Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 41e année, nº 1-2, 1972, pp. 11-13

SUR UN THÉORÈME DE SÉPARATION DE M. VLACH

par JACQUES BAIR (*)

SUMMARY

In this note, we fit Vlach's investigations in order to obtain frank separation theorems for families of convex sets in a real linear space.

INTRODUCTION

Dernièrement, M. Vlach [V, VI] étendait les versions courantes des théorèmes de séparation de Klee [III] à des familles finies d'ensembles convexes. Nous nous permettons d'aménager le raisonnement de M. Vlach en vue de lui faire produire quelques fruits nouveaux : substantiellement, les propriétés de séparation franche que nous avons publiées récemment [II] sont encore valables pour des familles finies d'ensembles. Tout d'abord, nous montrons que le théorème essentiel de M. Vlach [VI] livre en réalité une condition nécessaire et suffisante de séparation franche d'une famille finie d'ensembles convexes; ensuite, nous étendons le théorème 3 [V; p. 508] au cas d'une famille finie d'ensembles convexes doués de points internes et dont un seul n'est pas nécessairement de codimension finie.

1. *Définitions.* Nous nous plaçons systématiquement dans un espace vectoriel E sur le corps réel R. Nous reprenons la terminologie et les notations d'articles antérieurs [I, II] et désignons en particulier par ${}^{i}A$ l'internat d'un ensemble A dans le R-espace où il est défini.

Une famille finie $\mathscr{A} = (A_i)_{i \in I}$ d'ensembles est dite *séparée* s'il existe une famille $\mathscr{F} = (f_i)_{i \in I}$ de formes linéaires sur E et une famille $\Lambda = (\lambda_i)_{i \in I}$ de réels qui vérifient les quatre conditions suivantes : a) toutes les formes f_i $(i \in I)$ ne coïncident pas avec la forme nulle; b) $\sum_{i \in I} f_i = 0$; c) $\sum_{i \in I} \lambda_i \leqslant 0$; d) $A_i \subset \{x \in E : f_i(x) \leqslant \lambda_i\}$ pour tout $i \in I$. Dans ces conditions, nous dirons aussi que *$\mathscr{A}$ est séparée par la famille d'ensembles $\mathscr{H}(\mathscr{F}, \Lambda) = (H_i)_{i \in I}$* où, pour tout $i \in I$, $H_i = \{x \in E : f_i(x) = \lambda_i\}$. Remarquons que H_i est l'hyperplan d'équation $f_i(.) = \lambda_i$ si f_i n'est pas la forme nulle; en revanche, lorsque $f_i = 0$, H_i coïncide avec $\varnothing$ ou E suivant que $\lambda_i \neq 0$ ou $\lambda_i = 0$

Une famille finie $\mathscr{A} = (A_i)_{i \in I}$ d'ensembles est dite *franchement séparée* s'il existe une famille d'ensembles $\mathscr{H}(\mathscr{F}, \Lambda)$ qui sépare $\mathscr{A}$ et pour laquelle un indice i de I, associé à une forme non nulle f_i, donne $A_i \not\subset H_i = \{x \in E : f_i(x) = \lambda_i\}$. Dans ces conditions, nous dirons encore que $\mathscr{H}(\mathscr{F}, \Lambda)$ *sépare franchement* $\mathscr{A}$.

(*) Institut de mathématique, 15, Avenue des Tilleuls, 4000 Liège, Belgique.
Présenté par F. Jongmans, le 20 janvier 1972.

2. La méthode de M. Vlach, déjà mentionnée par J. Lindenstrauss et H. P. Rosenthal [IV; p. 348], consiste essentiellement à se ramener à la séparation de deux ensembles dans l'espace produit E^n, où $n + I$ désigne le cardinal de I.

Lemme. Une famille finie $\mathscr{A} = (A_0, A_1, \ldots, A_n)$ *d'ensembles non vides est franchement séparée si et seulement si* $\{0\}$ *est franchement séparé de*

$$\bigcup_{x \in A_0} [(x - A_1) \times (x - A_2) \times \ldots \times (x - A_n)]$$

dans E^n, *ou encore si et seulement si* $M = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ *est franchement séparé de* $N = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x, x \in A_0\}$ *dans* E^n.

Preuve. On montre trivialement que les deux dernières conditions sont équivalentes, via le résultat 1.2 de [II; p. 475].

Si M et N sont franchement séparés dans E^n, il existe deux formes non nulles g et h sur E^n et deux réels λ, μ tels que $g + h = 0$, $\lambda + \mu \leqslant 0$, $M \subset \{y \in E^n : g(y) \leqslant \lambda\}$ et $N \subset \{y \in E^n : h(y) \leqslant \mu\}$. Puisque l'espace des formes linéaires sur E^n est isomorphe à la n^e puissance de l'espace des formes linéaires sur E, il existe des formes linéaires non toutes nulles $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sur E — sans nuire à la généralité, nous supposerons $f_n \neq 0$ — telles que $g(y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$ pour tout $y = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; dans ces conditions, $\sum_{i=1}^{n} \sup f_i(A_i) \leqslant \lambda$. Si l'on pose $f_0(x) = -\sum_{i=1}^{n} f_i(x)$, $\lambda_0 = \mu$, $\lambda_i = \sup f_i(A_i)$ pour $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ et $\lambda_n = \lambda - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i$, la famille $\mathscr{A}$ est séparée par $\mathscr{H}(\mathscr{F}, \Lambda)$, où $\mathscr{F} = (f_i)_{i=0,1,\cdots,n}$ et $\Lambda = (\lambda_i)_{i=0,1,\cdots,n}$. Montrons que la séparation de $\mathscr{A}$ peut être franche. Comme la séparation de M et N est franche, nous ne pouvons avoir simultanément $g(M) = \{\lambda\}$ et $h(N) = \{\mu\}$. Dès lors, il existe, pour un indice j de $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$, un point x_0 dans A_j tel que $f_j(x_0) < \lambda_j$; le problème est résolu si f_j n'est pas la forme nulle. Dans le cas contraire, remarquons d'abord que j appartient à $\complement \{1, 2, \ldots, n\}$, puisque $f_n \neq 0$ et que, pour $j = 1, 2, \ldots, n - 1$, $f_j = 0$ entraîne l'absurdité $f_j(x_0) = 0 < \lambda_j = 0$. La seule difficulté surgit donc lorsque $j = 0$; dans ces conditions, $f_0(x_0) = 0 < \mu$: il suffit d'associer à $\mathscr{F} = (f_i)_{i=0,1,2,\cdots,n}$ une autre famille $\Lambda^* = (\lambda^*)_{i=0,1,2,\ldots,n}$ de réels en posant $\lambda_0^* = \frac{\mu}{2}$, $\lambda_i^* = \lambda_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ et $\lambda_n^* = \lambda_n + \frac{\mu}{2}$: la séparation de $\mathscr{A}$ par $\mathscr{H}'(\mathscr{F}, \Lambda^*)$ est encore franche, puisque $f_n \neq 0$ et que, pour tout $x \in A_n$, $f_n(x) < \lambda_n^*$.

Démontrons à présent la réciproque. Il existe une famille d'ensembles $\mathscr{H}(\mathscr{F}, \Lambda)$ qui sépare franchement $\mathscr{A}$; soient $g(y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$ pour tout $y = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $h = -g$, $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ et $\mu = \lambda_0$: il est facile de vérifier que h et g sont des formes non nulles sur E^n et que la séparation de (M, N) par $\mathscr{H}^* [(g, h), (\lambda, \mu)]$ est franche.

3. *Théorème* 1. *Soit* $\mathscr{A} = (A_0, A_1, \ldots, A_n)$ *une famille d'ensembles convexes d'internat non vide.* $\mathscr{A}$ *est franchement séparé si et seulement si* $\bigcap_{j=0}^{n} {}^iA_j = \emptyset$.

Preuve. Montrons d'abord la nécessité de la condition. S'il existe un point x dans $\bigcap_{j=0}^{n} {}^iA_j$, on peut trouver un indice p de $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ tel que $f_p(x) < \lambda_p$ [I; p. 219]. Dès lors, $\sum_{j=0}^{n} f_j(x) < \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \leqslant 0$; ceci contredit l'égalité $\sum_{j=0}^{n} f_j = 0$. Partant, $\bigcap_{j=0}^{n} {}^iA_j = \emptyset$.

Pour démontrer la suffisance, construisons les ensembles M et N considérés dans le lemme 2 : il s'agit de deux ensembles convexes doués de points internes et dont les internats sont disjoints. Ils admettent dès lors une séparation franche [II; p. 475]. $\mathscr{A}$ est donc une famille franchement séparée (lemme 2).

4. *Théorème* 2. *Soient* A_0 *un ensemble convexe non vide*; $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *des ensembles convexes doués de points internes et de codimension finie. Si* $A_0 \cap \bigcap_{j=1}^{n} {}^iA_j = \emptyset$, *alors* $\mathscr{A} = (A_0, A_1, \ldots, A_n)$ *est une famille franchement séparée.*

Preuve. Les ensembles M, N considérés dans le lemme 2 sont encore deux ensembles non vides; de plus, M est de codimension finie et doué de points internes; enfin, N ne rencontre pas ${}^iM$. Ces deux ensembles admettent dès lors une séparation franche [II; p. 475]; il en va de même pour la famille $\mathscr{A}$ (lemme 2).

BIBLIOGRAPHIE

[I] Bair, Nouvelles propriétés des opérateurs algébriques dans un espace vectoriel, *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège*, **40**, 1971, pp. 214-223.

[II] Bair et Jongmans, Séparation franche dans un espace vectoriel, *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège*, **39**, 1970, pp. 474-477.

[III] Klee, Separation and support properties of convex sets — a survey, in Balakrishnan, Control theory and the calculus of variations, Acad. Press, N. Y., 1969.

[IV] Lindenstrauss and Rosenthal, The $\mathscr{L}_p$-spaces, *Israël journal of Math.*, **7**, 1969, pp. 325-349.

[V] Vlach, On necessary conditions of optimality in linear spaces, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, II, 1970, pp. 501-512.

[VI] Vlach, A separation theorem for finite families, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, **12**, 1971, pp. 655-660.

Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 41e année, no 1-2, 1972, pp. 14-19

SÉPARATION FORTE D'UNE FAMILLE FINIE D'ENSEMBLES CONVEXES

par JACQUES BAIR (*)

SUMMARY

We extend well-known results about strong separation of two convex sets to finite families of convex sets in a vector space and in a topological vector space.

INTRODUCTION

Peu après que M. Vlach [VI] ait obtenu un théorème fondamental de séparation pour des familles finies d'ensembles convexes, nous étudions ce résultat au cas de la séparation franche [II]. Dans cet article, nous nous proposons d'étudier la séparation forte des familles finies d'ensembles avec le souci constant de généraliser les résultats connus pour deux ensembles; nous sommes ainsi en mesure d'étendre un grand nombre de théorèmes classiques : notamment les énoncés 8.1 à 8.5 de [I], les exercices 8 et 14 de [III; pp. 138-139], les théorèmes de [IV; p. 23] et de [V; pp. 257, 260].

1. GÉNÉRALITÉS

Dans les paragraphes 2 et 3 de cet article, nous nous placerons dans un espace vectoriel L sur le corps R des réels; nous développerons le dernier paragraphe dans un R-espace vectoriel topologique E, localement convexe et séparé, sauf pour le lemme 4 qui sera valable dans tout espace topologique séparé.

Les notions d'ensemble absorbant, de cône asymptote et d'ensemble parabolique sont tirées de [III; pp. 9, 125], celles d'internat ou de séparation de familles finies d'ensembles de [II et VI, pp. 655, 656]; par ailleurs, ${}^bA$ désignera l'enveloppe algébrique de l'ensemble A dans le R-espace où il est défini [I; p. 215].

Signalons encore quelques conventions très commodes. Pour chaque famille $\mathscr{A} = (A_0, A_1, \ldots, A_n)$ d'ensembles non vides définis dans le R-espace vectoriel L ou le R-espace vectoriel topologique E, nous noterons respectivement M et N les ensembles de L^n ou E^n définis par $M = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ et $N = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x, x \in A_0\}$; nous nous permettrons de ne pas toujours rappeler la signification de ces ensembles M, N. Enfin, pr_i désignera la projection de L^n (resp. E^n) sur les i^e facteur L (resp. E).

Présenté par F. Jongmans, le 17 février 1972.
(*) Institut de mathématique, 15, avenue des Tilleuls, Liège (Belgique).