Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 41e année, nº 1-2. 1972, pp. 20-23

CÔNES ÉTOILÉS ET CÔNES ASYMPTOTES

par Léopold BRAGARD (*)

SUMMARY

In a linear space, we give properties both of the starshaped cones and of the asymptotic or characteristic cones of starshaped sets. Similar results are given in a topological linear space.

INTRODUCTION

Dans les paragraphes 1, 2 et 3 de cet article, nous nous plaçons dans un espace vectoriel sur R. Les définitions que nous rappelons ci-dessous sont empruntées principalement à Vangeldère [I] et à Bair [II].

Si a et b sont deux points distincts de L, $[a, b]$, $]a, b]$, (a, b), $[a, b)$ désigneront respectivement l'ensemble des points $a + \lambda(b - a)$ avec respectivement $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $0 < \lambda \leqslant 1$, λ réel, $\lambda \geqslant 0$. Si A est une partie de L, un point a de L tel que $]a, x] \subset A$ pour un choix convenable de x est dit *attenant* à l'ensemble A; l'ensemble des points attenants à A, noté ${}^aA$, s'appellera l'*attenance* de A; l'ensemble $A \cup {}^aA$ sera noté ${}^bA$ et appelé *enveloppe algébrique* de A. Une partie de L qui coïncide avec son enveloppe algébrique sera dite *algébriquement fermée*.

Un ensemble non vide A de L est *étoilé* sur un point a lorsque $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ implique $\lambda a + (1 - \lambda)A \subset A$; l'ensemble des points sur lesquels A est étoilé sera appelé *mirador* de A et noté $\mu(A)$. Rappelons que, pour tout ensemble étoilé autre qu'un singlet, $A \subset {}^aA$, de sorte que ${}^bA = {}^aA$ pour un tel ensemble. Signalons enfin que, pour tout ensemble étoilé, la propriété ${}^{aa}A = {}^aA$ est équivalente à la propriété ${}^{bb}A = {}^bA$.

On appelle *direction asymptotique* d'une partie non vide A de L toute demi-droite pointée en 0 dont un translaté au moins est inclus dans ${}^bA$. La réunion de l'origine et de toutes les directions asymptotique de A sera le *cône asymptote* C_A de A. Enfin, l'ensemble $\Gamma_A = C_A \cap (- C_A)$ sera le *cône caractéristique de* A.

Dans [II], Bair donne quelques propriétés des cônes asymptotes et caractérisitiques des ensembles irradiés. Nous montrons que certaines de ces propriétés restent valables pour les ensembles étoilés tels que ${}^{aa}A = {}^aA$, c'est-à-dire les ensembles étoilés dont l'enveloppe algébrique est algébriquement fermée. Pour terminer, nous donnons une version topologique de ces propriétés.

(*) Institut de mathématique, 15, avenue des Tilleuls, 4000 Liège (Belgique).
Présenté par F. Jongmans, le 20 janvier 1972.