Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 37e année, nº 11-12, 1968, pp. 539-541

# PETIT CHORAL ET FUGUE SUR LE THÈME DE LA SÉPARATION

par F. JONGMANS
*Membre de la Société* (*)

SUMMARY

A well-known separation theorem in euclidean space, which has gradually been improved by several authors, obtains here a still more general and precise form with a strictly algebraic proof. Further generalizations in real linear spaces seem possible only by dropping or weakening the assumption of finite codimension for one of the given sets.

## 1. PRÉLUDE

Dans le flot des théorèmes de séparation de deux ensembles convexes A, B au sein d'un espace vectoriel, un courant qui semble approcher de son aboutissement tend à soumettre A, B à des conditions aussi faibles que possible pour la séparation non stricte de ces ensembles par un hyperplan. Il n'est, pour s'en persuader, que de comparer, dans les deux éditions du fascicule XV de Bourbaki (I, p. 77 ; II, p. 139), l'énoncé de l'exercice 8 de l'édition de 1953 (ch. II, § 3) à celui de l'exercice 13 de l'édition de 1966 (ch. II, § 5). Tout récemment, Grünbaum (III, p. 11) a présenté des raffinements supplémentaires, auxquels un esprit chagrin opposerait peut-être encore les réserves suivantes.

Pour ce qui est du contenu même de la proposition, un hyperplan qui contiendrait à la fois A et B les séparerait assurément, mais d'une manière dénuée d'intérêt. Au lieu d'écarter d'un revers de main cette éventualité par des hypothèses infligées à A, B (ou pis, de l'ignorer, cf. II), il semblerait préférable de formuler des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une séparation non triviale. Secondement, on se prend à songer que l'énoncé purement algébrique de Grünbaum a peut-être quelque chance de s'étendre à un espace vectoriel de dimension quelconque, moyennant des restrictions bénignes sur le choix de A, B. Quant à la démonstration, Grünbaum interpelle vigoureusement la topologie de l'espace numérique dans lequel il se place explicitement. Pour une propriété à résonance strictement algébrique, une telle redondance de moyens ne laisse pas d'être regrettable, à moins d'être fatale. J'espère précisément montrer qu'elle n'est pas fatale en adaptant assez platement un raisonnement publié naguère par Valentine (V, p. 25) à propos d'une version moins poussée du théorème en question. C'est donc de trois côtés à la fois que je

(*) Institut de Mathématiques, 15, avenue des Tilleuls, Liège.
Manuscrit reçu le 21 novembre 1968.

fais subir au théorème les avanies que j'ai la faiblesse d'appeler des améliorations (*).

## 2. CHORAL

J'ai adopté récemment (IV) une terminologie commode pour l'étude algébrique de la convexité. Notamment, si A est une partie du R-espace vectoriel E, je nomme enveloppe linéaire ${}^l\mathrm{A}$ de A la variété linéaire affine sous-tendue par A ; internat ${}^i\mathrm{A}$ de A ce que Grünbaum appelle relative interior, Bourbaki l'intérieur de A relativement à ${}^l\mathrm{A}$ (pour une partie A de $\mathrm{R}^n$), et que Valentine note intv A ; internat propre (${}^i\mathrm{A}$ sous la condition ${}^l\mathrm{A} = \mathrm{E}$) ce que Valentine appelle core et Bourbaki ensemble des points internes de A. Les points de l'internat (resp. internat propre) de A seront dits internes (resp. proprement internes) à A. Une propriété bien connue de l'espace numérique revêt sans effort une forme un peu plus générale : quel que soit E, l'internat de tout ensemble convexe non vide de dimension finie n'est pas vide.

Je devrai faire appel à de menues propriétés de l'enveloppe linéaire ou de l'internat ; sans être d'une nouveauté provocante, ces propriétés semblent s'être complues jusqu'ici dans la clandestinité. *Quelles que soient les parties non vides* A, B *de* E, ${}^l(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = {}^l\mathrm{A} + {}^l\mathrm{B}$, ${}^i\mathrm{A} + {}^i\mathrm{B} \subset {}^i(\mathrm{A} + \mathrm{B})$. La preuve n'a rien d'épuisant. L'inclusion de ${}^l(\mathrm{A} + \mathrm{B})$ dans ${}^l\mathrm{A} + {}^l\mathrm{B}$ est banale. Réciproquement, tout point $\sum_{=1}^{p} \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j b_j \left(\sum_i \alpha_i = 1, \sum_j \beta_j = 1\right)$ de ${}^l\mathrm{A} + {}^l\mathrm{B}$ peut s'écrire $\sum_i \sum_j \alpha_i\beta_j (a_i + b_j)$, avec $\sum_i \sum_j \alpha_i\beta_j = 1$.

De son côté, si $c = a + b$ ($a \in {}^i\mathrm{A}$, $b \in {}^i\mathrm{B}$) est un point de ${}^i\mathrm{A} + {}^i\mathrm{B}$ et $z = x + y$ ($x \in {}^l\mathrm{A}$; $y \in {}^l\mathrm{B}$) un autre point de ${}^l(\mathrm{A} + \mathrm{B})$, il existe $\alpha > 0$ tel que $a + \lambda(x - a) \in \mathrm{A}$ et $b + \lambda(y - b) \in \mathrm{B}$ pour $|\lambda| < \alpha$, et dès lors $c + \lambda(z - c) \in \mathrm{A} + \mathrm{B}$ ; en sorte que $c \in {}^i(\mathrm{A} + \mathrm{B})$.

A quelle condition les internats de A, B ont-ils pour somme celui de A + B? Je n'ai pas de réponse décisive à cette question, mais les deux contre-exemples suivants semblent indiquer que la condition ne doit pas être très libérale. Si A est, dans $\mathrm{R}^2$, l'ensemble des points d'abscisse rationnelle, B celui des points d'ordonnée rationnelle, ${}^i\mathrm{A} + {}^i\mathrm{B}$ est vide, ${}^i(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \mathrm{R}^2$ ; si A est, toujours dans $\mathrm{R}^2$, une demi-circonférence, B un segment perpendiculaire au diamètre terminal, il est clair que ${}^i(\mathrm{A} + \mathrm{B})$ n'est pas vide, contrairement à ${}^i\mathrm{A}$.

Quoi qu'il en soit, un cas particulier fort simple va suffire aux besoins présents. Si l'intersection des sous-espaces vectoriels parallèles à ${}^l\mathrm{A}$, ${}^l\mathrm{B}$ se réduit à $\{0\}$, je dirai que A et B *s'ignorent*. En pareil cas, tout point de ${}^l\mathrm{A} + {}^l\mathrm{B}$ (resp. A + B) s'exprime d'une seule manière comme une somme de deux points pris respectivement dans ${}^l\mathrm{A}$, ${}^l\mathrm{B}$ (resp. A, B) ; au surplus, l'intersection de ${}^l\mathrm{A}$ et ${}^l\mathrm{B}$, ou même de A et B, est l'ensemble vide ou un singlet.

*Si les parties non vides* A, B *de* E *s'ignorent*, ${}^i(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = {}^i\mathrm{A} + {}^i\mathrm{B}$. Soit en effet $c = a + b$ ($a \in \mathrm{A}$, $b \in \mathrm{B}$) un point de ${}^i(\mathrm{A} + \mathrm{B})$. Il suffit de montrer que $a \in {}^i\mathrm{A}$. Pour $x \in {}^l\mathrm{A}$, il existe $\alpha > 0$ tel que $|\lambda| < \alpha$ entraîne l'appartenance de $a + b + \lambda(x - a)$

(*) *Note ajoutée sur épreuves.* Depuis la présentation de cet article, j'ai pris connaissance d'un travail de Klee (*Trans. Amer. Math. Soc.*, 134, 1968, pp. 133-147) qui pousse très loin dans $\mathrm{R}^n$ l'étude des types de séparation autres que celui considéré ici.

à A + B. Comme ce point est la somme de $a + \lambda(x - a)$ et $b$, points pris respectivement dans ${}^i$A, ${}^i$B, on est forcé d'admettre que $a + \lambda(x - a) \in$ A, donc $a \in {}^i$A.

### 3. FUGUE

J'en viens au théorème de séparation.

*Pour que, dans un R-espace vectoriel* E, *deux ensembles convexes* A, B *doués de points internes et dont l'un est de codimension finie puissent être séparés par un hyperplan qui ne les contient pas tous les deux, il faut et il suffit que leurs internats soient disjoints.* La nécessité est à peu près évidente : si $a \in {}^i\text{A} \cap {}^i\text{B}$, un hyperplan dont un demi-espace fermé associé contient A et l'autre B contient visiblement $a$, puis A et B.

La suffisance peut être regardée comme acquise lorsque ${}^i\text{A} = \text{E}$. On sait en effet que A et ${}^i$B admettent alors un hyperplan séparant, qui ne contient pas A. Celui des deux demi-espèces fermés associés qui ne contient pas A contient non seulement ${}^i$B, mais B, sinon le demi-espace ouvert antagoniste inclurait un segment épointé situé dans ${}^i$B. La propriété est donc acquise lorsque la codimension de A est nulle.

Montrons que, si elle est acquise dans n'importe quel espace où l'un des ensembles proposés a la codimension $m - 1$, elle s'étend au cas où A est de codimension finie positive $m$. On peut trouver dans E un point $a$ non situé dans le sous-espace vectoriel parallèle à ${}^i$A. Les ensembles convexes $\text{C} = \text{A} + [0 : a]$, $\text{D} = \text{A} - [0 : a]$, tous deux de codimension $m - 1$, admettent des internats non vides ${}^i\text{C} = {}^i\text{A} + ]0 : a[$, ${}^i\text{D} = {}^i\text{A} - ]0 : a[$, puisque A et $\pm [0 : a]$ s'ignorent. Si ${}^i$B ne rencontre pas ${}^i$A, il ne peut rencontrer à la fois ${}^i$C et ${}^i$D. Supposons en effet que $c \in {}^i\text{B} \cap {}^i\text{C}$, $d \in {}^i\text{B} \cap {}^i\text{D}$. On aurait à la fois $c = x + \gamma a$ $(x \in {}^i\text{A}, 0 < \gamma < 1)$ et $d = y - \delta a$ $(y \in {}^i\text{A}, 0 < \delta < 1)$ ; dès lors, $(\gamma + \delta)^{-1} (\delta c + \gamma d) = (\gamma + \delta)^{-1}(\delta x + \gamma y)$ ferait à la fois partie de ${}^i$A et ${}^i$B.

Admettons par conséquent que ${}^i$B ne rencontre pas ${}^i$C. Par l'hypothèse d'induction, un hyperplan H sépare B de C, par suite de A, sans contenir simultanément B, C. Si H contient à la fois A et B, la codimension de A au sein de H est $m - 1$, l'hypothèse d'induction livre G, « hyperplan dans H », qui sépare A, B sans inclure ces deux ensembles. G est l'intersection de H avec un hyperplan K de E ; c'est l'hyperplan séparant désiré.

Pour la nécessité de la condition énoncée ci-dessus, les hypothèses formulées au sujet de A, B sont superflues, sauf celle de convexité. Qu'en est-il pour ce qui regarde la suffisance? Je ne sais si le théorème se maintient sans l'hypothèse de la codimension finie, mais à coup sûr il ne le fait pas lorsque l'internat d'un des ensembles A, B est vide. Il suffit de prendre pour A ou B l'espace E tout entier, supposé de dimension infinie, et pour B ou A l'ensemble d'internat vide et de codimension nulle que représente l'enveloppe convexe de l'origine et d'une base. Bien évidemment, si E est de dimension finie, on peut se borner, dans l'énoncé du théorème, à décrire A, B comme des ensembles convexes non vides.

### NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE


I. Bourbaki, Espaces vectoriels topologiques, ASI 1189, Paris, Hermann, 1953.

II. Ibid., 2e édition, 1966.

III. Grünbaum, Convex polytopes, London, Interscience publishers, 1967.

IV. Jongmans, Théorème de Krein-Milman et programmation mathématique. *Bull. Soc. Sc. Liège*, 37, 1968, p. 261-270.

V. Valentine, Convex sets, New York, Mac Graw Hill, 1964.