Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 41e année, no 1-2, 1972, pp. 24-30

GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE KRASNOSEL'SKĬI

par André DESSARD (*)

SUMMARY

In this paper, we give a generalization of Krasnosel'skĭi's lemma for a kind of spaces including in particular the Minkowski spaces L_n and S.C.M. spaces [III]. It enables us to provide some characterizations of the convex kernel of a set A in that space by means of the regular points of A.

INTRODUCTION

Nous généralisons le théorème de Krasnosel'skĭi dans un type d'espaces plus généraux que les espaces de Minkowski, tels par exemple les espaces S.C.M. étudiés notamment par Day [III], ceci dans le but d'améliorer certains théorèmes de caractérisation du mirador d'un ensemble au moyen des points réguliers de cet ensemble.

1. DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Nous nous placerons dans un espace vectoriel topologique réel E de dimension non nulle. Un ensemble *lisse* est un corps convexe tel que par tout point de sa frontière passe un seul hyperplan de contact de cet ensemble; un ensemble convexe A est *strictement convexe* lorsque pour toute paire $\{a, b\}$ de points de A, le milieu du segment $[a: b]$ appartient à $\mathring{A}$. La *vue* A_x d'un point x de $\bar{A}$ sur A est $\{y \mid]x: y[\subset A\} \cup \{x\}$. L'ensemble des points de A tels que $A_x = A$ est le *mirador* $\mu(A)$ de A, et A est dit *étoilé* si $\mu(A) \neq \varnothing$. Un point x de $\bar{A}$ est un point *régulier* de A lorsque par x passe un hyperplan de contact de A_x; le demi-espace fermé incluant A_x sera noté D_x et appelé la *terrasse* de A en x. Le *cône asymptote* C_A d'un ensemble fermé A est la réunion de l'origine et de toutes les demi-droites pointées en 0 dont un translaté au moins est inclus dans A. Si A est convexe et si $u \in C_A \setminus \{0\}$, $[x: x + u)$ est inclus dans A pour tout point x de A.

2. PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

2.1. *Soit* S *un ensemble strictement convexe dans un espace vectoriel topologique* E. *Pour tout sous-espace vectoriel* E' *de* E, $S \cap E'$ *est strictement convexe dans* E'.

$S \cap E'$, ensemble convexe de E inclus dans E', est strictement convexe dans E', car $(S \cap E')^{\circ}_{E'} \subset \mathring{S}$ et supposer l'existence d'un segment vrai dans le premier de ces ensembles revient à nier la stricte convexité de S dans E.

(*) Institut de Mathématique, 15, avenue des Tilleuls, 4000 Liège, Belgique.
Présenté par F. Jongmans, le 17 février 1972.

2.2. *Soit* S *un ensemble lisse dans un espace vectoriel topologique* E. *Pour tout sous-espace vectoriel* E′ *rencontré par* $\mathring{S}$, $S \cap E'$ *est lisse dans* E′.

$S \cap E'$ est convexe dans E′, et si $a \in \mathring{S} \cap E'$, $a \in (S \cap E')^{\circ}_{E'}$, d'où $S \cap E'$ est un corps convexe dans E′. Soit alors $x \in (S \cap E')^{\cdot}_{E'} \subset \dot{S}$: par x passe un hyperplan de contact H de S et un seul; $H \cap E'$ est un hyperplan dans le sous-espace E′. Montrons qu'il est unique. S'il existe un hyperplan de contact T de $S \cap E'$ en x dans E′, avec $T \neq H \cap E'$, tout hyperplan de E incluant T rencontre $\mathring{S}$. Or, T, variété linéaire non vide de E′, est une variété linéaire non vide de E; comme $T \cap (S \cap E')^{\circ}_{E'} = \varnothing$, $T \cap \mathring{S} = \varnothing$. Par le théorème de Hahn-Banach, nous pouvons conclure à l'existence d'un hyperplan fermé de E incluant T et disjoint de $\mathring{S}$. Cet hyperplan doit nécessairement coïncider avec H et $T = H \cap E'$. De cette contradiction découle la conclusion.

2.3. *Corollaire. Si* S *est un ensemble lisse et strictement convexe d'un espace vectoriel topologique* E, *pour tout sous-espace vectoriel* E′ *rencontrant* $\mathring{S}$, $S \cap E'$ *est un ensemble lisse et strictement convexe dans* E′.

3. GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE KRASNOSEL'SKĬI

3.1. Soit S un ensemble convexe d'un espace vectoriel topologique E. Définissons, pour $u \neq 0$, $S_2(u) = \{x \in \dot{S} \mid \exists\, y \in \dot{S} \text{ et } \rho > 0 : y = x + \rho u\}$, et $S_1(u) = \dot{S} \setminus S_2(u)$.

Si S diffère de E et $\varnothing$, ces deux ensembles ne sont pas vides simultanément. Dans la suite, u désignera toujours un point fixé, différent de l'origine, et, sauf précision supplémentaire, $S_1 = S_1(u)$, $S_2 = S_2(u)$.

3.2. *Si* S *est un ensemble convexe, tout segment épointé* [*resp. toute demi-droite épointée*] *de direction* u *inclus dans* $\dot{S}$ *l'est aussi dans* S_2.

C'est d'une évidence totale.

3.3. *Si* S *est un ensemble convexe contenant une demi-droite* $[a : a - u)$, *pour tout point* x *de* S_2, *la demi-droite* $[x : x + u)$ *ne recontre pas* $\mathring{S}$.

Si $x + \mu u \in \mathring{S}$ avec $\mu > 0$, $x + \mu u + \bigcup_{\alpha \leqslant 0} \alpha\{u\}$ est inclus dans $\mathring{S}$, et x devrait appartenir à $\mathring{S}$, ce qui est absurde.

3.4. *Si* S *est un ensemble convexe, pour tout point* x *de* S_2, *la demi-droite* $[x : x - u)$ *ne rencontre pas* $\mathring{S}$.

Si $x \in S_2$ et si $[x : x - u)$ rencontre $\mathring{S}$ en un point z, $x \in [y : z]$ où y est le point de $\dot{S}$ dont la définition de S_2 garantit l'existence. Dès lors, $x \in \mathring{S}$, ce qui est absurde.

3.5. *Corollaire* I. *Si* S *convexe contient une demi-droite* $[a : a - u)$, *pour tout* x *de* S_2, *la droite* $(a + u : a - u)$ *ne rencontre pas* $\mathring{S}$.

3.6. *Corollaire* 2. *Si* S *est un ensemble convexe fermé tel que* $-u \in C_S$, *toute droite de direction* u *passant par un point de* S_2 *est disjointe de* $\mathring{S}$.

3.7. *Si* S *est un ensemble strictement convexe contenant une demi-droite* $[a : a - u)$ [*resp.* $[a : a + u)$], $S_2(u) = \varnothing$.

Supposons qu'il existe $x \in S_2(u)$: nous pouvons trouver $y \in \dot{S}$ et $\rho > 0$ tels que

$y = x + \rho u$; $]x : y[\subset \mathring{S}$, donc $z = \dfrac{x+y}{2} \in \mathring{S}$. Le point a ne peut appartenir à $(x : y)$, sinon x [resp. y] appartiendrait à $\mathring{S}$. Dès lors, la demi-droite $[a : z)$ insère z dans S et il existe $w \in S$ tel que $z = \lambda w + (1-\lambda)a$ avec $0 < \lambda < 1$; $x = \lambda w + (1-\lambda)$ $\left(a - \dfrac{\rho}{2(1-\lambda)}u\right)\left[\text{resp. } y = \lambda w + (1-\lambda)\left(a + \dfrac{\rho}{2(1-\lambda)}u\right)\right]$ ce qui implique que x [resp. y] appartient à $\mathring{S}$; ceci étant impossible, $S_2 = \varnothing$.

3.8. *Corollaire. Si* S *est un ensemble fermé, strictement convexe, tel que u ou $-u$ appartienne à* C_S, $S_2(u) = \varnothing$.

3.9. *Si* $u \notin C_S$, *avec* S *convexe fermé, et si* $x \in S_1$, *alors, pour tout* $\alpha > 0$, $x + \alpha u \notin S$.

Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $x + \alpha u \in S$. Ce point ne peut appartenir qu'à $\mathring{S}$, sinon $x \in S_2$. Comme $u \notin C_S$, nous pouvons trouver d'autre part $\mu > \alpha$ tel que $x + \mu u \notin S$; $[x + \mu u : x + \alpha u]$ rencontre $\dot{S}$ en un point y, de sorte que x devrait être un point de S_2.

3.10. Si q est un point de la frontière d'un ensemble lisse et strictement convexe désignons par Σ_q le demi-espace fermé disjoint de $\mathring{S}$ et limité par l'hyperplan de contact H_q de S en q.

Si S *est un ensemble lisse et strictement convexe,* $\Sigma_q \cap [a : a + u) = \varnothing$ *pour tout point a de* $\mathring{S}$ *et tout point q de* S_2.

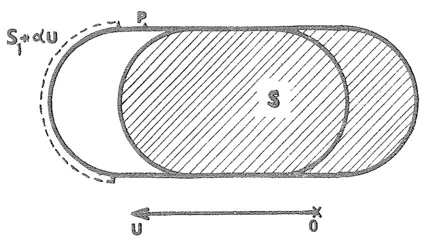
Désignons par d la droite $(a : a + u)$ (nécessairement, $a \neq u$). Soit d' la parallèle à d passant par q. De deux choses l'une : H_q est parallèle à d, et alors $\Sigma_q \cap [a : a + u) = \varnothing$, ou H_q n'est pas parallèle à d. Dans ce cas, $d' \cap \dot{S}$ est une paire $\{p, q\}$, car nous savons que d' rencontre $\dot{S}$ en un autre point que q [cf. I, 4.1]. Alors, $p \in S_1$, sinon $q \in S_1$. Supposer que $\Sigma_q \cap [a : a + u) \neq \varnothing$ revient à supposer que $H_q \cap [a : a + u) \neq \varnothing$. Soit b appartenant à cette intersection; $]q : b[\cap]a : p[\neq \varnothing$, car cette intersection contient le point $r = \dfrac{\mu}{\lambda + \mu}p + \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}a = \dfrac{\mu}{\lambda + \mu}q + \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}b$, si λ et μ sont deux scalaires strictement positifs tels que $b = a + \mu u$ et $p = q + \lambda u$. Or, $]a : p[\subset \mathring{S}$ et $]b : q[\cap \mathring{S} \neq \varnothing$, ce qui est absurde.

3.11. *Si* A *est un ensemble semi-compact et* S *un ensemble convexe fermé disjoint de* $\bar{A}$, *tel qu'il existe* $\theta > 0$ *avec* $S + \theta u$ *rencontrant* $\bar{A}$, *si de plus* $u \notin C_S$, *alors il existe* $\alpha > 0$ *tel que* $(S + \alpha u) \cap \bar{A} = (S_1 + \alpha u) \cap \dot{A} \neq \varnothing$.

L'ensemble $L = \{\lambda > 0 \mid \bigcup_{0 \leqslant \mu \leqslant \lambda} (S + \mu u) \text{ rencontre } \bar{A}\}$ admet 0 comme minorant et dès lors une borne inférieure α. Démontrons que $\alpha > 0$. Si $\alpha = 0$, il existe une suite $\{\alpha_m\}_{m \in N}$ située dans L non vide et décroissant vers 0. La famille $\{\bar{A} \cap \bigcup_{0 \leqslant \mu \leqslant \alpha m} (S + \mu u) \mid m \in N\}$ constitue une suite de fermés non vides emboîtés; en effet, pour tout m, $\bar{A} \cap \bigcup_{0 \leqslant \mu \leqslant \alpha m} (S + \mu u) = \bar{A} \cap [S + \bigcup_{0 \leqslant \mu \leqslant \alpha m} \mu\{u\}]$ est non vide et $S + \bigcup_{0 \leqslant \mu \leqslant \alpha m} \mu\{u\} = S + [0 : \alpha_m u]$ est fermé comme somme d'un convexe fermé et d'un segment compact. Par la propriété de Cantor,

$$\bigcap_{m \in N} [\bar{A} \cap \bigcup_{0 \leqslant \mu \leqslant \alpha m} (S + \mu u)] = \bar{A} \cap [\bigcap_{m \in N} (S + [0 : \alpha_m u])] = \bar{A} \cap S \neq \varnothing.$$

Soit B l'ensemble convexe $S + \bigcup_{0 \leqslant \mu \leqslant \alpha} \mu\{u\} = S + [0 : \alpha u]$. $\bar{A} \cap \mathring{B} = \varnothing$, car s'il existait y dans cette intersection, nous pourrions trouver $\rho > 0$ (et $\rho < \alpha$) tel que $y + \rho u \in S + \alpha u$; $y \in \bar{A} \cap [S + (\alpha - \rho)u]$, ce qui contredirait la définition de α. De même, $\mathring{A} \cap B = \varnothing$, car si x appartenait à cette intersection, il existerait $\sigma > 0$ tel que $x - \sigma u \in \bar{A}$. Or, x peut s'écrire sous la forme $y + \mu u$, avec $y \in S$ et $0 < \mu \leqslant \alpha$; nous aurions donc, en restreignant éventuellement σ de sorte que $\sigma < \mu$, $x - \sigma u = y + (\mu - \sigma)u \in B$ et α ne serait pas la borne inférieure de L. Il reste à montrer que $\bar{A} \cap B \neq \varnothing$. Considérons une suite $\{\alpha_m\}_{m \in N}$ de L décroissant vers α. La famille $\{\bar{A} \cap (S + [0 : \alpha_m u]) \mid m \in N\}$ est une suite de fermés non vides emboités : $\bar{A} \cap [\bigcap_{m \in N} (S + [0 : \alpha_m u])] \neq \varnothing$, donc $\bar{A} \cap (S + [0 : \alpha u]) \neq \varnothing$, vu que $\bigcap_{m \in N} (S + [0 : \alpha_m u]) = S + [0 : \alpha u]$. Comme $\bar{A} \cap (S + [0 : \beta u]) = \varnothing$ pour tout $\beta < \alpha$, vu la définition de α, nous avons encore $\bar{A} \cap (S + \alpha u) \neq \varnothing$. Montrons que $S_1 + \alpha u \subset \dot{B}$. Si $x \in S_1 + \alpha u$, il existe $y \in S$ tel que $x = y + \alpha u$. Si nous supposons que $x \in \mathring{B}$, nous pouvons trouver $\sigma > 0$ tel que $x + \sigma u \in B$, et dès lors $\rho \geqslant \alpha$ tel que $x + \rho u \in S + \alpha u$, de sorte que $y + \rho u \in S$, contrairement à 3.9. Tout point p de $\dot{B}$ qui n'appartient pas à $S_1 + \alpha u$ fait partie d'un ensemble $\dot{S} + \mu u$, avec $0 \leqslant \mu \leqslant \alpha$: il est immédiat que $\mathring{S} + [0 : \alpha u]$ est inclus dans $\mathring{B}$, donc $p \in \dot{S} + \mu u$ $(0 \leqslant \mu \leqslant \alpha)$; si $\mu = \alpha$, $p \in S_2 + \alpha u$ et il existe $q \in \dot{S} + \alpha u$ tel que $q = p + \rho u$ $(\rho > 0)$. $[q : p[\subset \mathring{B}$, sinon, d'après $p = r + \alpha u$, $r \in B$, p appartiendrait à $\mathring{B}$. Donc, $[q : p] \subset \dot{B} \cap (S + \alpha u)$, d'où nécessairement $[q : p] \subset (S + \alpha u)^{\cdot} = \dot{S} + \alpha u$. Dans ces conditions, $p \in \dot{S} + (\alpha - \varepsilon)u$ pour tout $\varepsilon \in]0, \inf(\alpha, \rho)[$, et $p \in \dot{S} + \sigma u$ avec



$0 \leqslant \sigma < \alpha$. Alors, $\mathring{A} \cap \dot{B} = \mathring{A} \cap (S + \alpha u) = \mathring{A} \cap (S_1 + \alpha u)$, cet ensemble étant non vide.

3.12. *L'énoncé précédent est valable pour* A *quelconque et* S *convexe, semi-compact, fermé, disjoint de* $\bar{A}$, *tel que* $u \notin C_S$ *et qu'il existe* $\theta > 0$ *avec* $S + \theta u$ *rencontrant* $\bar{A}$.

Il est très simple d'adapter la démonstration précédente en conséquence.

3.13. *Si* S *est un ensemble fermé, strictement convexe, tel que ni* u *ni* $-u$ *n'appartiennent à* C_S, *une droite de direction* u *donne lieu à une et une seule des éventualités suivantes :*

être disjointe de S;

rencontrer $\dot{S}$ *en un seul point appartenant à* S_1;

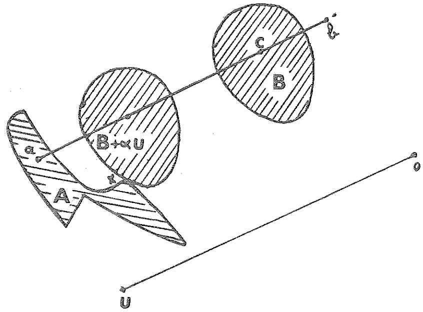
rencontrer $\dot{S}$ *en deux points, un de ces points appartenant à* S_1, *l'autre à* S_2.

3.14. Plaçons-nous dans un espace vectoriel topologique E muni d'une base β de voisinages de l'origine formée d'ensembles lisses et strictement convexes.

Si A *est un ensemble d'adhérence semi-compacte,* a *un point de* $\bar{A}$ *et* b *un point de* E *tels que* $[a:b] \not\subset \bar{A}$, *il existe un point régulier* x *de* A *tel que* D_x *soit séparé fortement de* $\{b\}$ *par un hyperplan réel fermé.*

Il existe $c \in [a:b] \cap \complement \bar{A}$, et un voisinage V de c disjoint de $\bar{A}$. Tout espace vectoriel topologique étant régulier, nous pouvons supposer V fermé. Dans V est inclus un voisinage de c, translaté d'un élément de β. Soit B l'adhérence de ce nouvel ensemble; B est lisse, strictement convexe et disjoint de $\bar{A}$. Si nous posons $u = a - b$, et si $a = c + \mu u$ $(0 < \mu < 1)$, le voisinage $B + \mu u$ de a rencontre $\bar{A}$; $u \notin C_S$ car $a \in \bar{A}$ et V est disjoint de $\bar{A}$. Les conditions de 3.11 étant remplies, nous pouvons affirmer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\bar{A} \cap (B + \alpha u) = \dot{A} \cap (B_1 + \alpha u) \neq \varnothing$, si $B_1 = \dot{B} \setminus \{x : \exists\, y \in \dot{B}$ et $\rho > 0$ tels que $y = x + \rho u\}$. Soit x un point de cette intersection; au moyen du résultat 4.5 de 1, nous pouvons dire que H_x l'hyperplan de contact de $B + \alpha u$ en x, sépare D_x de $B + \alpha u$. Considérons maintenant deux cas.

1e cas : si H_x est parallèle à $(a:b)$, H_x sépare D_x de $\{b\}$; x est le point régulier cherché.



2e cas : si H_x n est pas parallèle à $(a:b)$, et si $(-u) \notin C_B$, la droite d parallèle à $(a:b)$ passant par x rencontre $\dot{B} + \alpha u$ en deux points : x et un autre point y [cf. 4.1 de 1]. Comme $x \in B_1 + \alpha u$, $y \in (\dot{B} \setminus B_1) + \alpha u = B_2 + \alpha u$; si $x = y + \mu u$, $\mu > 0$, $y = x + \mu(-u)$ et $x \in B_2(-u) + \alpha u$; par 3.10, $H_x \cap [c + \alpha u : b) = \varnothing$, et dès lors H_x sépare D_x de $\{b\}$.

Dans les deux cas, nous obtenons une séparation forte au moyen d'un hyperplan translaté de H_x passant par $\dfrac{x + c + \alpha u}{2}$. Enfin, si $(-u) \in C_S$, $B_2 + \alpha u$ est vide et d ne peut rencontrer $\dot{B} + \alpha u$ qu'en x, contrairement à 4.1 de 1.

3.15. *Dans un espace vectoriel topologique accessible* E *muni d'une base de voisinages de l'origine formée d'ensembles lisses et strictement convexes, un ensemble compact* A *non vide est étoilé si et seulement si l'intersection de toute famille finie non vide de terrasses de* A *est non vide.*

Soit A satisfaisant aux conditions de l'énoncé. A peut être convexe et est alors évidemment étoilé. Si A n est pas convexe, l'ensemble M des points réguliers de A n'est pas vide, d'après 3.14. Si $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset M$, $\bigcap_{i=1}^{n} D_{xi} \neq \varnothing$; $\{D_x \cap A \mid x \in M\}$ constitue une famille d'ensembles fermés dans A compact, et $\bigcap_{x \in M} [D_x \cap A] \neq \varnothing$, sinon il existerait une famille finie $D_{x_1}, \ldots, D_{x_m}$ telle que $\bigcap_{i=1}^{m} [D_{xi} \cap A] = \varnothing$, ce qui est contraire aux hypothèses. Il existe donc $x^* \in \bigcap_{x \in M} [D_x \cap A]$, et A est alors étoilé par rapport à x^*. En effet, s'il existait $y \in A$ avec $[x^* : y] \not\subset A$, nous pourrions trouver un point régulier z de A tel que A_z soit séparé fortement de $\{x^*\}$ par un hyperplan H; celui-ci séparerait fortement $\{x^*\}$ de $\bigcap_{x \in M} D_x$, ce qui est impossible. Dès lors, $x^* \in \mu(A)$.

3.16. Remarquons que dans les énoncés 3.11 et 3.12, nous pouvons remplacer l'hypothèse de semi-compacité de A [resp. S] par celle d'existence dans E d'un ensemble semi-compact K d'intérieur non vide, ce qui implique que E est localement compact. En effet, dans ce cas, E possède une base de voisinages de l'origine composée d'ensembles lisses, strictement convexes et compacts.

3.17. *Dans un espace vectoriel topologique* E *possédant une base de voisinages de l'origine formée d'ensembles lisses et strictement convexes et incluant un ensemble semi-compact d'intérieur non vide, un ensemble fermé* A *tel que pour toute famille finie non vide de points réguliers de* A, *la famille des terrasses correspondantes ait une intersection non vide incluse dans un compact* K, *est étoilé par rapport à un point de* K.

A peut être convexe, et est alors étoilé par rapport à chacun de ses points, notamment par rapport à tout point de K.

Si A n'est pas convexe, nous savons, en rapprochant la remarque précédente de 3.14, que l'ensemble M des points réguliers de A est non vide. Alors, $(\bigcap_{x \in M} D_x) \cap K \neq \varnothing$, car $\{D_x \cap K : x \in M\}$ constitue une famille de fermés non vides dans un compact, telle que toute sous-famille finie ait une intersection non vide. Si $x^* \in (\bigcap_{x \in M} D_x) \cap K$, A est étoilé par rapport à ce point, car s'il existait $y \in A$ avec $[x^* : y] \not\subset A$, nous pourrions trouver un point régulier z de A tel que D_z soit séparé fortement de $\{x^*\}$.

3.18. *Dans un espace vectoriel topologique* E *possédant une base de voisinages de l'origine fermée d'ensembles lisses et strictement convexes, le mirador* $\mu(A)$ *d'un ensemble fermé semi-compact* A *est l'intersection des terrasses de* A.

Si x est un point de $\mu(A)$ n'appartenant pas à l'intersection des terrasses de A, nous pouvons trouver un point régulier y de A tel que $x \notin D_y$. D'autre part, comme $x \in \mu(A)$, $[x : y] \subset A$. Nous aurions donc $A_y \not\subset D_y$, ce qui est impossible.

Prenons maintenant x dans l'intersection de toutes les terrasses de A et prou vons que $x \in \mu(A)$. S'il existait $y \in A$ tel que $[x : y] \not\subset A$, nous pourrions trouver un point régulier z de A tel que A_z soit séparé fortement de $\{x\}$ et x ne pourrait appartenir à l'intersection de toutes les terrasses de A.

3.19. *Dans un espace vectoriel topologique dont l'origine possède une base de voisinages lisses et strictement convexes, pour qu'un ensemble semi-compact* A *soit étoilé, il faut que l'intersection des terrasses de* A *soit non vide; si de plus* A *est fermé, cette condition est aussi une condition suffisante.*

3.20. Donnons encore les résultats suivants :

Dans un espace vectoriel topologique dont l'origine possède une base de voisinages lisses et strictement convexes,

lorsque A *est un ensemble semi-compact fermé,* $\mu(A) = \bigcap_{x \in M} A_x$, *où* M *est l'ensemble des points réguliers de* A;

tout ensemble semi-compact d'adhérence distincte de l'espace entier possède au moins un point régulier;

lorsque A *est un ensemble semi-compact fermé,* $\mu(A) = \bigcap_{C \in \mathscr{C}} C$, *où* $\mathscr{C}$ *désigne une famille de composantes convexes telle que l'ensemble des points réguliers de* A *soit inclus dans* $\bigcup_{C \in \mathscr{C}} C$.

lorsque A *est un ensemble semi-compact fermé, pour tout ensemble* D *dense par rapport à l'ensemble des points réguliers de* A, $\mu(A) = \bigcap_{x \in D} A_x$.

Ces énoncés, ainsi que les résultats 3.18 et 3.19, ne sont que des adaptations de théorèmes de L. Bragard [II]. Si les hypothèses sur le type d'espace dans lequel ils sont valables paraissent fortes, elles sont cependant vérifiées pour les espaces L_n et les espaces S.C.M. étudiés chez Day [III].

BIBLIOGRAPHIE

[I] Bair J. et Dessard A., Ensembles lisses et strictement convexes. *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège*, nº **11-12**, 1970, pp. 558-566.

[II] Bragard L., Caractérisation du mirador dans un espace vectoriel. *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège*, nº **5-6**, 1970, pp. 260-263.

[III] Day M., Strict convexity and smoothness of normed spaces. *Trans. Math. Soc.*, **78**, 1955, pp. 516-528.

[IV] Valentine F. A., Convex sets, Mac Graw-Hill, New-York, 1964.