Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 41e année, nº 1-2, 1972, pp. 11-13

SUR UN THÉORÈME DE SÉPARATION DE M. VLACH

par JACQUES BAIR (*)

SUMMARY

In this note, we fit Vlach's investigations in order to obtain frank separation theorems for families of convex sets in a real linear space.

INTRODUCTION

Dernièrement, M. Vlach [V, VI] étendait les versions courantes des théorèmes de séparation de Klee [III] à des familles finies d'ensembles convexes. Nous nous permettons d'aménager le raisonnement de M. Vlach en vue de lui faire produire quelques fruits nouveaux : substantiellement, les propriétés de séparation franche que nous avons publiées récemment [II] sont encore valables pour des familles finies d'ensembles. Tout d'abord, nous montrons que le théorème essentiel de M. Vlach [VI] livre en réalité une condition nécessaire et suffisante de séparation franche d'une famille finie d'ensembles convexes; ensuite, nous étendons le théorème 3 [V; p. 508] au cas d'une famille finie d'ensembles convexes doués de points internes et dont un seul n'est pas nécessairement de codimension finie.

1. *Définitions.* Nous nous plaçons systématiquement dans un espace vectoriel E sur le corps réel R. Nous reprenons la terminologie et les notations d'articles antérieurs [I, II] et désignons en particulier par ${}^{i}A$ l'internat d'un ensemble A dans le R-espace où il est défini.

Une famille finie $\mathscr{A} = (A_i)_{i \in I}$ d'ensembles est dite *séparée* s'il existe une famille $\mathscr{F} = (f_i)_{i \in I}$ de formes linéaires sur E et une famille $\Lambda = (\lambda_i)_{i \in I}$ de réels qui vérifient les quatre conditions suivantes : a) toutes les formes f_i $(i \in I)$ ne coïncident pas avec la forme nulle; b) $\sum_{i \in I} f_i = 0$; c) $\sum_{i \in I} \lambda_i \leqslant 0$; d) $A_i \subset \{x \in E : f_i(x) \leqslant \lambda_i\}$ pour tout $i \in I$. Dans ces conditions, nous dirons aussi que $\mathscr{A}$ *est séparée par la famille d'ensembles* $\mathscr{H}(\mathscr{F}, \Lambda) = (H_i)_{i \in I}$ où, pour tout $i \in I$, $H_i = \{x \in E : f_i(x) = \lambda_i\}$. Remarquons que H_i est l'hyperplan d'équation $f_i(.) = \lambda_i$ si f_i n'est pas la forme nulle; en revanche, lorsque $f_i = 0$, H_i coïncide avec $\varnothing$ ou E suivant que $\lambda_i \neq 0$ ou $\lambda_i = 0$

Une famille finie $\mathscr{A} = (A_i)_{i \in I}$ d'ensembles est dite *franchement séparée* s'il existe une famille d'ensembles $\mathscr{H}(\mathscr{F}, \Lambda)$ qui sépare $\mathscr{A}$ et pour laquelle un indice i de I, associé à une forme non nulle f_i, donne $A_i \not\subset H_i = \{x \in E : f_i(x) = \lambda_i\}$. Dans ces conditions, nous dirons encore que $\mathscr{H}(\mathscr{F}, \Lambda)$ *sépare franchement* $\mathscr{A}$.

(*) Institut de mathématique, 15, Avenue des Tilleuls, 4000 Liège, Belgique.
Présenté par F. Jongmans, le 20 janvier 1972.