou $q(w) = g(z)\}$, on a

$$\frac{\mid p(w) - f(z) \mid^\alpha}{\mid q(w) - g(z) \mid^\gamma} = e^{\delta - \beta}.$$

On admet sans perte de généralité que $m = 1$.

$$\lim_{|w| \to +\infty} \frac{\mid p(w) - f(z) \mid^\alpha}{\mid q(w) - g(z) \mid^\gamma} = e^{\delta - \beta}$$

donc $\alpha deg(p) = \gamma deg(q)$ où $deg(p)$ est le degré du polynôme p. On a

$\alpha \log \mid w - g(z) \mid^2 + 2\beta = \gamma \log \mid w - g(z) \mid^2 + 2\delta$ et dérivons par rapport à w, il arrive que $\frac{\alpha p'(w)}{p(w)-f(z)} = \frac{\gamma q'(w)}{q(w)-g(z)}$ pour $p(w) \neq f(z)$ et $q(w) \neq g(z)$. Comme q n'est pas constant, alors $\frac{\alpha p'(w)}{\gamma q'(w)} = \frac{p(w)-f(z)}{q(w)-g(z)}$ pour $w \in \mathbb{C}$ avec $q'(w) \neq 0$ et $q(w) \neq g(z)$(pour z fixé dans D).
Soit $z^0 \in D, r > 0$ avec $\overline{\Delta}^{(n)}(z^0, r) \subset D$. On fixe aussi $R > 0$ avec pour tout $w \in \mathbb{C} \backslash \overline{\Delta}(0, R)$ et $z \in \overline{\Delta}^{(n)}(z^0, r)$, on a $q(w) \neq g(z)$.
Soit $a(z) = \frac{p(w)-f(z)}{q(w)-g(z)}$, z et w comme ci-dessus. a est constante sur $\overline{\Delta}^{(n)}(z^0, r)$. Donc $\frac{\partial a}{\partial z_1}(z) = 0$. Comme f n'est pas constante sur $\overline{\Delta}^{(n)}(z^0, r)$, on suppose donc $\frac{\partial f}{\partial z_1}(z) \neq 0$ sur $\overline{\Delta}^{(n)}(z^0, r)$.
$-\frac{\partial f}{\partial z_1}(z)[q(w) - g(z)] + \frac{\partial g}{\partial z_1}(z)[p(w) - f(z)] = 0$. Donc

$$q(w) = \frac{\frac{\partial g(z)}{\partial z_1}}{\frac{\partial f(z)}{\partial z_1}} p(w) - \frac{\frac{\partial g}{\partial z_1}(z)}{\frac{\partial f}{\partial z_1}(z)} f(z) + g(z).$$

Comme p et q ne sont pas constants, il arrive que

$$\frac{\frac{\partial g(z)}{\partial z_1}}{\frac{\partial f(z)}{\partial z_1}} = c, \ (\forall z \in \overline{\Delta}^{(n)}(z^0, r)) \text{ avec } c \in \mathbb{C} \backslash \{0\}.$$

Aussi, la fonction $b(z) = g(z) - \frac{\frac{\partial g(z)}{\partial z_1}}{\frac{\partial f(z)}{\partial z_1}} f(z)$ est constante.

$b(z) = g(z) - cf(z) = k (k \in \mathbb{C})$. D'où $g = cf + k$ sur D et $q = cp + k$.
Comme $\alpha deg(p) = \gamma deg(q) = \gamma deg(p)$, donc $\alpha = \gamma$ et on pourra aussi vérifier que $\mid c \mid = e^{\frac{\beta - \delta}{\alpha}}$.
Si $u_1 \leq v_1$ sur $D \times \mathbb{C}^m \backslash [F_1 \cup F_2]$. $(u_1 - v_1)$ est alors psh sur $D \times \mathbb{C}^m \backslash [F_1 \cup F_2]$ et négative avec $[F_1 \cup F_2]$ est fermé pluripolaire dans $D \times \mathbb{C}^m$. Donc elle se prolonge en une fonction psh négative sur $D \times \mathbb{C}^m$(notée encore $(u_1 - v_1)$).
Fixons $z \in D$, $[u_1(z, .) - v_1(z, .)]$ est psh négative sur $\mathbb{C}^m$, donc elle est constante. Il existe donc un unique réel négatif noté $c_1(z)$ avec $c_1(z) = u_1(z, w) - v_1(z, w)$ pour tout $w \in \mathbb{C}^m$. Donc $u_1(z, w) = v_1(z, w) - c_1(z)$.
Sans perdre en généralité on suppose que $m = 1$.
Pour $w \in \mathbb{C} \backslash \{f(z), g(z)\}$, dérivons l'égalité précédente par rapport à w, on obtient

$$\frac{\alpha p'(w)}{p(w)-f(z)} = \frac{\gamma q'(w)}{q(w)-g(z)} \text{ et si aussi } q'(w) \neq 0, \text{ on a } \frac{\alpha p'(w)}{\gamma q'(w)} = \frac{p(w)-f(z)}{q(w)-g(z)}.$$

D'après le raisonnement plus haut, on a donc $q = cp + k, g = cf + k; c \in \mathbb{C}^*, k \in \mathbb{C}$, de plus
$\mid p(w) - f(z) \mid^\alpha e^\beta < \mid c \mid^\gamma \mid p(w) - f(z) \mid^\gamma e^{\delta + c_1(z)}$ pour $p(w) \neq f(z)$.
Si $\alpha < \gamma$, on a $e^\beta < \mid c \mid^\gamma \mid p(w) - f(z) \mid^{\gamma - \alpha} e^{\delta + c_1(z)}$.
On choisira une suite $(w_j)_{j \geq 1}$ avec $(p(w_j) - f(z))_{j \geq 1}$ converge vers 0. Mais la condition $e^\beta < \mid c \mid^\gamma \mid p(w_j) - f(z) \mid^{\gamma - \alpha} e^{\delta + c_1(z)}$ pour tout $j \geq 1$ est impossible. Donc $\alpha \geq \gamma$.
La condition $\alpha > \gamma$ est impossible car si on choisit une suite $(w'_j)_{j \geq 1}$ avec

$(p(w'_j) - f(z))_{j\geq 1}$ est non bornée(z fixé dans D). On a
$\mid p(w'_j) - f(z) \mid^{\alpha-\gamma} e^{\beta} <\mid c \mid^{\gamma} e^{\delta+c_1(z)}$ pour tout $j \geq 1$. Ce qui implique que $(p(w'_j) - f(z))_{j\geq 1}$ est bornée. Contradiction. D'où $\alpha = \gamma$.
Enfin, il est clair que les assertions (i), (v) et (vi) sont équivalentes.
Concernant l'étude de plusieurs fonctions harmoniques, on a
Lemme 2. Soit $u_1, ..., u_k : D \to \mathbb{R}$ harmoniques, D domaine dans $\mathbb{R}^d(u_1, ..., u_k$ sont distinctes deux à deux, $d \geq 2$ et $k \geq 2)$.
Supposons que $\inf\limits_{1\leq j\leq k}(u_j)$ est sousharmonique sur D.
Alors, il existe une permutation $\sigma : \{1, ..., k\} \to \{1, ..., k\}$ avec $u_{\sigma(1)} < u_{\sigma(2)}, ..., u_{\sigma(1)} < u_{\sigma(k)}$.
Démonstration. $\inf\limits_{1\leq j\leq k}(u_j)$ étant sousharmonique sur D, notons aussi que $\inf\limits_{1\leq j\leq k}(u_j)$ est surharmonique, donc $\inf\limits_{1\leq j\leq k}(u_j)$ est harmonique sur D. Montrons d'abord l'existence d'une boule ouverte $B(x_1, R) \subset D$ avec $\forall j, l \in \{1, ..., k\}$ et $j \neq l$, on a $u_j(x) \neq u_l(x)$ $(\forall x \in B(x_1, R), x_1 \in D$ et $R > 0)$. Remarquons que si $k = 2$, on a $u_1 < u_2$ ou $u_2 < u_1$ partout sur D. Supposons que la propriété précédente est vraie jusqu'a l'ordre k. Fixons $u_1, ..., u_{k+1}$ des fonctions harmoniques sur D et distinctes deux à deux. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe donc une boule ouverte $B(x^0, r) \subset D$ $(x^0 \in D$ et $r > 0)$ avec $\forall j, l \in \{1, ..., k\}$, $j \neq l$, on a $\forall x \in B(x^0, r), u_j(x) \neq u_l(x)$. Supposons que $\forall x \in B(x^0, r), \exists j \in \{1, ..., k\}$ tel que $u_j(x) = u_{k+1}(x)$. Il résulte alors que $\{x \in B(x^0, r)/u_j(x) = u_{k+1}(x)\} = B(x^0, r)$. Donc il existe $j \in \{1, ..., k\}$ avec $\{x \in B(x^0, r)/u_j(x) = u_{k+1}(x)\}$ est d'intérieur non vide. D'où $u_j = u_{k+1}$ sur $B(x^0, r)$ et par analycité réelle on déduit que $u_j = u_{k+1}$ sur D. D'où une contradiction. Ainsi, il existe $x_1 \in B(x^0, r)$ avec $\forall j \in \{1, ..., k\}$, $u_j(x_1) \neq u_{k+1}(x_1)$. On choisit alors $R \in]0, r[$ de manière que $B(x_1, R) \subset B(x^0, r)$, de plus $u_j(x) \neq u_{k+1}(x), \forall x \in B(x_1, R)$. D' où, $\forall j, \lambda \in \{1, ..., k + 1\}$, on a $u_j(x) \neq u_\lambda(x), \forall x \in B(x_1, R)$. D' où la propriété(le choix de la permutation étant clair). Maintenant la preuve du lemme 2 est possible.
$\exists x^0 \in D, r > 0$ avec $B(x^0, r) \subset D$ et $\forall j, \lambda \in \{1, ..., k\}, j \neq \lambda, u_j(x) \neq u_\lambda(x), \forall x \in B(x^0, r)$. On peut facilement vérifier qu'on se ramène à la situation $u_1 < u_2, ..., u_1 < u_k$ sur $B(x^0, r)$. Donc $\inf\limits_{1\leq j\leq k}(u_j) = u_1$ sur $B(x^0, r)$ et par analycité réelle, on déduit que $\inf\limits_{1\leq j\leq k}(u_j) = u_1$ sur D.
Lemme 3. Soit u, v, w trois fonctions harmoniques réelles et distinctes deux à deux sur D domaine de $\mathbb{R}^d, d \geq 2$. Si $k = \min(u, v, w)$ est sousharmonique sur D, alors $u < \min(v, w)$ ou $v < \min(u, w)$ ou $w < \min(u, v)$.
Démonstration. D'après le lemme 2, on a $(u < v$ et $u < w)$ ou $(v < u$ et $v < w)$ ou $(w < u$ et $w < v)$ partout sur D. Donc $u < \min(v, w)$ ou $v < \min(u, w)$ ou $w < \min(u, v)$.
Remarque 2. a) Soit U un ouvert dans $\mathbb{R}^d, (d \geq 2)$ vérifiant
$\forall u, v : U \to \mathbb{R}$ harmonique avec $\min(u, v)$ est sousharmonique sur U, alors $u = v$ ou $u < v$ ou $v < u$ partout sur U. Alors U est domaine dans $\mathbb{R}^d$.
En effet, supposons que $U = U_1 \cup U_2$ où U_1 et U_2 sont deux ouverts non vides

et disjoints. Soit
$$u_1 = \begin{cases} 0 & \text{sur } U_1 \\ 1 & \text{sur } U_2. \end{cases}$$
On définit aussi u_2 par $u_2 = 1 - u_1$. Alors $u = \min(u_1, u_2) = 0$ est harmonique sur U. Mais, on ne peut pas comparer u_1 et u_2 partout sur U.
b) Soit $u_1, ..., u_k$ des fonctions harmoniques réelles sur un domaine D dans $\mathbb{R}^d(d \geq 2$ et k $\geq 3)$. Supposons que $u_1, ..., u_k$ sont distinctes deux à deux et $\inf(u_1, ..., u_k)$ est sousharmonique sur D. En général, il n'existe pas une permutation $\sigma : \{1, ..., k\} \to \{1, ..., k\}$ avec $u_{\sigma(1)} < u_{\sigma(2)} < ... < u_{\sigma(k)}$.
Exemple. Soit $u_1(x, y) = x, u_2(x, y) = y$ et $u_3(x, y) = -1$ pour $(x, y) \in B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$. u_1, u_2 et u_3 sont harmoniques et distinctes deux à deux, $\inf(u_1, u_2, u_3) = u_3$ est harmonique sur $B(0, 1)$. Cependant, on n'a pas
$u_3 < u_1 < u_2$ ou $u_3 < u_2 < u_1$ sur $B(0, 1)$.
Observons que $\inf(u_1, u_2, u_3)$ est harmonique sur $B(0, 1)$ cependant $\inf(u_1, u_2)$ n'est pas sousharmonique sur $B(0, 1)$.
Notons aussi que si $u_1, ..., u_k$ sont harmoniques sur D et distinctes deux à deux avec $u_1 \leq u_2 \leq ... \leq u_k$ sur D. Alors $u_1 < u_2 < ... < u_k$ partout sur D.
Théorème 2. Soit D un domaine de $\mathbb{C}^n$, $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction analytique non constante. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*, \beta \in \mathbb{R}$ et p un polynôme analytique non constant sur $\mathbb{C}^m$. $F = \{(z, w) \in D \times \mathbb{C}^m \ / \ p(w) = f(z)\}$. $u_1(z, w) = \alpha \log \mid p(w) - f(z) \mid + \beta$ pour $(z, w) \in D \times \mathbb{C}^m$.
Soit $\varphi : D \times \mathbb{C}^m \to [-\infty, +\infty[$ une fonction psh et prh sur $D \times \mathbb{C}^m \backslash F$.
Supposons que $\min[u_1, \varphi]$ est psh sur $D \times \mathbb{C}^m$. Alors $\varphi = u_1 + c$ où $c : D \to \mathbb{R}$ est une fonction prh.
Démonstration. F étant fermé pluripolaire dans $D \times \mathbb{C}^m$, donc $D \times \mathbb{C}^m \backslash F$ est un domaine dans $D \times \mathbb{C}^m$. u_1 et φ sont prh avec $\min(u_1, \varphi)$ est psh sur $D \times \mathbb{C}^m \backslash F$, il résulte alors que $u_1 = \varphi$ ou $u_1 < \varphi$ ou $\varphi < u_1$ partout sur $D \times \mathbb{C}^m \backslash F$.
Si $u_1 = \varphi$ sur $D \times \mathbb{C}^m \backslash F$, alors $u_1 = \varphi$ sur $D \times \mathbb{C}^m$(on prend ici $c = 0$).
Si $u_1 < \varphi$ sur $D \times \mathbb{C}^m \backslash F$. Alors $u_1 \leq \varphi$ sur $D \times \mathbb{C}^m$. Pour tout z fixé dans D, on a $u_1(z, .) \leq \varphi(z, .)$ de plus $\varphi(z, .)$ est prh sur $\mathbb{C}^m \backslash \{w \in \mathbb{C}^m \ / \ p(w) = f(z)\}$. Donc $u_1(z, .) - \varphi(z, .) \leq 0$ et prh sur $\mathbb{C}^m \backslash \{w \in \mathbb{C}^m \ / \ p(w) = f(z)\}$ avec $\{w \in \mathbb{C}^m \ / \ p(w) = f(z)\}$ est pluripolaire fermé dans $\mathbb{C}^m$. Alors $[u_1(z, .) - \varphi(z, .)]$ se prolonge en une fonction négative et psh sur $\mathbb{C}^m$(notée encore $u_1(z, .) - \varphi(z, .)$). Il existe donc un unique réel négatif noté $c(z)$ avec $u_1(z, .) - \varphi(z, .) = c(z)$. Ceci permet donc de définir une application $c : D \to \mathbb{R}_-$.
La condition $u_1(z, w) - \varphi(z, w) = c(z)$, $\forall w \in \mathbb{C}^m$ avec $p(w) \neq f(z)$ implique que c est une fonction prh sur D.
Théorème 3. Soit D un domaine dans $\mathbb{C}^n$. $\psi : D \to [-\infty, +\infty[$,
$\varphi : D \times \mathbb{C} \to [-\infty, +\infty[$ deux fonctions.
(i) Supposons que $\{z \in D \ / \ \psi(z) = -\infty\}$ est pluripolaire dans D et $\max(-j, \psi)$ est psh sur D $(\forall j \geq 1)$. Alors ψ est une fonction psh sur D.
(ii) Soit $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction analytique, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$, $u_1(z, w) = \alpha \log \mid p(w) - f(z) \mid + \beta$, pour p polynôme analytique sur $\mathbb{C}^m$ et $(z, w) \in D \times \mathbb{C}$.
Supposons que $\max[u_1, \varphi]$ est psh sur $D \times \mathbb{C}$ pour tout p polynôme analytique

sur $\mathbb{C}^m$ et $\{(z,w) \in D \times \mathbb{C}^m \ / \ \varphi(z,w) = -\infty\}$ est pluripolaire. Alors φ est psh sur $D \times \mathbb{C}$.

Démonstration . (i) ψ est s.c.s sur D, en effet, pour $z^0 \in D$ soit $A \in \mathbb{R}$ avec $\psi(z^0) < A$. Soit $j_0 \in \mathbb{N}^*$ avec $-j_0 < A$. Alors $\max[-j_0, \psi(z^0)] < A$. $\max[-j_0, \psi]$ étant s.c.s sur D, donc il existe un ouvert V voisinage de z^0 avec $\max[-j_0, \psi] < A$ sur V. Donc $\psi < A$ sur V. Montrons que ψ vérifie l'inégalité de la moyenne.

Soit $z^0 \in D$ et fixons $r > 0$, $\overline{D}(z^0, r) \subset D$. On supposera sans perte de généralité que $n = 1$.

Si $\psi(z^0) = -\infty$, on a $-\infty = \psi(z^0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(z^0 + re^{i\theta})d\theta$.

Si $\psi(z^0) > -\infty$, alors il existe j_0 avec $-j_0 < \psi(z^0)$. Donc pour tout $j \geq j_0$, on a $\max[-j, \psi(z^0)] = \psi(z^0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \max[-j, \psi(z^0 + re^{i\theta})]d\theta$ et en ajoutant une constante réelle à ψ, on admet que $\psi < 0$ sur $\overline{D}(z^0, r)$. Il résulte alors que la suite $(\max[-j, \psi])_{j\geq 1}$ est négative décroissante. Donc

$$\lim_{j\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \max[-j, \psi(z^0 + re^{i\theta})]d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lim_{j\to+\infty} \max[-j, \psi(z^0 + re^{i\theta})]d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(z^0 + re^{i\theta})d\theta.$$

D' où $\psi(z^0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(z^0 + re^{i\theta})d\theta$ et par suite ψ est sh sur D.

Pour (ii), montrons d'abord que φ est s.c.s sur $D \times \mathbb{C}$. Soit $(z^0, w_0) \in D \times \mathbb{C}$. Soit $A \in \mathbb{R}$ avec $\varphi(z^0, w_0) < A$. On choisit un polynôme p analytique sur $\mathbb{C}^m$ avec $\alpha \log \mid p(w_0) - f(z^0) \mid + \beta = -\infty$. Donc $\max[u_1, \varphi] < A$ au voisinage de (z^0, w_0) et par suite $\varphi < A$ au voisinage de (z^0, w_0). Notons d'abord que si f est constante sur D, on choisit une suite de constantes $(p_j)_{j\geq 1}$ avec $p_j = f + e^{\frac{-j-\beta}{\alpha}}$. Alors $\alpha \log \mid p_j - f \mid + \beta = -j$ et par suite $\max[-j, \varphi]$ est psh sur $D \times \mathbb{C} (\forall j \geq 1)$, de plus $\{(z,w) \in D \times \mathbb{C} \ / \ \varphi(z,w) = -\infty\}$ est pluripolaire. D'après (i), φ est psh sur $D \times \mathbb{C}$.

Si f n'est pas constante sur D, on utilise une méthode plus générale, à savoir, la caractérisation des fonctions sousharmoniques à l'aide des majorantes harmoniques. On suppose que $n = 1$. Soit $(z^0, w_0) \in D \times \mathbb{C}, r > 0$ avec $\overline{D}(z^0, r) \subset D$. Soit h une fonction continue sur $\overline{D}(z^0, r)$ et harmonique sur $D(z^0, r)$ avec $\varphi(., w_0) \leq h$ sur $\partial D(z^0, r)$. On choisit un polynôme p analytique sur $\mathbb{C}$ avec $\alpha \log \mid p(w_0) - f(z) \mid + \beta \leq h(z)$ pour tout $z \in \overline{D}(z^0, r)$. Donc $\max[\alpha \log \mid p(w_0) - f(z) \mid + \beta, \varphi(z, w_0)] \leq h(z)$ pour tout $z \in \partial D(z^0, r)$.

D'où $\max[\alpha \log \mid p(w_0) - f(z) \mid + \beta, \varphi(z, w_0)] \leq h(z) (\forall z \in D(z^0, r)$ et par suite $\varphi(., w_0) \leq h$ sur $D(z^0, r)$.

Utilisant les transformations $\mathbb{C}$-linéaires sur $\mathbb{C}^{n+1}$ et compte tenu de l'hypothèse $\{(z,w) \in D \times \mathbb{C}^m \ / \ \varphi(z,w) = -\infty\}$ est pluripolaire, on démontre que φ est psh sur $D \times \mathbb{C}$.

On donne maintenant le résultat précis suivant.

Théorème 4. Soit $f_1, f_2, f_3 : D \to \mathbb{C}$ analytiques, D domaine dans $\mathbb{C}^n$. p_1, p_2 et p_3 trois polynômes analytiques non constants sur $\mathbb{C}^m$. α_1, α_2 et $\alpha_3 \in \mathbb{R}_+^*$, β_1, β_2 et $\beta_3 \in \mathbb{R}$. On note $u_j(z,w) = \alpha_j \log \mid p_j(w) - f_j(z) \mid + \beta_j$ et soit

$F_j = \{(z,w) \in D \times \mathbb{C}^m \ / \ p_j(w) = f_j(z)\}$ pour $j = 1, 2$ ou 3.
Pour $\{j,k,\lambda\} = \{1,2,3\}$, supposons que $u = \min(u_1, u_2, u_3)$ est prh sur $D \times \mathbb{C}^m \backslash (F_k \cup F_\lambda)$. Alors $u_j < \min(u_k, u_\lambda)$ sur $D \times \mathbb{C}^m \backslash (F_k \cup F_\lambda)$, de plus, $u = u_j$ sur D.
Démonstration. On suppose que $j = 1, k = 2, \lambda = 3$ et $m = 1$. Notons $A = \{(z,w) \in D \times \mathbb{C} \ / \ \mid p_2(w) - f_2(z) \mid^{\alpha_2} e^{\beta_2} = \mid p_3(w) - f_3(z) \mid^{\alpha_3} e^{\beta_3} > 0\}$ et $v = \min(u_2, u_3)$. D'après le théorème 1, $\min(u_2, u_3)$ est prh sur $D \times \mathbb{C}^m \backslash (A \cup F_2 \cup F_3)$. Supposons qu'il existe $(z^0, w_0) \in A$ avec $u_1(z^0, w_0) > v(z^0, w_0)$. Donc $u = v$ au voisinage de (z^0, w_0) et par suite v est prh au voisinage de (z^0, w_0). Ce qui est impossible. Donc $u_1(z^0, w_0) \leq v(z^0, w_0)$ et même $u_1(z^0, w_0) < v(z^0, w_0)$. En effet, supposons que $u_1(z^0, w_0) = v(z^0, w_0)$. Alors u n'est pas prh sur $D \times \mathbb{C} \backslash (F_2 \cup F_3)$. Il résulte que $u_1(z^0, w_0) < v(z^0, w_0)$. Il existe donc un ouvert $U \subset D \times \mathbb{C}, (z^0, w_0) \in U$ et $u < v$ sur U. Donc $u = u_1$ sur U. u étant prh sur $D \times \mathbb{C} \backslash (F_2 \cup F_3)$ et u_1 est prh sur $D \times \mathbb{C} \backslash F_1$. Donc u et u_1 sont prh sur le domaine $D \times \mathbb{C} \backslash (F_1 \cup F_2 \cup F_3)$ et $u = u_1$ sur U avec $(F_1 \cup F_2 \cup F_3)$ est fermé pluripolaire dans $D \times \mathbb{C}$. D' où $u = u_1$ sur $D \times \mathbb{C} \backslash (F_1 \cup F_2 \cup F_3)$ et par suite $u = u_1$ sur $D \times \mathbb{C}$. D'après la preuve du corollaire 1, on déduit que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$; $p_2 = c_2 p_1 + k, f_2 = c_2 f_1 + k_2$; $p_3 = c_3 p_1 + k_3$ et $f_3 = c_3 f_1 + k_3$ où $c_2, c_3, k_2, k_3 \in \mathbb{C}, c_2 \neq 0$ et $c_3 \neq 0$. On pourra aussi vérifier que $\beta_1 \leq \alpha_1 \log \mid c_2 \mid + \beta_2$ et $\beta_1 \leq \alpha_1 \log \mid c_3 \mid + \beta_3$. Notons aussi que $F_1 = F_2 = F_3$. Enfin, il s'ensuit que $u \in \mathrm{psh}(D \times \mathbb{C}) \cap \mathrm{prh}(D \times \mathbb{C} \backslash F_1)$.
Les développements ci-dessous permettent de généraliser un énoncé ultérieur de Abidi [1].
Théorème 5. Soit $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction, D domaine dans $\mathbb{C}^n$ et $\alpha \in]0,1[$. Notons $u(z,w) = \mid w - f(z) \mid^\alpha$ pour $(z,w) \in D \times \mathbb{C}$.
On a les équivalences suivantes
(i) f est analytique sur D;
(ii) u est psh sur $D \times \mathbb{C}$;
(iii) $v(z,w) = \mid w - f(z) \mid^\beta$ est psh sur $D \times \mathbb{C}, \forall \beta \in]0,1[$;
(iv) $\exists A \geq 0, B \geq 0, C > 0, \beta > 1$ et $\gamma \in]0,1[$ avec $k(z,w) = [A \mid w - f(z) \mid^\beta + B \mid w - f(z) \mid^\gamma + C \log(\mid w - f(z) \mid)]$ est psh sur $D \times \mathbb{C}$;
(v) u_1 est psh sur $D \times \mathbb{C}$ si $u_1(z,w) = \log(1 + a \mid w - f(z) \mid$ où $a > 0$;
(vi) f continue sur D et il existe une fonction $g : D \to \mathbb{C}$ analytique avec u_2 psh sur $D \times \mathbb{C} \backslash F$ où $u_2(z,w) = \min[\log \mid w - f(z) \mid, \log \mid w - g(z) \mid]$ pour $(z,w) \in D \times \mathbb{C}$ et $F = \{(z,w) \in D \times \mathbb{C} \ / \ \mid w - f(z) \mid = \mid w - g(z) \mid\}$.
Démonstration. Il est simple à vérifier que (i) implique les assertions (ii), (iii), (iv), (v) et (vi). Pour montrer que (ii) implique (i), notons que $u \in \mathrm{psh}(D \times \mathbb{C})$, donc $\varphi = u^{\frac{2}{\alpha}} \in \mathrm{psh}(D \times \mathbb{C})$.
Pour $(z,w) \in D \times \mathbb{C}$, $\varphi(z,w) = \mid w - f(z) \mid^2 = \mid w \mid^2 - \overline{w} f(z) - w \overline{f}(z) + \mid f(z) \mid^2$. Alors $\varphi(.,w)$ est psh sur $D, \forall w \in \mathbb{C}$.
Remarquons que $[\varphi(.,w) - \mid w \mid^2]$ est psh sur D pour tout $w \in \mathbb{C}$.
Notons que ψ, définie par $\psi(z,w) = \mid w - f(z) \mid$, est s.c.s sur $D \times \mathbb{C}$. Fixons $z^0 \in D, \epsilon > 0$ et posons $w_0 = f(z^0)$. Il existe alors $\delta > 0$ avec $z \in D$ et $\parallel z - z^0 \parallel + \mid w - w_0 \mid \leq \delta$ implique $\mid w - f(z) \mid < \epsilon$. En particulier, si $w = w_0$, on a $z \in D$ et $\parallel z - z^0 \parallel \leq \delta$ implique $\mid w_0 - f(z) \mid = \mid f(z^0) - f(z) \mid < \epsilon$. D' où

f est continue sur D. Soit $\theta \in C_c^\infty(D), \theta \geq 0$. Notons alors que la fonction k, donnée par
$k(w) = -\overline{w}\int f(z)\Delta\theta(z)dm_{2n}(z) - w\int \overline{f}(z)\Delta\theta(z)dm_{2n}(z) +$
$\int \mid f(z) \mid^2 \Delta\theta(z)dm_{2n}(z) \geq 0, (\forall w \in \mathbb{C})$.
Comme k est harmonique sur $\mathbb{C}$, alors k est constante sur $\mathbb{C}$ et par suite $k = k(0)$. Il résulte alors que $\overline{w}\int f(z)\Delta\theta(z)dm_{2n}(z) + w\int \overline{f(z)}\Delta\theta(z)dm_{2n}(z) = 0$ pour tout $w \in \mathbb{C}$. Si $w = 1$, on a Ré$[\int f(z)\Delta\theta(z)dm_{2n}(z)] = 0$ et si $w = i$, on a Im$[\int f(z)\Delta\theta(z)dm_{2n}(z)] = 0$. D' où $\int f(z)\Delta\theta(z)dm_{2n}(z) = 0$ pour toute fonction $\theta \in C_c^\infty(D), \theta \geq 0$. Donc f est harmonique sur D.
Soit $T_1 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ une transformation $\mathbb{C}-$ linéaire bijective. Considérons aussi $T : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ définie par $T(z, w) = (T_1(z), w)$ pour $(z, w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$. T est une transformation $\mathbb{C}-$ linéraire bijective sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$. $\varphi o T(z, w) = \varphi(T(z, w)) = \varphi(T_1(z), w) =\mid w - foT_1(z) \mid^2$. On vérifie par une manière analogue à la preuve précédente que foT_1 est harmonique sur $T_1^{-1}(D)$. D'après Lelong [10], $f \in$ prh(D). Ecrivons $f = p + iq$ où $p =$ Ré(f). Soit $z^0 \in D, r > 0$ avec $\overline{B}(z^0, r) \subset D$. Soit $w_1 = (p + i\theta)$ holomorphe sur $B(z^0, r)$ où $p =$ Ré(w_1). En ajoutant à θ une constante réelle, on suppose sans perte de généralité que $(\theta - q) > 0$ sur $B(z^0, \frac{r}{2})$. $\mid w_1 - f \mid^\alpha = (\theta - q)^\alpha$ est sousharmonique sur $B(z^0, \frac{r}{2})$. Notons par Δ le laplacien dans $\mathbb{C}^n$ et pour $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n; z_j = x_j + ix_{n+j}$ où $x_j, x_{n+j} \in \mathbb{R}(1 \leq j \leq n)$. On a

$$\Delta[(\theta - q)^\alpha] = \alpha(\Delta(\theta) - \Delta(q))(\theta - q)^{\alpha-1} + \alpha(\alpha - 1)\sum_{j=1}^{2n}[\frac{\partial(\theta - q)}{\partial x_j}]^2(\theta - q)^{\alpha-2} =$$

$$\alpha(\alpha - 1)\sum_{j=1}^{2n}[\frac{\partial}{\partial x_j}(\theta - q)]^2(\theta - q)^{\alpha-2} \geq 0.$$

D'autre part cette quantité est négative. Donc elle est nulle. Par suite on a, $\frac{\partial(\theta-q)}{\partial x_j} = 0$ pour tout $j = 1, ..., 2n$. Donc $(\theta - q)$ est constante sur $B(z^0, \frac{r}{2})$ et comme $(\theta - q)$ est analytique réelle sur $B(z^0, r)$, alors $(\theta - q)$ est constante sur $B(z^0, r)$. $q = \theta + c(c \in \mathbb{R})$, donc $f = p + iq = p + i\theta + ic = (w_1 + ic)$ est analytique sur $B(z^0, r)$. D'après cette preuve, (ii) implique (iii). Mais remarquons que (iii) implique (ii). D'où (i), (ii) et (iii) sont équivalentes. Pour (iv) implique (i), notons que si $A = B = 0$, cette assertion résulte de la condition (ii) implique (i).
Supposons que $A > 0$ et $B > 0$. On établit d'abord l'assertion suivante.
Soit $v_1 : D \to [0, +\infty[$ une fonction avec $[Av_1^\alpha + Bv_1^\gamma + C\log(v_1)]$ est psh sur D alors v_1 est psh sur D. En effet, si v_1 n'est pas s.c.s en $a \in D$, alors v_1^α, v_1^γ et $\log(v_1)$ ne sont pas s.c.s en a. Donc $[Av_1^\alpha + Bv_1^\gamma + C\log(v_1)]$ n'est pas s.c.s en a(ceci étant impossible). Supposons que $n = 1$ et $v_1^\alpha(a) > \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v_1^\alpha(a + re^{i\theta})d\theta$ pour $\overline{D}(a, r) \subset D(r > 0)$. Les applications $t \mapsto t^{\frac{\gamma}{\alpha}}$ et $t \mapsto \log(t)$ sont strictement croissantes et concaves sur $]0, +\infty[$. Il résulte alors que

$v_1^\gamma(a) > \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v_1^\gamma(a + re^{i\theta})d\theta$ et $\log(v_1(a)) > \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log(v_1(a + re^{i\theta}))d\theta$.

Donc
$Av_1^\alpha(a) + Bv_1^\gamma(a) + C\log(v_1)(a) > \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(Av_1^\alpha + Bv_1^\gamma + C\log(v_1))(a + re^{i\theta})d\theta$, ce qui est impossible. D'où v_1^α est sh sur D(et la preuve de l'assertion est terminée).
Les conditions ($A > 0$ et $B = 0$) ou ($A = 0$ et $B > 0$) résultent de la preuve précédente. Il résulte par suite que $k(z, w) =\mid w - f(z) \mid^\alpha$ est psh sur $D \times \mathbb{C}$. D'après le lemme 4 qui suivra, on a f est prh sur D. On applique maintenant le problème de plongement de la façon suivante. Notons $f = p + iq$ où $p = \text{Ré}(f)$ et pour $z^0 \in D, r > 0$ avec $B(z^0, r) \subset D$, soit $w_1 = (p + i\theta)$ analytique sur $B(z^0, r)$, $p = \text{Ré}(w_1)$. En ajoutant à θ une constante réelle convenable on suppose que $q(z^0) = \theta(z^0)$. Supposons que f n'est pas analytique sur D. Soit $k_1(z) = A \mid w_1(z) - f(z) \mid^\alpha + B \mid w_1(z) - f(z) \mid^\gamma +$
$C\log \mid w_1(z) - f(z) \mid, z \in B(z^0, r)$.
k_1 est psh ou $k_1 = -\infty$ sur $B(z^0, r)$. Remarquons qu'on a
$E = \{z \in B(z^0, r)/k_1(z) = -\infty\} = \{z \in B(z^0, r)/q(z) - \theta(z) = 0\}$ est fermé non polaire dans $B(z^0, r)$. En effet, par absurde, admettons que E est polaire. Notons que $\mid q - \theta \mid \geq 0$ harmonique sur $B(z^0, r)\backslash E$ et continue sur $B(z^0, r)$, donc $\mid q - \theta \mid$ est harmonique sur $B(z^0, r)$. Maintenant, on a $\inf\limits_{B(z^0, \frac{r}{2})} \mid q - \theta \mid = 0 = \mid (q - \theta)(z^0) \mid$ et par suite $\mid q - \theta \mid$ atteint son minimum en $z^0 \in B(z^0, \frac{r}{2})$. Donc $\mid q - \theta \mid = 0$ même sur $B(z^0, r)$. Il résulte que $E = B(z^0, r)$ est polaire dans $B(z^0, r)$. Ceci étant en contradiction avec l'hypothèse. Ainsi, E n'est pas polaire dans $B(z^0, r)$. Donc $k_1 = -\infty$ partout sur $B(z^0, r)$ et par suite, on a $\log \mid w_1 - f \mid = -\infty$ sur $B(z^0, r)$. Soit alors $f = w_1$ et ceci étant impossible.
Pour (v) implique (i), notons que u_1 est psh sur $D \times \mathbb{C}$ et il résulte que $-1 + e^{u_1(z,w)} = a \mid w - f(z) \mid$ est psh sur $D \times \mathbb{C}$. D'où s, donnée par $s(z, w) =\mid w - f(z) \mid$, est psh sur $D \times \mathbb{C}$. D'après la preuve de l'assertion (ii) implique (i), on a f est pluriharmonique sur D. On admet ici D simplement connexe et on note $f = p + iq; p = \text{Ré}(f)$. Soit $w_1 = (p + i\theta)$ analytique sur D où $p = \text{Ré}(w_1)$ et $\theta : D \to \mathbb{R}$ étant pluriharmonique. En ajoutant à θ une constante réelle, on admet que $(\theta - q) > 0$ sur $\overline{B}(z^0, r) \subset D(z^0 \in D$ et $r > 0)$. $\forall z \in B(z^0, r)$, $u_1(z, w_1(z)) = \log(1 + a(\theta - q))$ est plurisousharmonique sur $B(z^0, r)$. Pour le reste de cette preuve, on admet $n = 1$. On a

$\frac{\partial}{\partial z}\log(1 + a(\theta - q)) = \frac{a\frac{\partial}{\partial z}(\theta - q)}{q - \theta}$.

$\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}\partial z}\log(1 + a(\theta - q)) = \frac{-a\mid\frac{\partial}{\partial z}(\theta - q)\mid^2}{(q - \theta)^2} \leq 0$.

D'autre part $\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}\partial z}\log(1 + a(\theta - q)) \geq 0$.

Donc $\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}\partial z}\log(1 + a(\theta - q)) = 0$ et par suite $\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial z}$.

Comme θ et q sont à valeurs réelles, alors $(\theta - q)$ est constante, $q = \theta + c(c \in \mathbb{R})$. Donc $f = p + i(\theta + c) = (w_1 + ic)$ est analytique sur $D(z^0, r)$.
Pour (vi) implique (i), notons que si $F = D \times \mathbb{C}$, alors $D \times \mathbb{C}\backslash F = \emptyset$, d'où $f = g$

sur D. En effet, on a $\mid w - f(z) \mid = \mid w - g(z) \mid$ pour tout $(z, w) \in D \times \mathbb{C}$, donc $w - f(z) = e^{i\alpha(z)}(w - g(z))$ pour tout $w \in \mathbb{C}$(z étant fixé dans D), $\alpha(z) \in [0, 2\pi[$. Dérivons par rapport à w, on a $1 = e^{i\alpha(z)}$. D'où $f(z) = g(z)$ pour tout $z \in D$. En particulier, f est analytique sur D.
Si $F \neq D \times \mathbb{C}$. Soit $U = \{z \in D \ / \ f(z) \neq g(z)\}$, U est ouvert dans D. Notons $E = D \backslash U$. Soit $w_0 \in \mathbb{C}$ avec $\mid w_0 - f(z^0) \mid < \mid w_0 - g(z^0) \mid$(par exemple, on peut prendre $w_0 = f(z^0)$). Soit $r > 0$ avec $B(z^0, r) \subset D$ et pour tout $(z, w) \in B(z^0, r) \times D(w_0, r)$, on a $\mid w - f(z) \mid < \mid w - g(z) \mid$. Pour plus de simplicité, on suppose que $n = 1$. Alors $u_2(z, w) = \log \mid w - f(z) \mid$ est psh sur $D(z^0, r) \times D(w_0, r)$. D'après Abidi [1], f est analytique sur $D(z^0, r)$. Donc $(f - g)$ est analytique sur U et continue sur D. D'après le théorème de Rado(cf. Hervé [6]), $(f - g)$ est analytique sur D et par suite f est analytique sur D.
Lemme 4. Soit D un domaine dans $\mathbb{C}^n$, $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction, $u(z, w) = \mid w - f(z) \mid$ si $(z, w) \in D \times \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes
(i) f est prh sur D;
(ii) u est psh sur $D \times \mathbb{C}$;
(iii) $\exists \alpha \geq 1$ avec u^α est psh sur $D \times \mathbb{C}$;
(iv) $\exists \alpha \geq 1$ avec pour tout $w \in \mathbb{C}$, $(u(., w))^\alpha$ est psh sur D;
(v)$\exists \alpha \geq 1, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe non constante avec v, donnée par $v(z, w) = \mid g(w) - f(z) \mid^\alpha$ si $(z, w) \in D \times \mathbb{C}$, est psh sur $D \times \mathbb{C}$.
Démonstration . Il est clair que (i) implique les assertions (ii), (iii), (iv), et (v). Notons aussi la remarque suivante. D'après la preuve du théorème 5, si u est psh sur $D \times \mathbb{C}$, alors f est prh sur D. Donc (ii) implique (i).
Pour (iii) implique (i), soit $N \in \mathbb{N}$ avec $2N \geq \alpha$.
u^α étant psh, donc u^{2N} est psh sur $D \times \mathbb{C}$. u^α est s.c.s sur $D \times \mathbb{C}$, donc u est s.c.s sur $D \times \mathbb{C}$ et par suite d'après la preuve du théorème 5, f est continue sur D. Posons $g = f + \overline{f}$ et considérons $\mid w - f \mid^{2N} = [\mid w \mid^2 - \overline{w} f - w \overline{f} + \mid f \mid^2]^N$. Pour $w \in \mathbb{R}$, on a

$$\mid w - f \mid^{2N} = [w^2 - wg + \mid f \mid^2]^N = w^{2N} - N w^{2N-1} g + w^{2N-2} f_{2n-2} + ... + f_0$$

où $f_0, ..., f_{2N-2} : D \to \mathbb{R}$ continues et s'expriment en fonction des fonctions g et $\mid f \mid$. Notons Δ le laplacien par rapport à z. $\forall \varphi \in C_c^\infty(D), \varphi \geq 0$ on a

$$\int \mid w - f(z) \mid^{2N} \Delta\varphi(z) dm_{2n}(z) \geq 0.$$

Remarquons aussi que $\int w^{2N} \Delta\varphi(z) dm_{2n}(z) = 0$.
Il résulte que pour tout $w \in \mathbb{R}$,

$$-N w^{2N-1} \int g(z) \Delta\varphi(z) dm_{2n}(z) + w^{2N-2} \int f_{2N-2}(z) \Delta\varphi(z) dm_{2n}(z) + ... +$$

$$\int f_0(z) \Delta\varphi(z) dm_{2n}(z) \geq 0.$$

Notons aussi que si $p(t) = a_{2N-1} t^{2N-1} + ... + a_0$ est un polynôme à coefficients réels avec $p(t) \geq 0, (\forall t \in \mathbb{R})$. Alors $a_{2N-1} = 0$. Il résulte que $\int g(z) \Delta\varphi(z) dm_{2n}(z) = 0$ pour toute $\varphi \in C_c^\infty(D), \varphi \geq 0$. D'où g est harmonique sur D(g est continue

sur D).
Pour $w = it(t \in \mathbb{R})$, posons $k = \mathrm{Im}(f)$, alors k est continue sur D et on a

$$(\mid w \mid^2 - \overline{w} f - w \overline{f} + \mid f \mid^2)^N = (t^2 - 2tk + \mid f \mid^2)^N =$$

$$t^{2N} - 2Nt^{2N-1}k + t^{2N-2}k_{2n-2} + ... + k_0$$

où $k_0, ..., k_{2N-2}$ sont des fonctions à valeurs réelles s'exprimant en fonction de k et $\mid f \mid^2$(elles sont en particulier continues sur D). Par la même méthode ainsi décrite plus haut, on démontre que k est harmonique sur D.
D'où f est harmonique sur D.
Posons $F(z, w) =\mid w - f(z) \mid^{2N}$ si $(z, w) \in D \times \mathbb{C}$. Soit $T(z, w) = (T_1(z, w), w)$ où $T_1 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ est une transformation $\mathbb{C}-$linéaire sur $\mathbb{C}^n$.
$FoT(z, w) =\mid w - foT_1(z) \mid^{2N}$ si $(z, w) \in T_1^{-1}(D) \times \mathbb{C}$. FoT est psh sur $T_1^{-1}(D) \times \mathbb{C}$. D'après le raisonnement plus haut, on a foT_1 est harmonique sur $T_1^{-1}(D)$ pour toute transformation T_1 $\mathbb{C}-$ linéaire et bijective sur $\mathbb{C}^n$. D'après Lelong [10], $f \in \mathrm{prh}(D)$. A partir de cette preuve, il arrive que (iv) implique (i).
Pour (v) implique (i), notons que d'après le théorème de Picard, il existe $a \in \mathbb{C}$ avec $\mathbb{C}\backslash\{a\} \subset g(\mathbb{C})$. Considérons alors $(w_j)_{j\geq 1}$ et $(w'_j)_{j\geq 1}$ deux suites de nombres complexes avec $(g(w_j))_{j\geq 1} \subset \mathbb{R}$, $(g(w'_j))_{j\geq 1} \subset i\mathbb{R}$,
$\lim\limits_{j\to+\infty} g(w_{2j}) = \lim\limits_{j\to+\infty} ig(w'_{2j}) = +\infty$ et $\lim\limits_{j\to+\infty} g(w_{2j+1}) = \lim\limits_{j\to+\infty} ig(w'_{2j+1}) = -\infty$. On note aussi $h = f + \overline{f}$ et $k = f - \overline{f}$. On vérifie sans peine que f est continue sur D. En utilisant la suite $(w_j)_{j\geq 1}$ on démontre que h est harmonique sur D et aussi si on utilise la suite $(w'_j)_{j\geq 1}$, on montre que k est harmonique sur D. Utilisant les transformations $\mathbb{C}-$ linéaires bijectives sur $\mathbb{C}^n$, on montre que h et k sont pluriharmoniques sur D. Il s'ensuit que f est pluriharmonique sur D.
Concernant l'utilité de la fibration, on a l'énoncé suivant
Théorème 6. Soit $f, g : D \to \mathbb{C}$ analytiques non constantes, D domaine dans $\mathbb{C}^n$. Soit $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$, $\beta, \delta \in \mathbb{R}$, on pose $u_1(z, w) = \alpha \log \mid w - f(z) \mid +\beta$ et $v_1(z, w) = \gamma \log \mid w - g(z) \mid +\delta$ si $(z, w) \in D \times \mathbb{C}$. Soit $u = \inf(u_1, v_1)$ et $v = \sup(u_1, v_1)$. On note $E = \{(z, w) \in D \times \mathbb{C} \ / \ u_1(z, w) = v_1(z, w)\}$ et si $w \in \mathbb{C}$, $E(w) = \{z \in D \ / \ u_1(z, w) = v_1(z, w)\}$.
Alors on a les propriétés suivantes
(a) Pour $w \in \mathbb{C}$, on note $A(w) = \{z \in D \ / \ u(., w)$ est psh au voisinage de $z\}$ et $A(z) = \{w \in \mathbb{C} \ / \ u(z, .)$ est psh au voisinage de $w\}$ si $z \in D$ et $A = \{(z, w) \in D \times \mathbb{C} \ / \ u$ est psh au voisinage de $(z, w)\}$.
(i) $A(w) = D\backslash E(w), \forall w \in \mathbb{C}$ si et seulement si ($\alpha \neq \gamma$ et $f \neq g$) ou ($\alpha = \gamma$ et $f \neq g$).
(ii) ($A(z) = \mathbb{C}\backslash E(z), \forall z \in D$) si et seulement si ($A(w) = D\backslash E(w), \forall w \in \mathbb{C}$).
(iii) Si D est pseudoconvexe, alors $A(w)$ est un ouvert pseudoconvexe, $\forall w \in \mathbb{C}$.
(iv) ($A(w) = D, \forall w \in \mathbb{C}$) si et seulement si ($\alpha = \gamma$ et $f = g$ non constante).
(b) Soit $B = \{(z, w) \in D \times \mathbb{C} \ / \ v$ prh au voisinage de$(z, w)\}$. Alors $B \subset A$.
On note Γ_1 et Γ_2 les graphes de f et g respectivement.
$A = (D \times \mathbb{C}\backslash E) \cup (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ si et seulement si ($\alpha \neq \gamma$ et $f = g$).

$\{z \in D \ / \ A(z) = \mathbb{C}\}$ est vide ou analytique ou égale à D. De plus, $\{z \in D \ / \ A(z) = \mathbb{C}\backslash E(z)\} = \emptyset$ si et seulement si $((\alpha = \gamma$ et $f = g)$ ou $(\alpha \neq \gamma$ et $f = g))$.

Démonstration. (a) Pour (i), supposons que $A(w) = D\backslash E(w)$ pour tout $w \in \mathbb{C}$. Admettons que $\alpha = \gamma$. Montrons que $f = g$. Par l'absurde supposons que $f = g$ sur D. Donc $u(z, w) = \alpha \log \mid w - f(z) \mid + \inf(\beta, \delta)$ si $(z, w) \in D \times \mathbb{C}$. Il résulte que $u(., w)$ est psh sur D. Mais $E(w) = \{z \in D \ / \ \mid w - f(z) \mid^{\alpha} e^{\beta} = \mid w - f(z) \mid^{\alpha} e^{\delta}\}$ et pour $w \in f(D)$, $\{z \in D \ / \ f(z) = w\}$ est non vide et inclus dans $E(w)$. Donc $A(w) = D \neq D\backslash E(w)$. D'où $f \neq g$. Maintenant, admettons que $\alpha \neq \gamma$. Si $f = g$ sur D, on a pour $w \in f(D)$, $A(w) = [D\backslash E(w)] \cup \Gamma_1(w) \neq D\backslash E(w)$, où Γ_1 est le graphe de f(car f non constante). Il résulte enfin que $f \neq g$. Pour la réciproque, notons que si $\alpha \neq \gamma$ et $f \neq g$, d'après le théorème 1, $A = D \times \mathbb{C}\backslash E$ est le plus grand ouvert sur lequel u est psh. Donc $A(w)$ est le plus grand ouvert sur lequel $u(., w)$ est psh(pour tout $w \in \mathbb{C}$). D'où $A(w) = D\backslash E(w)$. De même si $\alpha = \gamma$ et $f \neq g$.

Pour (ii), supposons d'abord que $A(z) = \mathbb{C}\backslash E(z), \forall z \in D$. Si $\alpha = \gamma$ et $f = g$, alors $u(z, w) = \alpha \log \mid w - f(z) \mid + \inf(\beta, \delta)$, donc $A(z) = \mathbb{C}$ et $\{w \in \mathbb{C} \ / \ w = f(z)\} = \{f(z)\} \subset E(z)$ pour tout $z \in D$. Donc $A(z) \neq \mathbb{C}\backslash E(z)$ et par suite, on doit avoir $\alpha \neq \gamma$ ou $f \neq g$.

La situation $\alpha \neq \gamma$ et $f = g$ étant impossible, car on a
$E = \{(z, w) \in D \times \mathbb{C} \ / \ \mid w - f(z) \mid^{\alpha} e^{\beta} = \mid w - f(z) \mid^{\gamma} e^{\delta}\} = \{(z, w) \in D \times \mathbb{C} \ / \ w = f(z)\} \cup \{(z, w) \in D \times \mathbb{C} \ / \ \mid w - f(z) \mid^{\alpha - \gamma} = e^{\delta - \beta}\}$. Donc $A = (D \times \mathbb{C}\backslash E) \cup \Gamma_1$ où Γ_1 est le graphe de f. Donc pour tout $z \in D$, $A(z) = [D\backslash E(z)] \cup \{f(z)\} \neq D\backslash E(z)$(car $f(z) \in E(z)$). Donc $f \neq g$. Dans ce cas on vérifie que $A(z) = D\backslash E(z), \forall z \in D$.

Si $\alpha = \gamma$, alors $f \neq g$ et on vérifie aussi que $A(z) = \mathbb{C}\backslash E(z), \forall z \in D$. Réciproquement, supposons que $\alpha \neq \gamma$ et $f \neq g(\alpha > 0$ et $\gamma > 0)$, d'après le théorème 1, $A = D \times \mathbb{C}\backslash E$. Donc $A(z) = D\backslash E(z), \forall z \in D$(la même conclusion est obtenue si $\alpha = \gamma$ et $f \neq g$).

Pour (iii), d'après le théorème 1, A est pseudoconvexe dans $D \times \mathbb{C}$. D'après Hörmander [7], $A(w)$ est un ouvert pseudoconvexe, pour tout $w \in \mathbb{C}$.

Pour (iv), si $A(w) = D, \forall w \in \mathbb{C}$.
$A(w) = D = \{z \in D \ / \ u(., w)$ est psh au voisinage de $z\}$. Donc $u(., w)$ est psh sur $D, \forall w \in \mathbb{C}$. Supposons que $\alpha \neq \gamma$. Si $f = g$, alors $A = (D \times \mathbb{C}\backslash E) \cup \Gamma_1$ où Γ_1 est le graphe de f. Comme f n'est pas constante, alors $A(w) = [D\backslash E(w)] \cup \{z \in D \ / \ f(z) = w\} \neq D$ car $E(w) \neq \{z \in D \ / \ f(z) = w\}$. Aussi le cas où $f \neq g$ est impossible. En effet, $f \neq g$, donc $A = D \times \mathbb{C}\backslash E$. On choisit maintenant $w \in f(D)$, alors $E(w) \neq \emptyset$ et par suite $A(w) \neq D$. D'où $\alpha = \gamma$. Si $f \neq g$, alors $A(w) = D\backslash E(w), \forall w \in \mathbb{C}$. Mais si $w = f(z^0)$ où $z^0 \in D$, alors $E(w) \neq \emptyset$ et par suite $A(w) \neq D$. Ceci étant impossible. Ainsi, $\alpha = \gamma$ et $f = g$ non constante sur D. Pour la réciproque, on a $\alpha = \gamma$ et $f = g$ non constante, alors $A(w) = D$, pour tout $w \in \mathbb{C}$. Remarquons que si $f = g$ est constante sur D l'assertion (iv) n'est pas vraie.

(b) Remarquons que $B = D \times \mathbb{C}\backslash E$ si $\alpha \neq \gamma$ et $B = D \times \mathbb{C}\backslash \Gamma_1$ si $\alpha = \gamma$ et $f = g$.
Si $\alpha \neq \gamma$, alors $B = D \times \mathbb{C}\backslash E \subset A$.

Pour le cas $\alpha = \gamma$, on a si $f = g$, alors $A = D \times \mathbb{C}$ et $B = D \times \mathbb{C}\backslash\Gamma_1$, donc $B \subset A$. Si $f \neq g$, on a $B = D \times \mathbb{C}\backslash E = A$. D'où $B \subset A$. On vérifie sans peine que $A = (D \times \mathbb{C}\backslash E) \cup (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ si et seulement si $\alpha \neq \gamma$ et $f = g$.

Maintenant caractérisons $\{z \in D \ / \ A(z) = \mathbb{C}\}$. Soit $z^0 \in D$. Supposons que $\alpha = \gamma$. Si $f(z^0) = g(z^0)$, alors $A(z^0) = \mathbb{C}$. Plus exactement, si $f \neq g$, alors $\{z \in D \ / \ A(z) = \mathbb{C}\} \subset \{z \in D \ / \ f(z) = g(z)\}$. Donc $\{z \in D \ / \ A(z) = \mathbb{C}\}$ est un ensemble analytique non vide. Le cas où $f = g$ sur D implique que $\{z \in D \ / \ A(z) = \mathbb{C}\} = D$.

Si $f(z^0) \neq g(z^0)$, alors $A(z^0) \neq \mathbb{C}$. Supposons que $\alpha = \gamma$ et $f(z) = g(z), \forall z \in D$. Alors $A(z) \neq \mathbb{C}, \forall z \in D$. Donc $\{z \in D \ / \ A(z) = D\} = \emptyset$.

Le cas où $\alpha \neq \gamma$ et $f(z^0) = g(z^0)$ implique $A(z^0) \neq \mathbb{C}$.

Si $f(z^0) \neq g(z^0)$, alors $A(z^0) \neq \mathbb{C}$. Pour la dernière assertion, supposons que $\alpha = \gamma$ et $f = g$. $\forall z \in D, A(z) = \mathbb{C}$ et $E(z) \neq \emptyset$. Donc $A(z) \neq \mathbb{C}\backslash E(z)$.

Si $\alpha \neq \gamma$ et $f = g$, on a $E(z) = \{w \in \mathbb{C} \ / \ \mid w - f(z) \mid^\alpha e^\beta = \mid w - f(z) \mid^\gamma e^\delta\}$, donc $\{w \in \mathbb{C} \ / \ w = f(z)\} = \{f(z)\} \subset E(z)$ pour $z \in D$. Remarquons en fait que $A(z) = [\mathbb{C}\backslash E(z)] \cup \{f(z)\} \neq \mathbb{C}\backslash E(z)$. La réciproque est triviale.

3. Fonctions holomorphes et une classe de fonctions harmoniques.

On étudie dans ce paragraphe une classe importante de fonctions harmoniques caractérisant les fonctions analytiques à l'aide d'une hypothèse importante en analyse complexe. D'autre part, on donne un exemple d'un sous-ensemble E fermé non polaire dans $\mathbb{C}$ avec $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \ / \ (w - f(z)) \in E\}$ non pluripolaire, $m_2(E) = 0$, cependant f est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Ensuite, on exhibe un exemple d'une fonction $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ harmonique non constante telle que si la fonction u, définie sur $\mathbb{C}^2$ par $u(z, w) = h(w - f(z)) + h(\overline{w} - f(z))$, est plurisousharmonique sur $\mathbb{C}^2$ où $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continue. Alors, f est constante si $\cos(f_2) = 0$ où $f_2 = \mathrm{Im}(f)$.

Définition. Soit $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ harmonique. On dit que h "produit" les fonctions analytiques si

Pour tout D domaine dans $\mathbb{C}^n$, pour toute $f : D \to \mathbb{C}$ continue, la fonction u, définie sur $D \times \mathbb{C}$ par $u(z, w) = h(w - f(z))$, est psh sur $D \times \mathbb{C}$ implique que f est analytique sur D.

Le théorème suivant caractérise les fonctions harmoniques produisant les fonctions analytiques.

Théorème 7. Soit $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ harmonique. On a l'équivalence suivante

(i) h produit les fonctions analytiques;

(ii) h est le réel d'une fonction holomorphe non affine sur $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire h n'est pas affine sur $\mathbb{C}$).

Démonstration. (i) implique (ii). Supposons que h est le réel d'une fonction holomorphe affine. Donc, il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ avec $h(z) = \alpha x + \beta y + \gamma$ si $z = (x + iy) \in \mathbb{C}$ avec $x = \text{Ré}(z)$. Posons $w = (x_1 + iy_1) \in \mathbb{C}$, $x_1 = \text{Ré}(w)$ et $f(z) = \overline{z}$ (c'est clair que f n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$).

$h(w - f(z)) = \alpha(x_1 - x) + \beta(y_1 + y) + \gamma = u(z, w)$. u est même prh sur $\mathbb{C}^2$. Ce qui contredit (i).

(ii)implique (i). Notons $h = \text{Ré}(g)$, g holomorphe non affine sur $\mathbb{C}$. Montrons que si $f : D \to \mathbb{C}$ continue (D domaine dans $\mathbb{C}^n$) avec $h(w - f(z))$ est psh sur $D \times \mathbb{C}$, alors f est analytique sur D. Utilisant le théorème de Hartogs (cf.

Hörmander [10]), on se ramène à $n = 1$.
Remarquons d'abord que
$$\frac{\partial^2 h}{\partial w \partial \bar{w}} = 0.$$

Soit $z^0 \in D$, $r > 0$ avec $\overline{D}(z^0, r) \subset D$. Soit $\varphi_1 \in C_c^\infty(D(z^0, r))$, $\varphi_2 \in C_c^\infty(\mathbb{C})$; $\varphi_1 \geq 0$ et $\varphi_2 \geq 0$. Posons $\varphi(z, w) = \varphi_1(z)\varphi_2(w)$ et $A = D(z^0, r) \times \mathbb{C}$.
Il résulte alors que

$\int_A h(w - f(z)) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{w} \partial w}(z, w) dm_4(z, w) =$

$\int_{D(z^0,\, r)} \varphi_1(z) (\int h(w - f(z)) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \bar{w} \partial w}(w) dm_2(w)) dm_2(z) = 0.$

Comme $(z, w) \mapsto h(w - f(z))$ est psh alors, pour tout b_1, $b_2 \in \mathbb{C}$, on a

$\int_A h(w - f(z)) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{z} \partial z}(z, w) dm_4(z, w) b_1 \overline{b_1} + 2\text{Ré}(\int_A h(w - f(z)) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{z} \partial w}(z, w) dm_4(z, w) \overline{b_1} b_2)$

$\geq 0.$

Fixons $b_1 = 1$. Il arrive que

$\int_A h(w - f(z)) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{z} \partial z}(z, w) dm_4(z, w) + 2\text{Ré}(\int_A h(w - f(z)) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{z} \partial w}(z, w) dm_4(z, w) b_2)$

≥ 0, pour tout $b_2 \in \mathbb{C}$. Donc
$$\int_A h(w - f(z)) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{z} \partial w}(z, w) dm_4(z, w) = 0 \ (1).$$

Soit $s > 0$ vérifiant $\varphi_2(w) = 0$ pour tout $w \in \mathbb{C} \backslash D(0, s)$. Remarquons que pour tout $z \in D(z^0, r)$, la fonction
$$w \mapsto [h(w - f(z)) \frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{z}}(z) \varphi_2(w)]$$

est de classe C^∞ et à support compact dans $D(0, s)$. Donc d'après la formule de Stokes, on a
$$\int_{D(0,s)} \frac{\partial}{\partial w} [h(w - f(z)) \frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{z}}(z) \varphi_2(w)] dm_2(w) = 0$$

$$= \int_{D(0,s)} [\frac{\partial h}{\partial w}(w - f(z)) \varphi_2(w) + h(w - f(z)) \frac{\partial \varphi_2}{\partial w}(w)] \frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{z}}(z) dm_2(w).$$

Donc
$$\int_{D(0,s)} [h(w - f(z)) \frac{\partial \varphi_2}{\partial w}(w) \frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{z}}(z) dm_2(w)$$

Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, Vol. 81, 2012, p. 50 - 74

$$= -\int_{D(0,s)} \frac{\partial h}{\partial w}(w - f(z))\varphi_2(w)\frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{z}}(z)dm_2(w).$$

D'après (1), on a

$$\int\int \frac{\partial h}{\partial w}(w - f(z))\varphi_2(w)\frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{z}}(z)dm_2(z)dm_2(w)$$

$$= \int \varphi_2(w)[\int \frac{\partial h}{\partial w}(w - f(z))\frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{z}}(z)dm_2(z)]dm_2(w) = 0;$$

pour toute $\varphi_2 \in C_c^\infty(\mathbb{C})$.
Donc,

$$\int \frac{\partial h}{\partial w}(w - f(z))\frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{z}}(z)dm_2(z) = 0$$

pour toute $\varphi_1 \in C_c^\infty(D(z^0, r))$, $\varphi_1 \geq 0$.
Soit maintenant $\varphi_1 \in C_c^\infty(D(z^0, r))$, φ_1 à valeurs réelles et de signe quelconque. Montrons que $\int \frac{\partial h}{\partial w}(w - f(z))\frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{z}}(z)dm_2(z) = 0$.
Soit $\theta \in C_c^\infty(D(z^0, r))$, $\theta \geq 0$ et $\theta \geq -\varphi_1$. Donc
$\int \frac{\partial h}{\partial w}(w - f(z))\frac{\partial \theta}{\partial \bar{z}}(z)dm_2(z) = 0$.
Soit $\psi = \theta + \varphi_1$; alors $\psi \in C_c^\infty(D(z^0, r))$ et $\psi \geq 0$. Donc

$$\int \frac{\partial h}{\partial w}(w - f(z))\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}(z)dm_2(z) = 0$$

$$= \int \frac{\partial h}{\partial w}(w - f(z))\frac{\partial \theta}{\partial \bar{z}}(z)dm_2(z) + \int \frac{\partial h}{\partial w}(w - f(z))\frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{z}}(z)dm_2(z)$$

$$= \int \frac{\partial h}{\partial w}(w - f(z))\frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{z}}(z)dm_2(z).$$

Posons pour simplifier $k = \frac{\partial h}{\partial w}$ (k est holomorphe sur $\mathbb{C}$). On a
$\int k(w - f(z))\frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{z}}(z)dm_2(z) = 0$, pour toute $\varphi_1 \in C_c^\infty(D(z^o, r))$.
Donc $z \mapsto k(w - f(z))$ est holomorphe sur $D(z^0, r)$, $(\forall w \in \mathbb{C})$.
Posons $F(z, w) = k(w - f(z))$ pour $(z, w) \in D(z^0, r) \times \mathbb{C}$.
$F(., w)$ et $F(z, .)$ sont analytiques respectivement sur $D(z^0, r)$ et $\mathbb{C}$ et par suite d'après le théorème de Hartogs(cf. Hörmander [10]), F est holomorphe sur $D(z^0, r) \times \mathbb{C}$. Comme $h = \text{Ré}(g)$ où g est analytique non affine sur $\mathbb{C}$, alors $\frac{\partial h}{\partial w} = k$ analytique non constante sur $\mathbb{C}$. Donc, il existe $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$ avec $k : D(a, R) \to \mathbb{C}$ est injective. Soit $w_0 \in \mathbb{C}$ avec $[w_0 - f(z^0)] \in D(a, R)$ et choisissons $r_1 \in]0, r]$ avec pour tout $(z, w) \in D(z^0, r_1) \times D(w_0, r_1)$, on a $[w - f(z)] \in D(a, R)$ (f étant continue sur D). Donc $w - f(z) = k^{-1}oF(z, w)$ et par suite $f(z) = w - k^{-1}oF(z, w)$ pour tout $(z, w) \in D(z^0, r_1) \times D(w_0, r_1)$. D'où f est analytique sur $D(z^0, r_1)$.
Quelques extensions. Soit $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ harmonique.
a) hog caractérise les fonctions holomorphes(pour g fonction analytique sur $\mathbb{C}$) si et seulement si h est affine non constante et g non affine sur $\mathbb{C}$ **ou** h non affine

et g non constante.
On pourra étudier aussi log $\mid g_1 o g_2 \mid$, avec g_1 et g_2 analytiques sur $\mathbb{C}$ et $g_1 \neq 0$.
b) Notons que si h n'est pas affine sur $\mathbb{C}$ alors h n'est ni convexe ni concave sur $\mathbb{C}$. Donc $h(w - \overline{z})$ n'est pas psh dans $\mathbb{C}^2$. Il résulte que $h(w - g(\overline{z}))$ n'est pas psh sur $\mathbb{C}^2$ pour toute fonction $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytique non constante.
c) Considérons la fonction $\mid w - \overline{z} \mid \log \mid w - \overline{z} \mid$ qui est une fonction psh dans $\mathbb{C}^2 \backslash A$, avec $A = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \ / \ \mid w - \overline{z} \mid \geq \frac{1}{e} \}$. Notons que $\log \mid w - \overline{z} \mid$ n'est pas psh au voisinage de tout point de $\mathbb{C}^2 (z \mapsto \overline{z}$ n'est pas analytique dans $\mathbb{C})$, cependant le produit (non constant) précédent peut être une fonction psh dans des domaines non vides de $\mathbb{C}$. Notons aussi que $\mid w - \overline{z} \mid^l \log \mid w - \overline{z} \mid$ n'est pas psh dans $\mathbb{C}^2$ pour tout réel $l > 1$.
En réalité pour $v(z, w) = \mid w - \overline{z} \mid^\alpha, (z, w) \in \mathbb{C}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ on a (v est psh sur $\mathbb{C}^2$ si et seulement si $\alpha \geq 1$).
On donne maintenant un exemple d'un sous-ensemble E fermé non polaire dans $\mathbb{C}$ avec $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \ / \ (w - f(z)) \in E\}$ non pluripolaire, $m_2(E) = 0$, cependant f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
Exemple . Soit $E = \mathbb{R} \times \{0\}$. E est fermé non polaire dans $\mathbb{C}$. Soit $f(z) = z$ pour $z \in \mathbb{C}$. Si $w \in \mathbb{C}$, on écrit $z = x + iy$ et $w = x_1 + iy_1$, où $x = \text{Ré}(z)$ et $x_1 = \text{Ré}(w)$. $F = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \ / \ (w - f(z)) \in E\} =$
$\{(x + iy, x_1 + iy_1) \in \mathbb{C}^2 \ / \ y_1 = y\} = \{(x + iy, x_1 + iy) \ / \ x, x_1, y \in \mathbb{R}\}$. Désignons par Cap* la capacité logarithmique extérieure sur $\mathbb{C}$(cf. [2], [13]) et H^2 la mesure 2-dimensionnelle de Hausdorff(cf. [3], [15]).
$H^2(\{z \in \mathbb{C} \ / \ \text{Cap}^*(\{w \in \mathbb{C} \ / \ (z, w) \in F\}) > 0\}) =$
$H^2(\{z \in \mathbb{C} \ / \ \text{Cap}^*(\{x_1 \ / \ x_1 \in \mathbb{R}\}) > 0\}) = H^2(\mathbb{C}) > 0$.
Il résulte que $C^2(E) > 0$ où C^2 est la précapacité de J. Rühentaus(cf. [12]). Donc F n'est pas polaire dans $\mathbb{C}^2$ et par suite F n'est pas pluripolaire dans $\mathbb{C}^2$.
Proposition 1. Soit $h(w) = e^a \cos(b) = \text{Ré}(e^w)$ si $w = (a + ib) \in \mathbb{C}, a = \text{Ré}(w)$ et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continue.
Supposons que u, définie sur $\mathbb{C}^2$ par $u(z, w) = h(w - f(z)) + h(\overline{w} - f(z))$ est psh sur $\mathbb{C}^2$. Alors, f est constante sur $\mathbb{C}$ si $\cos(f_2) \neq 0$ où $f_2 = \text{Im}(f)$.
Démonstration. Notons $f = f_1 + if_2 (f_1 = \text{Ré}(f))$.
$u(z, w) = e^{a - f_1(z)}[\cos(b - f_2(z)) + \cos(b + f_2(z))]$. Alors, pour toute $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$, $\varphi \geq 0$, on a

$\int e^{a - f_1(z)} \cos(b) \cos(f_2(z)) \Delta\varphi(z) dm_2(z) \geq 0, (\forall a, b \in \mathbb{R})$.

Donc $\int e^{a - f_1(z)} \cos(f_2(z)) \Delta\varphi(z) dm_2(z) = 0$ et par suite $e^{-f_1} \cos(f_2)$

est harmonique sur $\mathbb{C}$.

Remarquons que $\frac{\partial^2}{\partial \overline{w} \partial w}[h(w - f(z)) + h(\overline{w} - f(z))] = 0$; aussi

$\frac{\partial^2}{\partial \overline{z} \partial z}[h(w - f(z)) + h(\overline{w} - f(z))] = 0$. Donc $\frac{\partial}{\partial w}[h(w - f(z)) + h(\overline{w} - f(z))]$

est analytique par rapport à $z, \forall w \in \mathbb{C}$.

$h(w - f(z)) = \frac{1}{2}[e^{w-f(z)} + e^{\overline{w}-\overline{f(z)}}]$, donc

$\frac{\partial}{\partial w}[e^{(w-f(z))} + e^{(\overline{w}-\overline{f(z)})} + e^{(\overline{w}-f(z))} + e^{(w-\overline{f(z)})}] = [e^{(w-f(z))} + e^{(w-\overline{f(z)})}]$

est holomorphe par rapport à z. D'où $\varphi(z) = e^{w-f_1(z)}\cos(f_2(z))$ est holomorphe. Mais, si $w = 0$, alors $e^{-f_1}\cos(f_2)$ est analytique et à valeurs réelles. Donc, elle est constante.
Si f_1 est constante, alors f_2 est constante et par suite f est constante sur $\mathbb{C}$.
Si f_1 n'est pas constante, alors $\cos(f_2) = 0$ ce qui est impossible.
Théorème 8. Soit $f_1, f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ harmoniques. On suppose que $g = f_1 f_2$ est analytique non constante.
Alors, f_1 et f_2 sont analytiques sur $\mathbb{C}$.
Démonstration. Soit $E = \{z \in \mathbb{C} / \frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}} = 0\}$, E est fermé dans $\mathbb{C}$.
Supposons que E n'est pas polaire dans $\mathbb{C}$. Notons que $\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}}$ est antiholomorphe sur $\mathbb{C}$, donc $E = \mathbb{C}$. Il s'ensuit que f_1 est analytique sur $\mathbb{C}$. Donc f_2 est analytique sur $\mathbb{C}$.
Supposons que E est fermé polaire dans $\mathbb{C}$(par l'absurde).
Alors, $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = f_1\frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}} + f_2\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}}$, donc
$f_2 = -f_1\frac{\frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}}}{\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}}}$ sur $\mathbb{C}\backslash E$.
Aussi, on a $\frac{\partial g}{\partial z} = f_1\frac{\partial f_2}{\partial z} + f_2\frac{\partial f_1}{\partial z} = -2f_1\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}}}{\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}}} \neq 0$ sur $\mathbb{C}\backslash E$.
Donc $f_1\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}}}{\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}}}$ est analytique non nulle sur $\mathbb{C}\backslash E$.
Remarquons que $\frac{\partial f_1}{\partial z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
Il résulte que $f_1\frac{\frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}}}{\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}}}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash E$.
Dérivons par rapport à z, il arrive que

$$\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}}}{\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}}}$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash E$. Or $\frac{\partial f_1}{\partial z}$ est holomorphe et $\frac{\frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}}}{\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}}}$ est antiholomorphe sur le domaine $\mathbb{C}\backslash E$;
donc $\frac{\partial f_1}{\partial z} = 0$ ou $\frac{\frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}}}{\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}}} = c\,; c \in \mathbb{C}$.
L'hypothèse $\frac{\partial f_1}{\partial z} = 0$ étant impossible , car si $\frac{\partial f_1}{\partial z} = 0$, alors $g = f_1 f_2$ et par suite $\frac{\partial g}{\partial z} = f_1\frac{\partial f_2}{\partial z}$ est holomorphe non nulle. Comme $\frac{\partial f_2}{\partial z}$ est holomorphe, alors f_1 est holomorphe. Par suite on a $\frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}} = 0$ donc f_1 est constante.
Ainsi $\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}} = 0$ et on conclut que $E = \mathbb{C}$. Contredisant l'hypothèse E est polaire dans $\mathbb{C}$.
D'où $\frac{\partial f_1}{\partial z} \neq 0$ et il résulte que $\frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}} = c\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}}$ même sur $\mathbb{C}$. Donc $f_2 = cf_1 + \varphi$ où φ est analytique sur $\mathbb{C}$. $f_1 f_2 = f_1(cf_1 + \varphi) = c{f_1}^2 + f_1\varphi = g$.
Si $c = 0$, alors f_2 est holomorphe et par suite f_1 est holomorphe. Ce qui contredit l'hypothèse E est polaire dans $\mathbb{C}$.
Si $c \neq 0$; $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 2cf_1\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}} + \varphi\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}} = 0$, donc $\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}}[2cf_1 + \varphi] = 0$.

$\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}} \neq 0$, donc $f_1 = \frac{\varphi}{-2c}$ est analytique sur $\mathbb{C}$. Ce qui est en contradiction avec E polaire dans $\mathbb{C}$. Ainsi, l'hypothèse E polaire dans $\mathbb{C}$ est impossible.
On sait que si f est analytique sur $\mathbb{C}$ (ou sur un domaine inclus dans $\mathbb{C}$), alors f est harmonique. La réciproque est donnée par le théorème suivant.
Théorème 9. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction harmonique. On a les équivalences suivantes
(i) f est analytique sur $\mathbb{C}$;
(ii) Pour toute $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytique, $g \neq f$, alors $\{z \in \mathbb{C}/f(z) = g(z)\}$ est polaire dans $\mathbb{C}$;
(iii) $\forall\, z^0 \in \mathbb{C}, \forall\, r > 0, \forall\, z \in D(z^0, r)$, on a $\mid f(z) \mid \leq \frac{1}{2\pi} \mid \int_{\partial D(z^0,\, r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \mid$;
(iv) $\forall\, z^0 \in \mathbb{C}, \forall\, r > 0, \forall\, z \in D(z^0, r)$, on a $\mid f(z) \mid = \frac{1}{2\pi} \mid \int_{\partial D(z^0,\, r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \mid$;
(v) $\forall\, z^0 \in \mathbb{C}, \forall\, r > 0, \forall\, z \in D(z^0, r)$, on a $\mid f(z) \mid \geq \frac{1}{2\pi} \mid \int_{\partial D(z^0,\, r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \mid$;
(vi) Pour toute $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytique et $g \neq f$, $\log \mid f - g \mid$ est sousharmonique sur $\mathbb{C}$;
(vii) $\forall\, z^0 \in \mathbb{C}, \forall\, r > 0,\ z \in D(z^0, r) \mapsto \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z^0,\, r)} \frac{\overline{f(\xi)}}{\xi - z} d\xi$ est constante;
(viii) $\forall z^0 \in \mathbb{C}, \forall\, r > 0, \forall g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytique(et $g \neq f$), on a
$\{z \in D(z^0, r) \,/\, g(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z^0,\, r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi\}$ est polaire.
Démonstration. Il est clair que (i) implique les assertions (ii), (iii), (iv), (v), (vi), (vii) et (viii). Pour montrer (ii) implique (i), posons $f = p + iq$ où $p =$Ré(f) et supposons que f n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$.
Soit $g = (p + i\theta)$ holomorphe où $p =$Ré(g) et $\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ harmonique. Comme f n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$, alors $g \neq f$. Considérons le sous-ensemble fermé $E = \{z \in \mathbb{C}/f(z) = g(z)\} = \{z \in \mathbb{C}/q(z) - \theta(z) = 0\}$. Posons $h = |q - \theta|$. Alors h est harmonique sur $\mathbb{C}\backslash E$ et continue sur $\mathbb{C}$. Supposons que E est polaire non vide dans $\mathbb{C}$, alors h est harmonique sur $\mathbb{C}$ et
positive. Donc h est constante; $q = \theta$ sur E, donc $q = \theta$ sur $\mathbb{C}$. D'où $f = g$ et par suite f est analytique sur $\mathbb{C}$. Contradiction.
(iii) implique (i). Notons $f = g_1 + \overline{g_2}$ où g_1 et g_2 sont analytiques sur $\mathbb{C}$.
Remarquons que $\forall z^0 \in \mathbb{C}, \forall r > 0$, on a $\overline{g_2(z^0)} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z^0,\, r)} \frac{\overline{g_2(\xi)}}{\xi - z^0} d\xi$,
de plus $\forall z \in D(z^0, r)$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z^0,\, r)} \frac{\overline{g_2(\xi)}}{\xi - z} d\xi &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z^0,\, r)} \frac{\overline{g_2(\xi)}}{\xi - z^0 - (z - z^0)} d\xi \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z^0,\, r)} \frac{\overline{g_2(\xi)}}{\xi - z^0} \frac{1}{1 - \frac{z - z^0}{(\xi - z^0)}} d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j \geq 0} (z - z^0)^j \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\overline{g_2(z^0 + re^{i\theta})}}{r^{j+1} e^{i(j+1)\theta}} re^{i\theta} d\theta \\ &= \sum_{j \geq 0} (z - z^0)^j \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\overline{g_2(z^0 + re^{i\theta})}}{r^j e^{ij\theta}} d\theta. \end{aligned}$$

Notons que

$$\overline{g_2(z^0 + re^{i\theta})} = \sum_{k\geq 0} a_k(\overline{z^0} + re^{-i\theta})^k; a_k \in \mathbb{C}.$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{j\geq 0} a_k(\overline{z^0} + re^{-i\theta})^k (re^{i\theta})^{-j} d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } j \geq 1 \\ a_k(\overline{z^0})^k & \text{si } j = 0. \end{cases}$$

Donc $\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(z^0,r)} \frac{\overline{g_2(\xi)}}{\xi - z} d\xi = \overline{g_2}(z^0)$.

On admet que $g_2(z^0) = 0$ où z^0 est fixé dans $\mathbb{C}$ (si $g_2(z^0) \neq 0$, on travaille avec $g_3 = g_1 + \overline{g_2}(z^0)$ et $g_4 = g_2 - g_2(z^0)$ par exemple).
D'où on a $\forall r > 0$, $\forall z \in D(z^0, r)$, $|f(z)| \leq |g_1(z)|$ c'est à dire $|f(z)| \leq |g_1(z)|$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Soit encore $|g_1(z) + \overline{g_2}(z)|^2 \leq |g_1(z)|^2$, développons il arrive que
$(*)$ $2\text{Ré}(g_1 g_2) + |g_2|^2 \leq 0$ sur $\mathbb{C}$. g_1g_2 étant analytique sur $\mathbb{C}$, donc $\text{Ré}(g_1g_2)$ est harmonique négative sur $\mathbb{C}$. Il arrive que $\text{Ré}(g_1g_2)$ est constante et par suite g_1g_2 est constante. D'après $(*)$, on a g_2 est bornée et par suite elle est constante. D'où $f = g_1 + g_2(z^0)$ est analytique sur $\mathbb{C}$.
Pour (iv) implique (i), en supposant que $g_2(0) = 0$, on a $2\text{Ré}(g_1g_2) + |g_2|^2 = 0$ sur $\mathbb{C}$. Ceci implique que $|g_2|^2$ est harmonique sur $\mathbb{C}$ et atteint son minimum en 0. Donc $|g_2|^2$ est constante et par suite g_2 est constante. Il résulte enfin que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
On fera aussi une preuve plus générale pour l'assertion (v) implique (i). On suppose que $f : D \to \mathbb{C}$ harmonique et $\forall z^0 \in D, \forall r > 0$ avec $\overline{D}(z^0, r) \subset D$ on a $\forall z \in D(z^0, r)$, $| f(z) | \geq \frac{1}{2\pi} | \int_{\partial D(z^0,\, r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi |$ (D domaine dans $\mathbb{C}$). Montrons que f est analytique sur D.
Soit $z^0 \in D, r > 0$ avec $\overline{D}(z^0, r) \subset D$. Écrivons que $f = (f_1 + \overline{f_2})$ sur $D(z^0, 4r)$ où f_1 et f_2 sont analytiques sur $D(z^0, 4r)$. Alors, $\forall z, \xi \in D(z^0, r)$, on a $\xi \in D(z, 2r) \subset D(z^0, 4r)$. D'où $\forall z, \xi \in D(z^0, r)$,
$|f_1(z) + \overline{f_2}(z)| \geq |f_1(z) + \overline{f_2}(\xi)|$, donc $|f_1(z) + \overline{f_2}(z)|^2 \geq |f_1(z) + \overline{f_2}(\xi)|^2$.
Développons, il résulte que $|f_2(\xi)|^2 - |f_2(z)|^2 + 2\text{Ré}[f_1(z)(f_2(\xi) - f_2(z))] = \varphi(\xi) \leq 0$. Fixons $z \in D(z^0, r)$. Il arrive que $\forall \xi \in D(z, 2r)$, on a $\varphi(\xi) < 0$. Mais φ est sousharmonique et atteint son maximum en $z \in D(z, 2r)$. Donc φ est constante sur $D(z, 2r)$. D'où $|f_2(\xi)|^2 - |f_2(z)|^2 + 2\text{Ré}[f_1(z)(f_2(\xi) - f_2(z))] = \varphi(\xi) = 0$. Donc $|f_2|^2$ est harmonique et par suite f_2 est constante sur D. En particulier, f est analytique sur D.
(vi)implique (i). On a $\log | f - g |$ est sousharmonique sur $\mathbb{C}$, $\forall g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytique et $g \neq f$. En particulier $\{z \in \mathbb{C} \ / \ f(z) = g(z)\}$ est polaire dans $\mathbb{C}$ pour toute g comme ci-dessus. d'après l'assertion (i), f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
Pour (vii) implique (i), on écrit $f = f_1 + \overline{f_2}$ avec f_1 et f_2 analytiques sur $\mathbb{C}$.
$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(z^0,\, r)} \frac{\overline{f(\xi)}}{\xi - z} d\xi = \overline{f_1(z^0)} + f_2(z)$, pour tout $z \in D(z^0, r)$. Comme
$z \in D(z^0, r) \mapsto \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(z^0,\, r)} \frac{\overline{f(\xi)}}{\xi - z} d\xi$ est constante, alors $z \mapsto (\overline{f_1}(z^0) + f_2(z))$ est constante sur $\mathbb{C}$. Donc f_2 est constante. Soit alors $f = f_1 + f_2(z^0)$ est analytique sur $\mathbb{C}$.

(viii) implique (i). On écrit $f = f_1 + \overline{f_2}$ avec f_1 et f_2 analytiques sur $\mathbb{C}$. $\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(z^0,\, r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = f_1(z) + \overline{f_2}(z^0)$. Alors, $\forall g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytique(et $g \neq f$), on a $\{z \in D(z^0, r) \ / \ g(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(z^0,\, r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi\} = \{z \in D(z^0, r) \ / \ g(z) = f_1(z) + \overline{f_2}(z^0)\}$ est polaire. Par l'absurde si f n'est pas holomorphe, alors f_2 n'est pas constante. On considère dans ce cas $g = f_1 + \overline{f_2}(z^0)$ avec $z^0 \in \mathbb{C}(g \neq f$, car f n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$). $\{z \in D(z^0, r) \ / \ g(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(z^0,\, r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi\} = D(z^0, r)$ qui n'est pas polaire dans $\mathbb{C}$. Contradiction et il résulte que f est analytique dans $\mathbb{C}$.

Quelques extensions des résultats. a) Soit $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ une fonction pluriharmonique. Supposons que $\forall z^0 \in \mathbb{C}^n, \forall r > 0, \forall z \in \Delta^{(n)}(z^0, r)$, on a

$$| f(z) | \leq (\tfrac{1}{2\pi})^n \mid \int_{\partial D(z_1^0, r) \times \ldots \times \partial D(z_n^0, r)} \frac{f(\xi_1, \ldots, \xi_n)}{(\xi_1 - z_1) \ldots (\xi_n - z_n)} d\xi_1 \ldots d\xi_n \mid$$

($z^0 = (z_1^0, ..., z_n^0), z = (z_1, ..., z_n)$). Alors f est analytique sur $\mathbb{C}^n$.

b) Soit $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytique non constante et s'annulant dans $\mathbb{C}$. Alors $\log \mid g \mid$ caractérise(produit) les fonctions analytiques.

Théorème 10. Soit $g = (g_1, ..., g_n) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ analytique. Supposons que $\log \parallel g \parallel$ produit les fonctions analytiques. Alors il existe $j \in \{1, ..., n\}$ avec $\log \mid g_j \mid$ produit les fonctions analytiques.

Démonstration. Sans perte de généralité on admet que le produit $g_1 ... g_n \neq 0$ sur $\mathbb{C}$. Par l'absurde supposons que pour tout $j \in \{1, ..., n\}$, $\log \mid g_j \mid$ ne produit pas les fonctions analytiques(donc g_j ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$). D'après le théorème 7, $g_j(z) = e^{(a_j z + \beta_j)}$, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $j \in \{1, ..., n\}$, $(a_j, \beta_j \in \mathbb{C})$(car $\log \mid g_j \mid$ est une fonction réelle et affine sur $\mathbb{C}$).

On a $g_j(w - \overline{z}) = e^{a_j(w - \overline{z}) + \beta_j}$ de sorte que $\log \mid g_j(w - \overline{z}) \mid$ est une fonction à valeurs réelles et affine sur $\mathbb{C}^2$(donc elle est psh sur $\mathbb{C}^2$). Il résulte que $2 \log \mid g_j(w - \overline{z}) \mid = \log(\mid g_j(w - \overline{z}) \mid^2)$ est psh sur $\mathbb{C}^2$ pour chaque $j = 1, ..., n$. D'après Hörmander [7], $\log \parallel g(w - \overline{z}) \parallel = \frac{1}{2} \log(\sum_{j=1}^{n} \mid g_j(w - \overline{z}) \mid^2)$ est psh sur $\mathbb{C}^2$. Rappelons que la fonction f(donnée par $f(z) = \overline{z}, z \in \mathbb{C}$) n'est pas analytique sur $\mathbb{C}$. Cependant $\log \parallel g(w - f(z)) \parallel$ est psh dans $\mathbb{C}^2$. Contradiction et la preuve du théorème 10 est terminée.

Observons que la réciproque du théorème 10 est aussi vraie.

Notons aussi que si g et k sont deux fonctions analytiques sur $\mathbb{C}$ avec $g = e^k$ alors $\log \mid g \mid$ produit les fonctions analytiques si et seulement si k n'est pas une fonction affine sur $\mathbb{C}$.

On énonce le lemme suivant qu'on va l'appliquer dans cette recherche.

Lemme 5. Soit D un domaine dans $\mathbb{R}^d (d \geq 2)$, $u : D \to [-\infty, +\infty[$ sousharmonique et localement constante. Alors, u est constante sur D.

Démonstration. Soit L un sous-ensemble compact dans D. On choisit $x_1, ..., x_N \in D, r_1 > 0, ..., r_N > 0$ avec $L \subset \bigcup_{j=1}^{N} B(x_j, r_j) \subset D$, de plus $u = u(x_j)$ sur $B(x_j, r_j)$ pour $j = 1, ..., N$. Sans perte de généralité, on admet que $B(x_j, r_j) \cap B(x_{j+1}, r_{j+1}) \neq$

$\emptyset$ si $j = 1, ..., (N-1)$.
$\forall x \in B(x_j, r_j) \cap B(x_{j+1}, r_{j+1})$, on a $u(x) = u(x_j) = u(x_{j+1})$. Donc $u(x_j) = u(x_{j+1})$ pour $j = 1, ..., (N-1)$. Il résulte que u est constante sur tout compact $L \subset D$. D'où u est constante sur D.
Théorème 11. Soient D un domaine dans $\mathbb{C}^n, f : D \to \mathbb{C}$ analytique et u une fonction sousharmonique non constante sur $\mathbb{C}$. On note $v(z,w) = u(w - f(z))$ pour $(z,w) \in D \times \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes
(i) f est constante sur D;
(ii) (p.p) $w \in \mathbb{C}$, $v(.,w)$ est localement constante sur D;
(iii) Il existe $w_0 \in \mathbb{C}$ avec $v(.,w_0) + \log \mid w_0 - f \mid = -\infty$ sur D.
Démonstration . (i) implique (ii). On a f est constante sur D, donc pour tout $w \in \mathbb{C}, v(.,w)$ est constante sur D.
Pour (ii) implique (i), notons qu'il existe $B \subset \mathbb{C}, m_2(B) = 0$ avec pour tout $w \in \mathbb{C} \backslash B, v(.,w)$ est constante sur D d'après le lemme 5. Supposons que f n'est pas constante, alors $f(D) = D_1$ est ouvert connexe dans $\mathbb{C}$. On suppose que $f(z^0) = 0$ où $z^0 \in D$. On fixe $w_1 \in \mathbb{C}, r > 0$ avec u n'est pas constante sur $D(w_1, \frac{r}{j})(\forall j \geq 1)$.
Soit $R > 0, R_1 > 0$ avec $D(0,R_1) \subset f(B(z^0,R))$ où $\overline{B}(z^0,R) \subset D$. Alors, pour tout $\xi \in D(0,R_1)$, on a $v(z, w_1 - \xi) = u(w_1 - \xi - f(z))$ si $z \in D$. $v(., w_1 - \xi)$ non constante sur D. En effet, soit $z_1 \in B(z^0,R)$ avec $f(z_1) = \xi$. Donc $v(z_1, w_1 - \xi) = u(w_1)$. Soit $w_2 \in D(w_1, r)$ avec $\mid w_1 - w_2 - \xi \mid < R_1$ et $u(w_1) \neq u(w_2)$. Alors $(w_1 - w_2 - \xi) \in D(0,R_1)$. $\exists z_2 \in D$ avec $w_1 - w_2 - \xi = f(z_2)$. D'où $w_2 = w_1 - \xi - f(z_2)$.
$v(z_2, w_1 - \xi) = v(z_2, w_2 + f(z_2)) = u(w_2)$. D'où $v(z_1, w_1 - \xi) \neq v(z_2, w_1 - \xi)$. Enfin, il résulte que pour tout $\zeta \in D(w_1, R_1); v(., \zeta)$ n'est pas constante. Ce qui est impossible. Ainsi, f est constante sur D.
Il est clair que (i) implique (iii). Pour (iii) implique (i), supposons que f n'est pas constante sur D. Alors $\{z \in D \ / \ f(z) = w_0\} = E$ est fermé pluripolaire dans D. Soit $D_2 = f(D), D_2$ est un domaine dans $\mathbb{C}$.
$v(z,w_0) + \log \mid w_0 - f(z) \mid = u(w_0 - f(z)) + \log \mid w_0 - f(z) \mid = -\infty$ pour tout $z \in D$. Il résulte que $u(w_0 - f(z)) = -\infty (\forall z \in D \backslash E)$.
$f(D \backslash E) = D_2 \backslash \{w_0\}$, donc $u(w_0 - a) = -\infty$, pour tout $a \in D_2 \backslash \{w_0\}$ un domaine dans $\mathbb{C}$. Soit $b \in D_2 \backslash \{w_0\}, r > 0$ avec $D(b,r) \subset D_2 \backslash \{w_0\}$.
$w_0 - D(b,r) = D(w_0 - b, r) \subset [w_0 - D_2 \backslash \{w_0\}]$. Donc $u(c) = -\infty$ pour tout $c \in D(w_0 - b, r)$. Ceci étant impossible.

Références

[1] Abidi J., Sur quelques problèmes concernant les fonctions holomorphes et plurisousharmoniques, Rend.Circ.Mat.Palermo, 51 (2002), 411-424.
[2] Conway J.B., Functions of One Complex Variable II, Springer - Verlag, 1995.
[3] Federer H., Geometric measure theory, Berlin, Springer, 1969.
[4] Gunning, R. C. and Rossi, H., Analytic Functions of Several Complex Variables, Prentice - Hall, Englewood Cliffs, 1965.

[5] Henkin G.M., Leiterer J., Theory of Functions on Complex Manifolds, Birkhäuser, Boston, Mass., 1984.
[6] Hervé M., Les fonctions analytiques, Presses Universitaires de France, 1982.
[7] Hörmander L., An Introduction to Complex Analysis in Several Variables. Van Nostrand, Princeton, N.J., 1966.
[8] Klimek, M., Pluripotential theory, Clarendon Press, Oxford, 1991.
[9] Krantz, S.G., Function theory of several complex variables. Wiley, New York, 1982.
[10] Lelong P., Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives. Gordon et Breach, New-York et Dunod, Paris, 1969.
[11] Range R.M., Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables, Springer - Verlag, 1986.
[12] Rühentaus J., On the extension of separately hyperharmonic functions and H^p- functions, Michigan Math. J., 31 (1984), 99-112.
[13] Ronkin, L.I., Introduction to the theory of entire functions of several variables. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1974.
[14] Rudin W., Function theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$. Springer-Verlag, New York, 1980.
[15] Ullrich D.C., Removable sets for harmonic functions, Michigan Math. J., 38 (1991), 467- 473.
[16] Vladimirov V.S., Les fonctions de plusieurs variables complexes(et leur application à la théorie quantique des champs). Paris: Dunod,1967.