Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 51e année, 1-2, 1981, pp. 51-53

SUR L'ANALYTICITÉ DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

par P. LAUBIN

SUMMARY

We give a short proof of the analyticity of solutions of differential equations.

Considérons un système différentiel paramétrique

$$\begin{cases} D_t\varphi(t, \lambda) = f(t, \varphi(t, \lambda), \lambda) \\ \varphi(0, \lambda) = 0 \end{cases}$$

où f est une fonction de classe C_∞ dans un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

On sait que, pour tout λ fixé dans $\mathbb{R}^p$ tel que $(0, 0, \lambda) \in U$, il existe un plus grand intervalle ouvert I_λ de $\mathbb{R}$ contenant 0 dans lequel le système admet une solution. Cette solution $\varphi(t, \lambda)$ est unique.

De plus, $\Omega = \{(t, \lambda) : t \in I_\lambda\}$ est ouvert et φ y est de classe C_∞.

Pour étudier l'analyticité de φ lorsque le second membre est analytique, on recourt généralement à la méthode des séries majorantes. On peut également établir un théorème d'existence locale dans le domaine complexe par la méthode des approximations successives.

En fait il est possible d'étudier très simplement les systèmes différentiels holomorphes à partir des résultats rappelés ci-dessus et d'en déduire l'analyticité de la solution maximale d'un système différentiel à second membre analytique.

Pour l'essentiel, les résultats présentés ici sont bien sûr classiques. Nous pensons cependant que cette note est justifiée par la méthode de la preuve.

1. — Nous commençons par étudier un système différentiel holomorphe.

Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert U de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$ à valeurs dans $\mathbb{C}^n$.

Introduisons le système

$$\begin{cases} D_t u(t, z, \lambda) = z f(tz, u(t, z, \lambda), \lambda) \\ u(0, z, \lambda) = 0. \end{cases}$$

On considère t comme un paramètre réel tandis que (z, λ) varie dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^p$.

Présenté par H. G. Garnir, le 21 janvier 1982.

En vertu des résultats rappelés plus haut, ce système possède une solution de classe C_∞ dans un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^p$. Le fait que le second membre ne soit pas réel n'est pas gênant car il suffit pour se ramener à une équation réelle, de séparer parties réelle et imaginaire.

a) *La fonction u est holomorphe en (z, λ).*

Appliquons l'opérateur $D_{\bar z} = \frac{1}{2}(D_x + iD_y)$ aux deux membres du système qui définit u. La fonction f étant holomorphe, on obtient

$$\begin{cases} D_t[D_{\bar z} u(t, z, \lambda)] = z(D_u f)(tz, u(t, z, \lambda)D_{\bar z} u, \lambda)(t, z, \lambda) \\ D_{\bar z} u(t, z, \lambda) \mid_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Cette équation différentielle linéaire admet 0 comme solution. Vu l'unicité des solutions, on a $D_{\bar z} u = 0$. On montre de même que $D_{\bar\lambda_j} u = 0$ pour tout j.

b) *Pour tout s réel, $(st, z, \lambda) \in \Omega$ équivaut à $(t, sz, \lambda) \in \Omega$ et on a*

$$u(st, z, \lambda) = u(t, sz, \lambda).$$

On a

$$\begin{cases} D_t[u(st, z, \lambda)] = sz\, f(stz, u(st, z, \lambda), \lambda) \\ u(st, z, \lambda) \mid_{t=0} = 0. \end{cases}$$

La fonction $t \to u(st, z, \lambda)$ vérifie donc le système qui définit $u(t, sz, \lambda)$. Ces deux solutions étant maximales, elles ont même ensemble de définition et y coïncident.

c) *On a*

$$D_z u(t, z, \lambda) = tf(tz, u(t, z, \lambda), \lambda).$$

De fait,

$$\begin{aligned} &D_t[D_z u(t, z, \lambda) - tf(tz, u(t, z, \lambda), \lambda)] \\ &= D_z[zf(tz, u(t, z, \lambda), \lambda)] - f(tz, u(t, z, \lambda), \lambda) - tz(D_t f)(tz, u(t, z, \lambda), \lambda) \\ &\qquad - t(D_u f)(tz, u(t, z, \lambda), \lambda) D_t u(t, z, \lambda) \\ &= z(D_u f)(tz, u(t, z, \lambda), \lambda)[D_z u(t, z, \lambda) - tf(tz, u(t, z, \lambda), \lambda)] \end{aligned}$$

et

$$[D_z u(t, z, \lambda) - tf(tz, u(t, z, \lambda), \lambda)]_{t=0} = 0.$$

D'où la conclusion vu l'unicité des solutions des équations différentielles.

Posons

$$D = \{(z, \lambda) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^p : (1, z, \lambda) \in \Omega\}$$

et

$$\varphi(z, \lambda) = u(1, z, \lambda), (z, \lambda) \in D.$$

Vu a), φ est holomorphe. De plus,

$$\begin{cases} D_z \varphi(z, \lambda) = f(z, \varphi(z, \lambda), \lambda) \\ \varphi(0, \lambda) = 0 \end{cases}$$

dans l'ouvert D en vertu de c).

d) *Si le système différentiel*

$$\begin{cases} D_t x(t) = f(t, x(t), \lambda) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

possède une solution dans un intervalle I *de* $\mathbb{R}$, *alors* $\{(t, \lambda) : t \in I\} \subset D$ *et* $x(t) = \varphi(t, \lambda)$.

De fait, dans ce cas, $(t, 1, \lambda) \in \Omega$ pour tout $t \in I$ et $x(t) = u(t, 1, \lambda)$. On conclut en utilisant b).

2. — Revenons à notre problème initial.

On suppose f analytique dans un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ et on désigne par φ la solution maximale du système

$$\begin{cases} D_t \varphi(t, \lambda) = f(t, \varphi(t, \lambda), \lambda) \\ \varphi(0, \lambda) = 0. \end{cases}$$

La fonction φ *est analytique dans son ouvert* Ω *de définition.*

Soit $\tilde{f}$ un prolongement holomorphe de f dans un ouvert $\tilde{U}$ de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$ dont l'intersection avec $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ est U. Le paragraphe précédent fournit une solution $\tilde{\varphi}$ du système

$$\begin{cases} D_z \tilde{\varphi}(z, \lambda) = \tilde{f}(z, (\tilde{\varphi} z, \lambda), \lambda) \\ \tilde{\varphi}(0, \lambda) = 0 \end{cases}$$

dans un ouvert $\tilde{\Omega}$ de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^p$. En utilisant d), on voit que $\Omega \subset \tilde{\Omega}$ et que $\varphi = \tilde{\varphi}$ dans Ω. La fonction φ est donc analytique comme restriction d'une fonction holomorphe.

Signalons enfin que la dépendance vis-à-vis des conditions initiales se ramène à la dépendance paramétrique [2].

Nous remercions le Professeur H. G. Garnir qui nous a suggéré ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Dieudonné, *Éléments d'analyse*. Gauthier-Villars (1972), tome I et IV.

[2] M. De Wilde, *Analyse non linéaire*, édition ronéotypée, Liège (1978).

Université de Liège
Institut de Mathématique
15, avenue des Tilleuls
B-4000 Liège (Belgique)