

M.C.Escher : maître des symétries

Communication présentée au colloque « Les symétries » - 28 novembre 2014

Jos LEYS¹

Delvauxstraat 34, 2620 Hemiksem, Belgique.

Résumé :

Le grand artiste néerlandais M.C.Escher, bien qu'il n'ait jamais eu une formation formelle en mathématiques, est un des artistes le mieux connu pour l'inspiration mathématique dans ses œuvres.

Escher était fasciné par les symétries : il a dessiné des dizaines de pavages du plan avec des formes compliquées. Dans cet article nous explorons, à l'aide de l'ordinateur, les symétries cachées dans quelques autres de ses œuvres : « l'effet Droste » et la géométrie hyperbolique.

Escher est mort en 1972, et il n'a donc jamais connu l'époque des ordinateurs personnels. On peut se demander comment Escher aurait réagi sur la disponibilité des outils digitaux

Au même moment on redécouvre la génialité mathématique dans les œuvres du non-mathématicien qu'était M.C.Escher.

1. M.C.Escher

Maurits Cornelis Escher (1898-1972), grand artiste néerlandais, est connu, entre autres, pour ses œuvres d'inspiration mathématique. Il n'était pourtant pas mathématicien et n'a jamais eu une formation formelle en mathématiques. Sa formation était en arts décoratifs. Chez le grand public, il est peut-être le mieux connu pour ses dessins de géométrie impossible : on voit un moulin à l'eau en *perpetuum mobile*, des moines qui montent et descendent un escalier sans fin, ou encore un belvédère dont l'étage semble très étrange.

Il y a aussi ses *métamorphoses* : des dessins très larges où les formes changent continûment. La figure 1 en montre un exemple². Ces formes sont souvent des pavages du plan, un sujet qui l'intéressait énormément.

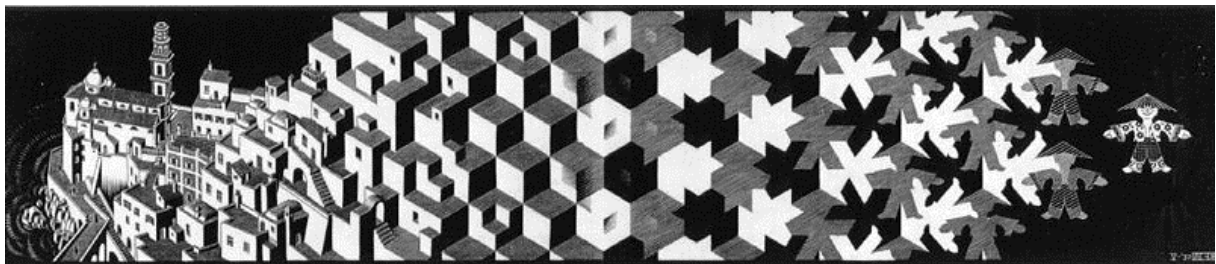


Figure 1 : Métamorphose I par M.C.Escher

¹ Jos.leys@pandora.be, www.josleys.com

² Pour toutes les reproductions d'œuvres de M.C. Escher dans cet article : © 2014 The M.C.Escher company, The Netherlands. All rights reserved.



Figure 2 : E57 par M.C. Escher

Parmi ses œuvres, on compte environ 70 pavages du plan par des dessins d'animaux ou formes humaines. Sa fascination pour les symétries commença en 1937 quand son frère, un géologue, lui montre un article par le mathématicien hongrois George Pólya sur des groupes de symétries. On peut paver le plan avec exactement 17 types de pavages³, ce qui a été prouvé mathématiquement à la fin du 19^{ème} siècle par le mathématicien russe Fyodorov. Escher, malgré qu'il ne comprît pas très bien les principes abstraits de groupes en mathématique, a alors étudié profondément les différents types de pavages. Il a même écrit un petit livre sur le sujet expliquant les pavages en termes plus simples.

Dans cet article, on va explorer deux autres exemples de symétries dans son œuvre : l'effet Droste et les pavages hyperboliques.

2. L'effet Droste.

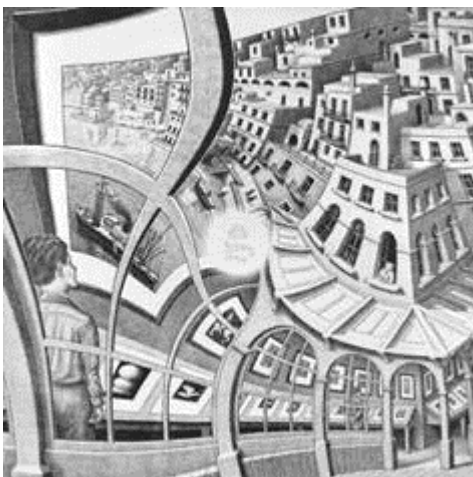


Figure 3: Prentententoonstelling

En 1956, Maurits Cornelis Escher compléta un dessin qu'il appelait *Prentententoonstelling*, (Galerie d'images). Le dessin montre un jeune homme qui regarde une image déformée d'une manière qui semble ne pas avoir de sens. Au milieu de l'image, on voit une tache blanche énigmatique.

En 2003, une équipe de mathématiciens de l'université de Leiden, sous la direction du Professeur Hendrik Lenstra a réussi à déchiffrer la structure mathématique de l'image. Une fois cette structure connue, ils ont pu « compléter » l'image en remplissant la tache blanche, à l'aide d'un algorithme numérique. Ils ont publié un article⁴ là-dessus qui a été particulièrement bien accueilli aussi bien dans des cercles universitaires que dans la presse grand public. À la surprise générale, l'équipe de Lenstra a montré que la structure de l'image est la même que la structure d'une image à effet Droste . L'effet Droste tire son nom d'un paquet de cacao de la compagnie du chocolatier Droste aux Pays-Bas qui montre une infirmière portant un plateau sur lequel il y a un paquet de cacao. L'image sur ce paquet de

³ Voir par exemple: *Pavages du plan*, par Xavier Hubaut, <http://xavier.hubaut.info/coursmath/doc/pavages.htm>

⁴ *The Mathematical Structure of Escher's Print Gallery* by B. de Smit and H. W. Lenstra Jr. <http://www.ams.org/notices/200304/fea-escher.pdf>



Figure 4: Cacao Droste

cacao est encore une infirmière portant un plateau sur lequel il y a un paquet de cacao... (ad infinitum)

Comment construire une copie d'une image quelque part dans l'image et comment répéter cela à l'infini ? La méthode de Lenstra pour la transformation d'images est en trois étapes que nous allons expliquer.

Cette transformation n'est pas triviale, et il est clair qu'Escher le non-mathématicien a fait un exploit remarquable avec son dessin.

Étape 1 : Le logarithme.

Les transformations que nous allons décrire sont des transformations de nombre complexes. Considérer le logarithme d'un nombre complexe est une chose un peu compliquée. Un nombre complexe z s'écrit souvent sous la forme $z = r e^{i\theta}$ où $r \geq 0$ désigne le module, et θ l'argument. On définit alors naturellement $\ln(z)$ comme $\ln(r) + i\theta$ mais cela pose deux problèmes. Le premier, comme d'habitude, est qu'il faut supposer que z n'est pas nul, c'est-à-dire que $r > 0$. Le second est que θ n'est pas unique : $r e^{i\theta} = r e^{i(\theta + 2\pi n)}$ pour chaque entier n , si bien qu'il faut choisir un θ . La tradition est de choisir celui pour lequel $0 \leq \theta < 2\pi$, mais ce n'est qu'une convention ; on pourrait en prendre une autre. Comme $0 \leq \theta < 2\pi$, la transformation $z \mapsto \ln(z)$ transforme le plan complexe (privé de l'origine) en un ruban de hauteur 2π au-dessus de l'axe réel. Prendre d'autres conventions pour le logarithme reviendrait à ajouter $2n\pi i$ si bien que l'image du logarithme recouvrirait alors une autre bande, translatée de la première. On obtient donc une infinité d'images du plan, suivant les conventions choisies : ceci sera important pour la suite.

Regardons comment cette transformation agit sur deux cercles concentriques (centrés à l'origine), de rayons r_1 et r_2 .

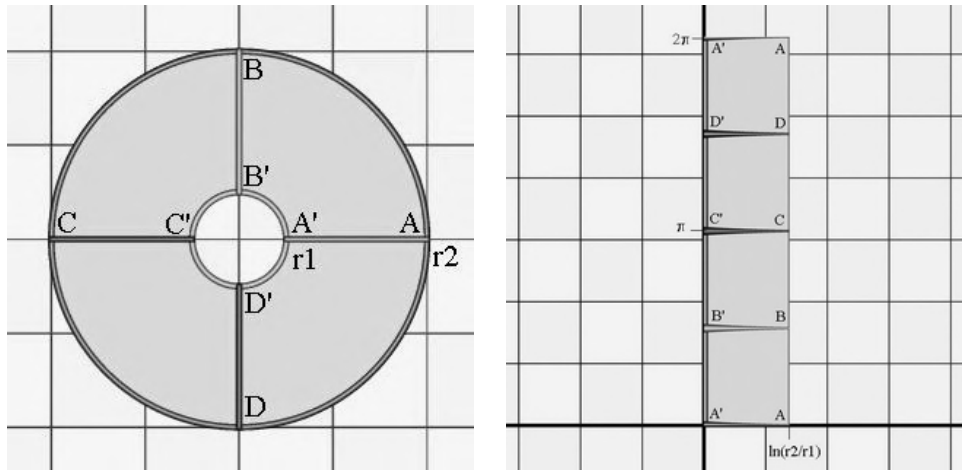


Figure 5: action de $\ln(z/r_1)$

La figure 5 illustre la transformation $z \mapsto \ln(z/r_1)$. Le cercle intérieur devient un segment vertical passant par l'origine et le cercle extérieur devient un autre segment vertical à distance $\ln(r_2/r_1)$ du premier. C'est comme si nous avions coupé la figure le long du segment A–A' et déplié le tout en un rectangle.

Étape 2 : rotation et dilatation.

Figure 6 montre la rotation du rectangle de la figure 5 de droite jusqu'à ce que sa diagonale coïncide avec l'axe imaginaire, et on rétrécit le rectangle, par une homothétie, pour que la longueur de sa diagonale soit 2π .

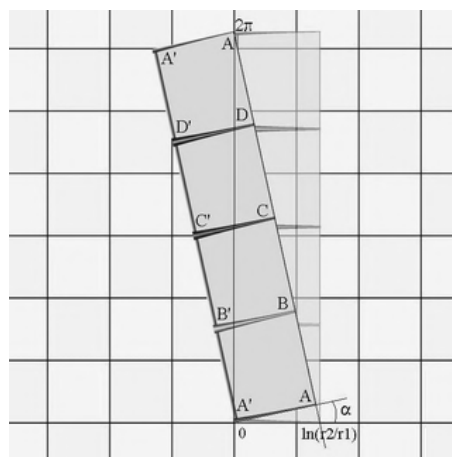


Figure 6 : rotation

Dans la prochaine étape, on va effectuer la transformation inverse du logarithme.

Étape 3 : exponentielle.

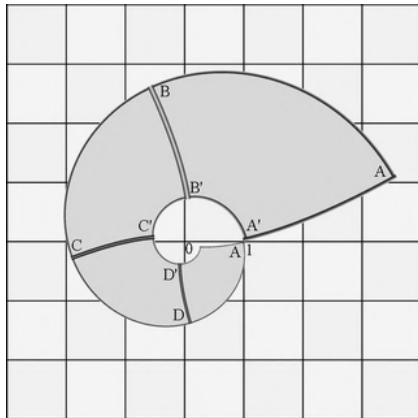


Figure 7: Rectangle après étape 3

On obtient l'image de la figure 7 en appliquant la transformation $z \mapsto e^z$ sur le rectangle penché. Tous les côtés du rectangle sont transformés en spirales. À noter que les sommets du rectangle sur la diagonale verticale (qui se trouvent à 0 et $2i\pi$) sont tous les deux transformés au point 1. On peut calculer explicitement les transformations effectuées. Elles ne dépendent que du quotient r_2/r_1 . Lors de l'étape 2, le rectangle s'est vu appliquer la transformation $z \mapsto zfe^{i\alpha}$ avec $f = \cos(\alpha)$ et $\alpha = \arctan(\ln(r_2/r_1)/2\pi)$.

La composition des trois étapes donne la transformation $z \mapsto (z/r_1)^\beta$, avec $\beta = fe^{i\alpha}$.

On reprend maintenant l'étape 2. On construit un pavage du plan avec le rectangle qu'on avait tourné d'un angle α et on applique alors la transformation de l'étape 3.

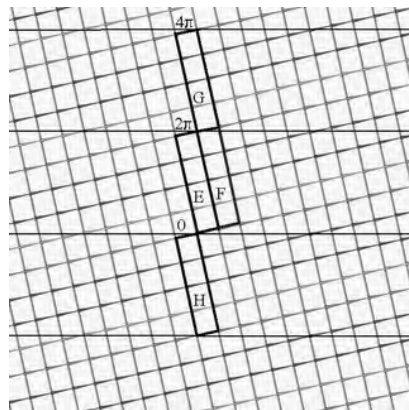


Figure 8

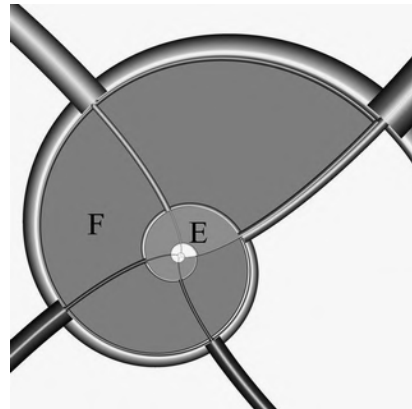


Figure 9

Le rectangle E dans la figure 8 est le rectangle de base et celui-ci est transformé en le domaine E de la figure 9. Le rectangle F à son tour est transformé en le domaine F de la figure 9. On obtient ainsi un nombre infini de copies de l'image originale, l'anneau entre deux cercles, qui pavent le plan (toujours privé de l'origine). Tous ces pavés sont semblables : on peut passer de E à F sur l'image de droite par une similitude, composition d'une dilatation (d'un facteur $|(r_2/r_1)^\beta|$) et d'une rotation (d'un angle égal à l'argument de $(r_2/r_1)^\beta$).

Dans l'étape 2, nous avons dilaté la diagonale du rectangle, puis effectué une rotation de telle sorte que la diagonale devienne verticale. Le but était que les deux extrémités de la diagonale aient la même image par l'exponentielle (puisqu'elles diffèrent de $2i\pi$). Mais on peut tout

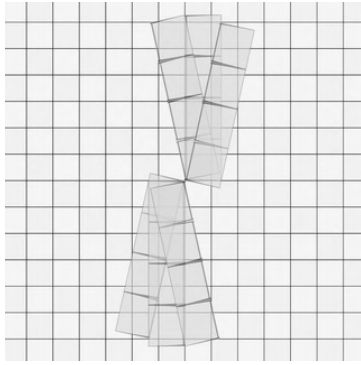


Figure 10

aussi bien faire tourner le rectangle du même angle dans l'autre sens et ce sont les extrémités de l'autre diagonale qui auront la même image par l'exponentielle : la spirale image tournera alors dans l'autre sens. On peut aussi choisir de ne pas tourner du tout! Ce sont maintenant les deux extrémités des côtés verticaux qui ont la même image par l'exponentielle. Enfin, on peut également effectuer une symétrie par rapport à l'origine. On voit toutes les configurations possibles sur la figure 10.

Lorsqu'on ne fait pas tourner le rectangle ou qu'on le fait tourner d'un demi-tour, la transformation va produire un nombre infini de copies concentriques de l'image originale. Dans les autres cas, il y aura une dilatation f et une rotation d'angle α , $-\alpha$, $\pi-\alpha$ ou $\pi+\alpha$, et l'image finale va produire des copies connectées en spirales.

Récapitulons, pour transformer une image entre deux cercles concentriques :

- on choisit r_1 et r_2 (une adaptation simple est nécessaire si les cercles ne sont pas centrés sur l'origine) ;
- on calcule α , f et β ;
- on effectue le pavage avec les rectangles et on calcule $e^{\beta \ln(z/r_1)}$ pour tous les pixels.

Figure 11 montre un exemple: image originale à gauche, image transformée à droite⁵.

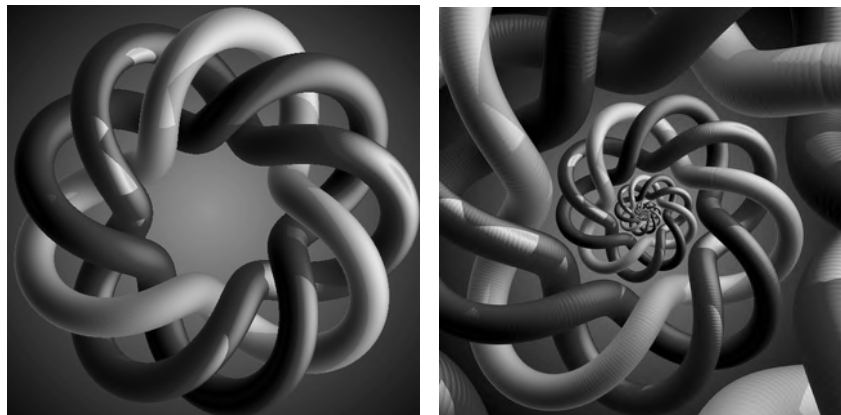


Figure 11

L'algorithme peut être adapté pour des cercles non concentriques ou même pour n'importe quelle forme. Prenons d'abord des carrés concentriques.

⁵ Pour d'autres exemples, regardez http://www.josleys.com/show_gallery.php?galid=291 sur le site de l'auteur.

Le domaine entre les deux carrés dans l'image de gauche de figure 12 est transformé en le domaine foncé de la deuxième image par la transformation logarithmique. Après exponentiation, on obtient la troisième image. Si on effectue d'abord une rotation du pavage, on obtient l'image de droite.

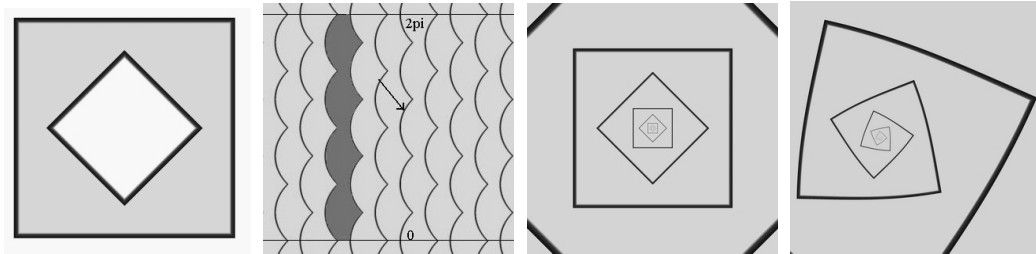


Figure 12

On peut donc adapter l'algorithme pour des carrés non-concentriques, mais aussi pour des rectangles, et à la fin pour n'importe quel contour. Dans ce cas, il faut d'abord rendre transparente la forme qu'on veut employer dans l'image. Rendre transparente une portion d'une image numérique veut dire que la valeur des octets alpha blending correspondants est zéro (il faut définir la région transparente à la main à l'aide d'un logiciel graphique comme Photoshop). Avec une image qui a un « trou » transparent, il n'est pas trop difficile d'écrire un algorithme qui détecte le bord du trou. Ceci est illustré par les images de la figure 13. À gauche, l'image originale. Au milieu, une image avec section transparente, ce qui crée une région similaire dans l'image de droite (on peut ajouter une rotation si on le souhaite).



Figure 13

Selon la rotation choisie à l'étape 2 de la transformation, on obtient alors les images de la figure 14 :



Figure 14

On peut faire des zooms illimités sur ces images. On connaît le rapport entre la taille du grand contour et celle du petit, et ceci permet de calculer la valeur de β . On peut alors calculer la dilatation et la rotation nécessaire pour obtenir une image identique. Il suffit donc de produire un petit nombre d'images intermédiaires entre deux images identiques pour obtenir un film « zoom » qu'on peut alors regarder en boucle.

La figure 15 montre d'autres exemples d'images réalisées avec la méthode du « trou transparent » :



Figure 15

Retournons à l'image d'Escher.

L'équipe de Lenstra a montré que c'est en effet une image à effet Droste, et ils ont pu mesurer les caractéristiques : il y a une proportion $m=256$ entre le petit 'carré' et le grand. L'angle de rotation à l'étape 2 est donc $\alpha=\arctan(\ln(m)/2\pi)=41.429\dots$ degrés et le facteur

$f=\cos(\alpha)=0.749767\dots$. Avec $\beta=fe^{i\alpha}$, on obtient $|m\beta|=22.5836\dots$ et l'argument de $m\beta$ est $157.62559\dots$ degrés.

Ceci a donc permis de reconstruire la fameuse tache blanche. Si on fait un zoom de facteur 22.5836 et si on tourne l'image de -157.62559 degrés, on obtient une image identique. Avec cette information et l'aide d'un artiste qui a reconstruit l'image originale non déformée, le secret de la tache blanche a donc été révélé comme étant une copie de l'image originale, environ 23 fois plus petite... On peut regarder le résultat en animation⁶.

Il est presque incroyable que M.C. Escher, qui n'était pas mathématicien, ait pu dessiner sa *Galerie d'Images* par simple intuition. Une intuition géniale, il faut bien le reconnaître !

3. Pavages hyperboliques

Escher a dessiné plus de 70 pavages dans le plan, mais il n'a dessiné que quatre pavages hyperboliques. Dans une lettre à un de ses enfants il écrivit que ces pavages étaient 'horriblement difficiles' . (Il ne devait non seulement dessiner, mais aussi couper en bois pour imprimer ses œuvres !)



Figure 16 : Pavage hyperbolique "Anges et démons" de M.C. Escher

Pour ces pavages, Escher a collaboré avec le mathématicien anglo-canadien H.M. Coxeter, et ils sont devenus des amis.

La géométrie hyperbolique est très différente de ce que nous connaissons tous, et ce qui est la géométrie euclidienne, après les axiomes d'Euclide. Le modèle le plus connu est celui du *disque de Poincaré* qui met un univers plat dans un disque de rayon 1.⁷

En mesure hyperbolique, la distance du centre vers le bord du disque est infinie. Les 'lignes droites' sont des segments de cercles qui sont orthogonales sur le disque. Des points symétriques vis-à-vis une de ces 'lignes droites' ne semblent pas du tout être symétriques à nos yeux euclidiennes, mais en mesurant avec un mètre ruban hyperbolique les distances sont les mêmes des deux côtés. Figure 17 montre des points P et P' qui sont symétriques vis-à-vis la 'ligne droite' qui passe par M.

⁶ *Escher and the Droste effect*. <http://escherdroste.math.leidenuniv.nl/>

⁷ Géométrie hyperbolique : Jos Leys, « Une chambre hyperbolique » - Images des Mathématiques, CNRS, 2008. <http://images.math.cnrs.fr/Une-chambre-hyperbolique.html>

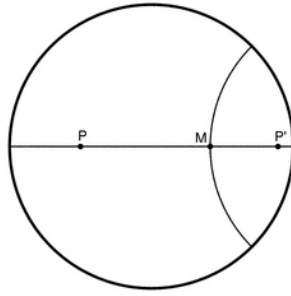


Figure 17 : Points symétriques

Les pavés d'un pavage hyperbolique deviennent de plus en plus petits près du bord, mais si nous aurions des yeux hyperboliques, nous verrions que tous les pavés sont exactement de la même taille !

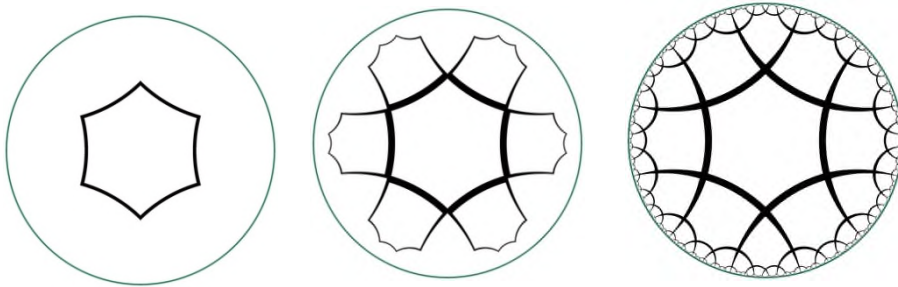


Figure 18 : Pavage hyperbolique

L'ordinateur permet de transformer des pavages euclidiens en pavages hyperboliques⁸ :

On coupe un pavé fondamental d'un pavage euclidien, et le transforme en pavé hyperbolique. Cette transformation est effectuée par une projection verticale sur une sphère, suivie par une projection stéréographique dans le plan.

⁸ D'après une idée de Craig Kaplan dans *Computer Graphics and Geometric Ornamental Design*, <
http://www.cgl.uwaterloo.ca/~csk/phd/kaplan_diss_escher_print.pdf

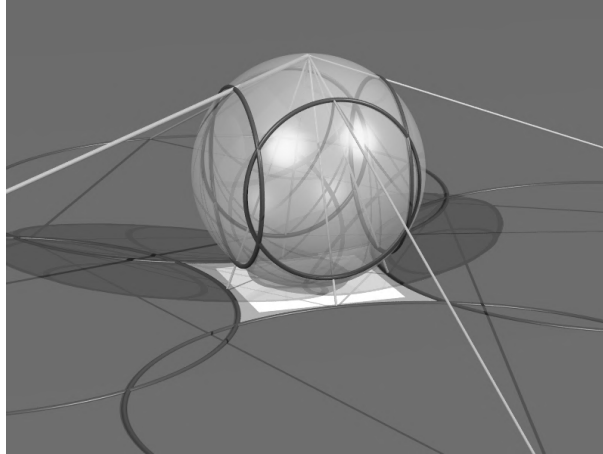


Figure 19 : Construction d'un pavé hyperbolique

Figure 19 montre un carré (blanc) dans le plan. Ce carré est projeté verticalement sur une sphère d'un certain rayon. Ce rayon est important pour que le pavage qu'on veut construire s'agence bien. Ensuite on projette l'image du carré sur la sphère stéréographiquement sur le plan, c'est-à-dire avec le pôle nord de la sphère comme centre de projection. On obtient alors un carré dont les côtés sont des cercles, comme figure 20.



Figure 20 : Carré à côtés circulaires

On peut ensuite construire le pavage hyperbolique en construisant les pavés voisins à l'aide d'inversions itérées dans ces cercles qui sont les côtés du pavé central. Dans l'exemple de la figure 21, il faut aussi appliquer une rotation pour obtenir la bonne position du dessin.



Figure 21 : Inversions itérées.

On obtient le pavage hyperbolique ‘complet’ après une dizaine d’itérations. Il est vrai que à ce moment le pavage n’est pas complet du tout car il faudrait itérer un nombre de fois infini pour vraiment remplir le disque, mais comme les pavés près du bord deviennent de plus en plus petits, le disque de la figure 22 nous semble complet.



Figure 21 : Pavage complet

Avec cette méthode on peut convertir (presque) tous les pavages du plan d’Escher en pavages hyperboliques, et donc produire d’œuvres Escher qu’Escher n’a jamais vu ⁹ ! On peut se demander s’il se serait servi des outils digitaux qui n’existaient malheureusement pas à son époque.

⁹ Pour d’autres exemples, voir cette page sur le site de l’auteur : http://www.josleys.com/show_gallery.php?galid=325

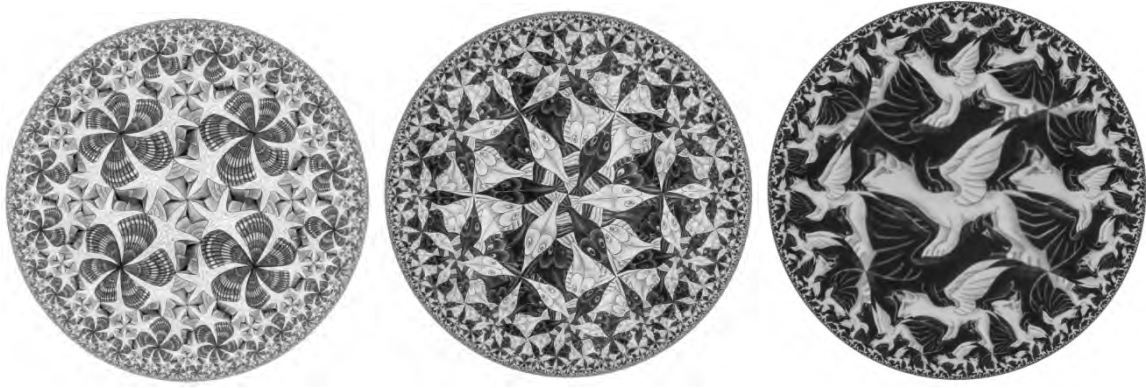


Figure 22 : Exemples de pavages 'hyperbolisés'

Les transformations d'images par ordinateur permettent d'aller encore plus loin. On commence avec la construction du pavage hyperbolique (figure 23).

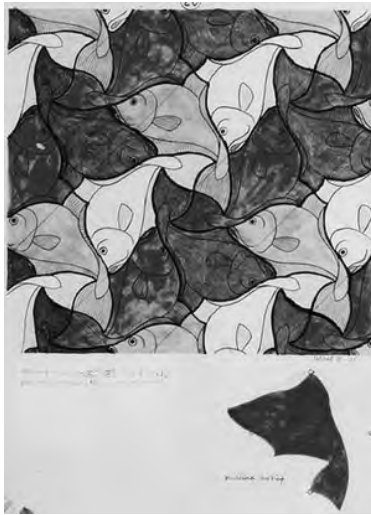


Figure 23a : Pavage 'E106' de M.C. Escher

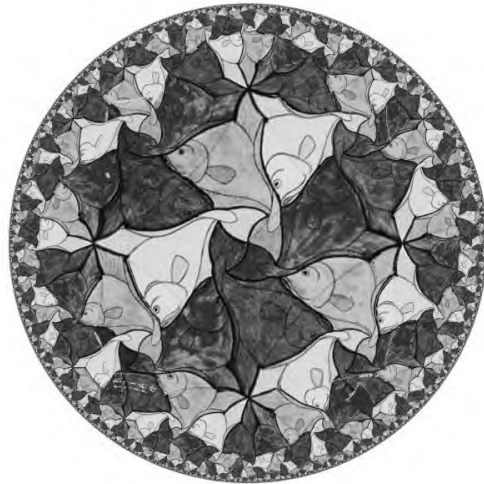


Figure 23b : Version hyperbolique de 'E106'

On applique ensuite la transformation $z \rightarrow \frac{z}{\pi} \ln \left(\frac{1+z}{1-z} \right)$, et on obtient figure 24 : une bande infiniment longue dans la direction horizontale avec un métrique hyperbolique dans la direction verticale.

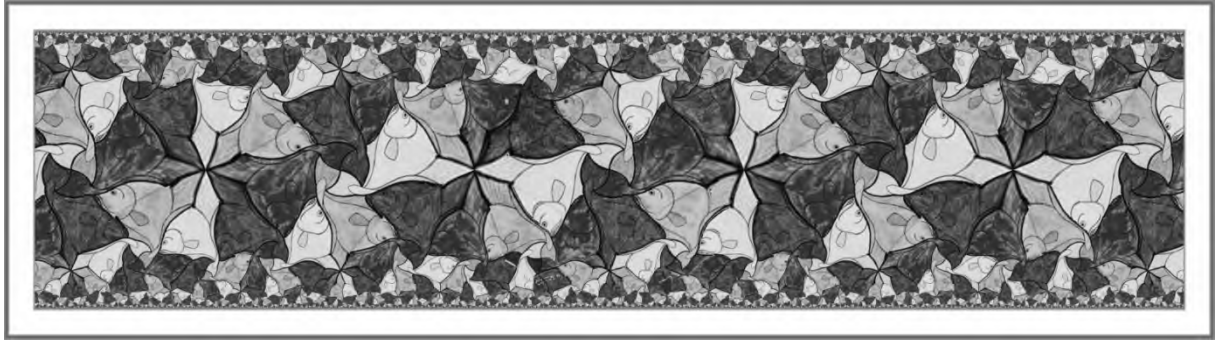


Figure 24 : Image transformée.

Cette image est périodique dans la direction horizontale de période P . On applique ensuite la transformation $z \rightarrow e^{\frac{i2\pi(z+1)}{kP}}$, où k est un nombre entier, pour obtenir la figure 25, un disque troué.

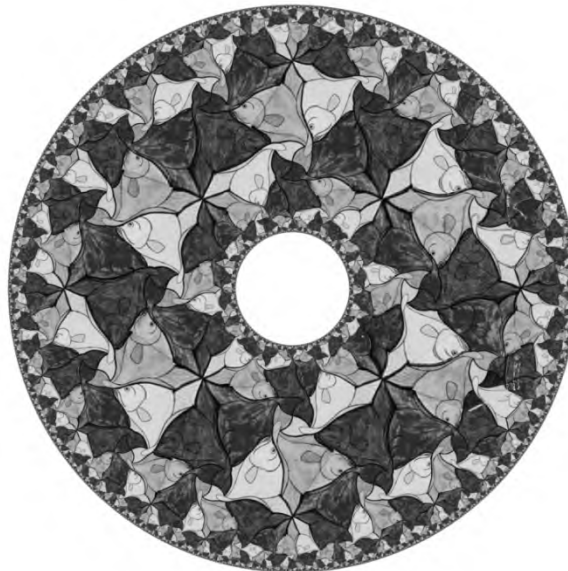


Figure 25 : Image transformée

Pour convertir le disque de Poincaré en le « carré de Poincaré », la transformation est beaucoup plus compliquée¹⁰. Figure 26 montre le résultat.

¹⁰ Pour la transformation vers le carré il faut une transformation de Schwarz-Christoffel.

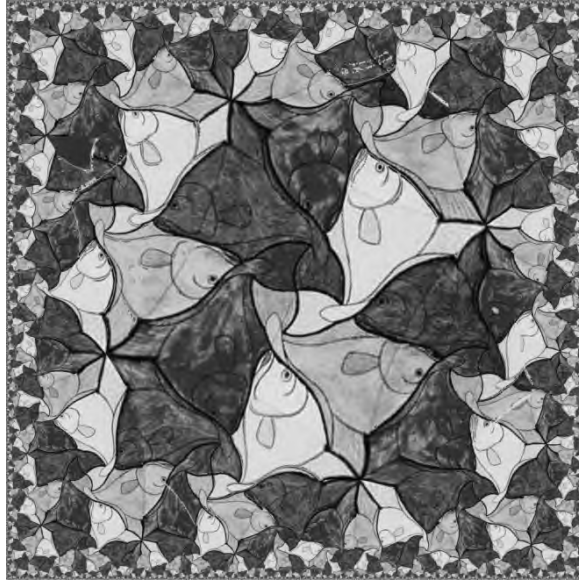


Figure 26 : Transformation en carré

Il est clair que le dessin à la main de ces types de pavages hyperboliques est en pratique très difficile, voire impossible. Escher a pourtant réussi à en produire quatre !

4. Conclusion

Nous avons vu deux exemples de symétries. « l'effet Droste » produit une image répétée à l'infini à l'intérieur de l'image même. Dans les pavages hyperboliques, un nombre infini de pavés peut être placé à l'intérieur d'un cadre fini.

Il est assez facile pour nous de produire de telles images à l'aide de l'ordinateur. Escher a produit ses images à la main. En vue de la complexité des deux exemples qu'on a décrits, ceci est un exploit assez remarquable.

On peut bien affirmer que M.C. Escher était maître des symétries !