Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 41e année, no 1-2. 1972, pp. 20-23

CÔNES ÉTOILÉS ET CÔNES ASYMPTOTES

par LÉOPOLD BRAGARD (*)

SUMMARY

In a linear space, we give properties both of the starshaped cones and of the asymptotic or characteristic cones of starshaped sets. Similar results are given in a topological linear space.

INTRODUCTION

Dans les paragraphes 1, 2 et 3 de cet article, nous nous plaçons dans un espace vectoriel sur R. Les définitions que nous rappelons ci-dessous sont empruntées principalement à Vangeldère [I] et à Bair [II].

Si a et b sont deux points distincts de L, $[a, b]$, $]a, b]$, (a, b), $[a, b)$ désigneront respectivement l'ensemble des points $a + \lambda(b - a)$ avec respectivement $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $0 < \lambda \leqslant 1$, λ réel, $\lambda \geqslant 0$. Si A est une partie de L, un point a de L tel que $]a, x] \subset A$ pour un choix convenable de x est dit *attenant* à l'ensemble A; l'ensemble des points attenants à A, noté ${}^aA$, s'appellera l'*attenance* de A; l'ensemble $A \cup {}^aA$ sera noté ${}^bA$ et appelé *enveloppe algébrique* de A. Une partie de L qui coïncide avec son enveloppe algébrique sera dite *algébriquement fermée*.

Un ensemble non vide A de L est *étoilé* sur un point a lorsque $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ implique $\lambda a + (1 - \lambda)A \subset A$; l'ensemble des points sur lesquels A est étoilé sera appelé *mirador* de A et noté $\mu(A)$. Rappelons que, pour tout ensemble étoilé autre qu'un singlet, $A \subset {}^aA$, de sorte que ${}^bA = {}^aA$ pour un tel ensemble. Signalons enfin que, pour tout ensemble étoilé, la propriété ${}^{aa}A = {}^aA$ est équivalente à la propriété ${}^{bb}A = {}^bA$.

On appelle *direction asymptotique* d'une partie non vide A de L toute demi-droite pointée en 0 dont un translaté au moins est inclus dans ${}^bA$. La réunion de l'origine et de toutes les directions asymptotique de A sera le *cône asymptote* C_A de A. Enfin, l'ensemble $\Gamma_A = C_A \cap (- C_A)$ sera le *cône caractéristique de* A.

Dans [II], Bair donne quelques propriétés des cônes asymptotes et caractérisitiques des ensembles irradiés. Nous montrons que certaines de ces propriétés restent valables pour les ensembles étoilés tels que ${}^{aa}A = {}^aA$, c'est-à-dire les ensembles étoilés dont l'enveloppe algébrique est algébriquement fermée. Pour terminer, nous donnons une version topologique de ces propriétés.

(*) Institut de mathématique, 15, avenue des Tilleuls, 4000 Liège (Belgique).
Présenté par F. Jongmans, le 20 janvier 1972.

1. CONES ÉTOILÉS

1.1. — *Un cône* A *de sommet* 0 *est étoilé sur* a *et pointé si et seulement si* $\lambda a + \mu A \subset A$ *pour tous* λ, μ *non négatifs.*

Preuve. Si un cône A de sommet 0 remplit cette dernière condition, on a évidemment $\lambda a + (1 - \lambda)A \subset A$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$ et A est étoilé sur a; pour voir qu'il est pointé, il suffit de prendre λ, μ nuls. Réciproquement, soit A un cône de sommet 0, étoilé sur a; montrons que $\lambda a + \mu x \in A$ pour tous λ, μ non négatifs et pour tout x de A. Si $\lambda = 0$ (resp. $\mu = 0$), on a évidemment $\mu x \in A$ (resp. $\lambda x \in A$). Si λ et μ sont différents de 0, soient $\nu \in]0, 1[$ et $y \in A$. Comme A est étoilé sur a, $\nu a + (1 - \nu)y \in A$ et dès lors $\lambda a + \lambda\nu^{-1}(1 - \nu)y \in A$, vu que A est un cône de sommet 0. En particulier, si y désigne le point $\mu\nu(1 - \nu)^{-1}\lambda^{-1}x$ de A, $\lambda a + \mu x \in A$.

Corollaire. *Si* A *est un cône pointé de sommet* 0, *étoilé sur* a, *il est étoilé sur tout* αa, $\alpha \geqslant 0$; *partant,* $\mu(A)$ *est un cône convexe pointé en* 0.

1.2. — *Si* A *est un cône pointé de sommet* 0 *étoilé sur* a, $A = A + \mu(A)$.

Preuve. On a évidemment $A \subset A + \mu(A)$. Réciproquement, si $x \in A$ et $b \in \mu(A)$, $b + x \in A$ en vertu de 1.1.

2. ENSEMBLES ÉTOILÉS ET CONES

2.1. — *Soient* A *un ensemble tel que* ${}^{aa}A = {}^{a}A$, $b + K$ (K *cône pointé de sommet* 0) *un cône pointé inclus dans* ${}^{a}A$ *et* a *un point de* $\mu(A)$. *Alors le cône* $a + K$ *est inclus dans* ${}^{a}A$.

Preuve. Si $K = \{0\}$, le théorème est évident. Si K n'est pas uniponctuel, considérons une demi-droite $D = b + [0, u)$ de $b + K$ et montrons que la demi-droite $D' = a + [0, u)$ est incluse dans ${}^{a}A$. Considérons un point $k = a + \lambda u$ de D', $\lambda > 0$, et le point $k' = a + (\lambda + 1)u$. Un point z du segment $]b + (\lambda + 1)u, k'[$ s'écrit $z = \alpha\,[a + (\lambda + 1)u] + (1 - \alpha)\,[b + (\lambda + 1)u] = \alpha a + (1 - \alpha)\left[b + \dfrac{\lambda + 1}{1 - \alpha}u\right]$, $0 < \alpha < 1$. Il en résulte que z est un point du segment $]a, b + \dfrac{\lambda + 1}{1 - \alpha}u[$ et que, dès lors, $z \in {}^{a}A$, car $k' \in {}^{aa}A = {}^{a}A$ et $k \in {}^{a}A$ puisque $a \in \mu({}^{a}A)$.

2.2. — *Si* ${}^{aa}A = {}^{a}A$ *et si* $\mu(A)$ *contient un cône pointé* $a + K$ (K *cône pointé de sommet* 0), *alors* ${}^{a}A = {}^{a}A + K$, *de même que* ${}^{b}A = {}^{b}A + K$.

Preuve. Si $K = \{0\}$, le théorème est immédiat. Si K n'est pas uniponctuel, $a + K \subset \mu(A) \subset \mu({}^{a}A)$. Dès lors, ${}^{a}A$ est un ensemble algébriquement fermé dont le mirador $\mu({}^{a}A)$ contient le cône pointé $a + K$ et [III, 2.17] entraîne ${}^{a}A = {}^{a}A + K$.

Ce théorème est à rapprocher de [II, 2.4], qu'il généralise; en effet, si A est un ensemble algébriquement irradié, ${}^{aa}A = {}^{a}A$ [I, 3.9].

3. CONES ASYMPTOTES ET CONES CARACTÉRISTIQUES

3.1. — *Si* A *est un ensemble tel que* ${}^{aa}A = {}^{a}A$, $C_A + \mu(A) \subset {}^{b}A$; *si, de plus,* A *n'est pas uniponctuel,* $C_A + \mu(A) \subset {}^{a}A$.

Preuve. Si $C_A = \{0\}$, l'inclusion est immédiate. Si $k \in C_A$, $k \neq 0$, et si $a \in \mu(A)$, par définition de C_A, il existe un point x de ${}^{a}A$ tel que $x + [0, k) \subset {}^{a}A$, et par 2.1., $a + k \in {}^{a}A$.

3.2. — *Si* A *est un ensemble étoilé tel que* ${}^{aa}\mathrm{A} = {}^{a}\mathrm{A}$, $\mathrm{C_A}$ *est le cône de sommet* 0 *translaté de la réunion d'un point arbitraire* a *de* $\mu(\mathrm{A})$ *et des demi-droites pointées en* a *et incluses dans* ${}^{a}\mathrm{A}$.

Preuve. Si $\mathrm{C_A}$ est uniponctuel, le théorème est évident. Si $\mathrm{C_A}$ n'est pas réduit à un point, notons $\mathrm{C'_A}$ le cône pointé de sommet 0 translaté de la réunion d'un point a de $\mu(\mathrm{A})$ et des demi-droites pointées en a et incluses dans ${}^{a}\mathrm{A}$. On a évidemment $\mathrm{C'_A} \subset \mathrm{C_A}$. Si k désigne un point de $\mathrm{C_A} \setminus \{0\}$, il existe un point x de ${}^{a}\mathrm{A}$ tel que $x + [0, k) \subset {}^{a}\mathrm{A}$. Par le théorème 2.1, $a + [0, k) \subset {}^{a}\mathrm{A}$ et dès lors $k \in \mathrm{C'_A}$.

3.3. — *Si* A *est un ensemble étoilé tel que* ${}^{aa}\mathrm{A} = {}^{a}\mathrm{A}$, $\mathrm{C_A}$ *et* Γ_A *sont algébriquement fermés.*

Preuve. L'inclusion $\mathrm{C_A} \subset {}^{b}\mathrm{C_A}$ est évidente. Pour l'inclusion inverse, considérons un point x de ${}^{b}\mathrm{C_A}$. Si $x = 0$, on a $x \in \mathrm{C_A}$; on supposera donc $x \neq 0$. Comme alors $x \in {}^{a}\mathrm{C_A}$, il existe un segment $[a, x[$ $(a \neq x)$ inclus dans $\mathrm{C_A}$. Si $a \in (0, x)$, x appartient à $\mathrm{C_A}$. Si $a \notin (0, x)$, considérons le cône K formé de la réunion des demi-droites $[0, z)$ pour tout $z \in [a, x[$. Ce cône K est inclus dans $\mathrm{C_A}$ et le théorème 3.1 entraîne $\mathrm{K} + \mu(\mathrm{A}) \subset {}^{a}\mathrm{A}$. En particulier, si b est un point de $\mu(\mathrm{A})$, $b + \mathrm{K} \subset {}^{a}\mathrm{A}$. Un point quelconque $b + u$ de la demi-droite $[b, b + x)$ appartient à ${}^{aa}\mathrm{A}$ (donc à ${}^{a}\mathrm{A}$) car $[b + a, b + u[\subset {}^{a}\mathrm{A}$. Comme $[b, b + x)$ est inclus dans ${}^{a}\mathrm{A}$, la demi-droite $[0, x)$ est incluse dans $\mathrm{C_A}$.

Enfin, à partir de l'égalité $\Gamma_\mathrm{A} = \mathrm{C_A} \cap (-\mathrm{C_A})$, on montre aisément que Γ_A est algébriquement fermé.

Contre-exemple. Pour les ensembles étoilés qui ne vérifient pas la propriété ${}^{aa}\mathrm{A} = {}^{a}\mathrm{A}$, les théorèmes 2.1, 3.1 et 3.2 peuvent être mis en défaut; dans R^2, si B désigne l'orthant strictement positif, c'est-à-dire l'ensemble $\{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$ et d_n la demi-droite d'origine 0 et située dans B sur la droite d'équation $y = \frac{1}{n} x$, l'ensemble $\mathrm{A} = (\mathrm{B} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} d_n) \cup \{0\}$ est étoilé sur l'origine; ${}^{a}\mathrm{A}$ est l'orthant positif dont on a enlevé les points de l'axe des x mais pas l'origine, ${}^{aa}\mathrm{A}$ est l'orthant positif; si $a = (1, 1)$, $b = (1, 0)$, $a + [0, b) \subset {}^{a}\mathrm{A}$, $0 + [0, b) \not\subset {}^{a}\mathrm{A}$ et le théorème 2.1 est donc en défaut; $\mu(\mathrm{A}) = \{0\}$, $\mathrm{C_A}$ est l'orthant positif, donc $\mathrm{C_A} \not\subset {}^{a}\mathrm{A}$ et le théorème 3.1. est mis en défaut; on voit facilement que 3.2 est également mis en défaut.

4. ANALOGIES TOPOLOGIQUES

Dans un espace vectoriel topologique sur R, on pourrait définir une direction asymptotique d'un ensemble non vide A comme une demi-droite pointée en 0 dont un translaté au moins est inclus dans $\bar{\mathrm{A}}$, le cône asymptote $\mathrm{C_A}$ de A étant encore la réunion de l'origine et de toutes les directions asymptotiques de A et le cône caractéristique de A l'ensemble $\Gamma_\mathrm{A} = \mathrm{C_A} \cap (-\mathrm{C_A})$. Moyennant ce changement de définition des directions asymptotiques, on obtient une version topologique des théorèmes des paragraphes 2 et 3. Nous ne donnons que les énoncés de ces théorèmes, les démonstrations se déduisant aisément de celles des théorèmes correspondants des paragraphes 2 et 3.

4.1. — *Soient* A *une partie d'un espace vectoriel topologique,* $b + \mathrm{K}$ (K *cône pointé de sommet* 0) *un cône pointé inclus dans* $\bar{\mathrm{A}}$ *et* a *un point de* $\mu(\mathrm{A})$. *Alors le cône* $a + \mathrm{K}$ *est inclus dans* $\bar{\mathrm{A}}$.

4.2. — *Si* $\mu(A)$ *contient un cône pointé* $a + K$ *(*K *cône pointé de sommet* 0*), alors* $\bar{A} = \bar{A} + K$.

4.3. — *Pour toute partie non vide* A, $C_A + \mu(A) \subset \bar{A}$.

4.4. — *Si* A *est un ensemble étoilé,* C_A *est le cône de sommet* 0 *translaté de la réunion d'un point arbitraire* a *de* $\mu(A)$ *et des demi-droites pointées en* a *et incluses dans* $\bar{A}$.

4.5. — *Si* A *est un ensemble étoilé,* C_A *et* Γ_A *sont fermés.*

Le théorème 4.5 est une généralisation de la propriété suivante des ensembles convexes fermés [IV, theorem 8.2] :

Si A *est un ensemble convexe fermé non vide, alors* C_A *est fermé.*

RÉFÉRENCES

[I] J. Vangeldère, Sur une famille d'ensembles particuliers dans un espace vectoriel, *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège*, **38**, 1969, pp. 158-170.

[II] J. Bair, Cônes asymptotes et cônes caractéristiques, *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège*, **40**, 1971, pp. 428-437.

[III] L. Bragard, Ensembles étoilés et irradiés dans un espace vectoriel topologique, *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège*, **37**, 1968, pp. 276-285.

[IV] R. T. Rockafellar, Convex Analysis, Princeton University Press, 1970.