*Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège, vol. 77 (2008) 9 - 28*

Manuscrit reçu le 10 octobre 2007, accepté le 4 avril 2008

# CONDITION DE LEVI POUR UN PROBLEME DE GOURSAT ASSOCIE A DES SYSTEMES D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

D. GOURDIN et M. SEIFOUDINI*

Dans cet article, nous étudions les opérateurs aux dérivées partielles sur $\mathbb{R}^{n+2}$, pseudo-différentiels par rapport à $y \in \mathbb{R}^n$, différentiels par rapport à $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, matriciels et faiblement hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constante au plus égale à deux et nous examinons le problème de Goursat linéaire avec les conditions de Levi dans l'espace des fonctions indéfiniment différentiables. Pour démontrer l'existence et l'unicité de ce problème, nous allons établir des inégalités d'énergie et le domaine de dépendance. Nous nous inspirons des travaux de Mme Y. Hasegawa [8] et [9] qui ont étudié un problème similaire pour une seule équation dans l'espace des fonctions indéfiniment différentiables. Nous proposons d'étendre ces résultats à des systèmes d'équations aux dérivées partielles dans l'espace des fonctions indéfiniment différentiables.

**Abstract**

In this paper, we study operators with matricial coefficients in $\mathbb{R}^{n+2}$ which are pseudo differential, with respect to $y \in \mathbb{R}^n$, differential, with respect to $t \in \mathbb{R}$ and $x \in \mathbb{R}$ and weakly hyperbolic with characteristics of constant multiplicities equal or less than two. We solve the correspondant linear Goursat problem with additional Levi conditions in $C^\infty$. For existence and unicity demonstration, we need energy inequalities and dependance domaine.
We are inspired by Mrs Y. Hasegawa's works ([8] and [9]), who studied similar problem for one equation in the $C^\infty$ space.

* Address: Laboratoire d'Analyse Complexe de l'Institut de Maths de Jussieu, Université Paris VI, 175, rue Chevaleret 75013 Paris, FRANCE. email:seifoudi@math.jussieu.fr

# 1 Notations et Définitions

Soient $N,m \in \mathbb{N}$, le point générique de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, sera noté $(t,x,y)$, on utilisera les notations habituelles des dérivations, à savoir $D_t = -i\dfrac{\partial}{\partial_t}$, $D_x = -i\dfrac{\partial}{\partial_x}$ et $D_y = \Big(-i\dfrac{\partial}{\partial_{y_1}},\ldots,-i\dfrac{\partial}{\partial_{y_n}}\Big)$; les variables duales de $t$, $x$ et $y$ sont notées $\tau$, $\xi$ et $\eta$.
On considère $S^m_{1,0} = S^m_{1,0}(\mathbb{R})^n \times \mathbb{R}^n$ l'espace des symboles des opérateurs pseudo-différentiels classiques d'ordre $m$ de $L^m(\mathbb{R}^n)$ défini dans [10].

On notera $\mathcal{E}_t$ l'espace des fonctions $C^\infty$ en $t$ et

$$\tilde{H}^\infty_{x,y} = \Big\{f \ \in \ C^\infty_{x,y};\ \int_{|x|<X}\int_{\mathbb{R}^n} \mid D^\alpha_x D^\beta_y f(x,y)\mid^2 dxdy < \infty,\ \ \forall\, \alpha,\beta,X>0\Big\}$$

l'espace des fonctions de classe $C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ dont toutes les dérivées sont de carré intégrable sur $B(0,X)\times\mathbb{R}^n$, pour tout $X>0$,
où $B(0,X) = \{x \in \mathbb{R},\ \mid x \mid < X\}$; on notera également(cf début du sous-paragraphe 2.2):

$$\begin{aligned}
\parallel f \parallel^2{}_{k,\Omega(t)} &= \sum_{j+|\alpha|\le k}\int_{\Omega(t)} \mid D^j_x D^\alpha_y f\mid^2 dxdy\\
\parallel u \parallel_k &= \parallel u \parallel_{H^k(\mathbb{R}_x\times\mathbb{R}^n_y)}\\
\parallel \psi \parallel^2{}_{x,k} &= \sum_{|\alpha|\le k}\int \mid D^\alpha_y \psi\mid^2 dy
\end{aligned}$$

Rappelons l'expression du polynôme sous-caractéristique d'un opérateur $h$ (J. Vaillant [16] page 15), en utilisant les notations de sommation d'Einstein:

$$\mathcal{K}_h \equiv [H^{\star A}_B - \frac{1}{2}\partial^\lambda_\lambda(H^A_B)]\gamma_A\delta^B + \frac{1}{2}H^A_B(\partial^\lambda\delta^B\partial_\lambda\gamma_A - \partial^\lambda\gamma_A\partial_\lambda\delta^B)\ \ modH'$$

où $\gamma$ et $\delta$ représentent des vecteurs propres respectivement à droite et à gauche de la matrice caractéristique $H = (H^A_B)_{A,B}$ (appelée encore matrice principale de $h$) pour une racine caractéristique double, zéro du polynôme $H'$ avec $detH = (H')^2H$", et $H^* = (H{*}^A_B)_{A,B}$ représente la matrice sous-principale de $h$.

On considère $\mathcal{H}$ une matrice $N\times N$ d'opérateurs différentiels par rapport à $t$ et $x$ et pseudo-différentiels par rapport à $y$ d'ordre global $l+m$. On suppose que $\mathcal{H}$ admet la décomposition suivante:

(1.1) $$\mathcal{H} = hk - r$$

où

$$h(t,x,y;D_t,D_x,D_y) = \sum_{0\le i+j\le m} a_{i,j}(t,x,y;D_y)D_t^iD_x^j,$$

$$k(t,x,y;D_t,D_x,D_y) = \sum_{j=0}^{l} b_j(t,x,y;D_y)D_x^j$$

avec les $a_{ij}(t,x,y;D_y)$ et $b_j(t,x,y,D_y)$, respectivement, dans $L^{m-(i+j)}(\mathbb{R}^n)$ et $L^{l-j}(\mathbb{R}^n)$, par rapport à $y$, dépendant d'une façon $C^\infty$ des paramètres $t$ et $x$; $r$ un opérateur matriciel $N \times N$ admettant des propriétés particulières que l'on explicitera ultérieurement et d'ordre inférieur ou égal à $m + l - 2$ .

On supposera que les opérateurs $h$ et $k$ vérifient les hypothèses suivantes.

Soient $h_m$ et $k_l$ les matrices principales de $h$ et $k$, c'est à dire:

$$h_m(\tau;\xi,\eta) = \sum_{0\le j+k\le m} \overset{\circ}{a}_{jk}(t,x,y;\eta)\tau^j\xi^k$$

$$k_l(\xi;\eta) = \sum_{j=0}^{l} \overset{\circ}{b}_j(t,x,y;\eta)\xi^j$$

où $\overset{\circ}{a}_{jk}(t,x,y;\eta)$ et $\overset{\circ}{b}_j(t,x,y;\eta)$ sont homogènes respectivement de dégrés $m-(j+k)$ et $l-j$ en $\eta$. On considère les polynômes caractéristiques de $h$ et $k$ définis par

$$H_m = det(h_m(\tau;\xi,\eta)$$
$$K_l = det(k_l(\xi,\eta)$$

On supposera qu'on peut décomposer $H_m$ et $K_l$ sous la forme

$$H_m = \prod_{j=1}^{n"}(\tau - \tau_j(t,x,y;\xi,\eta))^{\rho_j} K_l = \prod_{j=1}^{n'}(\xi - \xi_j(t,x,y;\eta))^{\nu_j}$$

et on imposera les hypothèses suivantes

**(A-1)** $\forall j \in \{1,\dots n"\}, 1 \le \rho_j \le 2$ et pour tout $T$, $X > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que: $\forall i \ne j$, $\forall (t,x,y) \in [0,T] \times [-X,X] \times \mathbb{R}^n$, $\forall (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$,

$$\mid \tau_i(t,x,y;\xi,\eta) - \tau_j(t,x,y;\xi,\eta) \mid \ge \delta \mid (\xi,\eta) \mid$$

**(A-1)'** $\forall j \in \{1,\dots n'\}, 1 \le \nu_j \le 2$ et pour tout $T$, $X > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que: $\forall i \ne j$, $\forall (t,x,y) \in [0,T] \times [-X,X] \times \mathbb{R}^n$, $\forall \eta \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$,

$$\mid \xi_i(t,x,y,\eta) - \xi_j(t,x,y,\eta) \mid \ge \delta \mid \eta \mid$$

**(A-2)** (voir [16], [1]) On suppose que la matrice réduite de $h_m$ dans le localisé de l'anneau des polynômes $\mathbb{R}[\tau]$ par l'idéal premier des polynômes divisibles par $\tau - \tau_j$ est :

$$\mathbf{h_m} \sim \begin{pmatrix} (\tau-\tau_j)^2 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \dots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots\dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \forall\ j = 1,...,m_1.$$

**(A-2)'** (voir [16], [1]) On suppose que la matrice réduite de $k_l$ dans le localisé de l'anneau des polynômes $\mathbb{R}[\xi]$ par l'idéal premier des polynômes divisibles par $\xi - \xi_j$ est:

$$\mathbf{k_l} \sim \begin{pmatrix} (\xi-\xi_j)^2 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \dots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots\dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \forall\ j = 1,...,l_1.$$

**(A-3)**

L'opérateur $r$ est d'ordre $l+m-2$ et

en désignant par $R$ la matrice principale de $r$ et par $R^\star$ sa matrice sous-principale, il existe une matrice $A$ de dimension $N \times N$ homogène de degré $m-2$ telle que:

$$\begin{cases} R = AK \\ ([R^\star - AK^\star + \sum_{|\alpha|=1} A^{(\alpha)} K_{(\alpha)}] \times cof(K)) \mid_{\xi=\xi_j} = 0 \quad \forall\ 1 \le j \le l_1 \end{cases}$$

Ce qui est équivalent à :

$$rq = B(m-2)\Gamma_{l_2}\Gamma_{l_1} + B(m-2+l_2-1)\Gamma_{l_1} + B(m-2+l-2)I_N$$

où $B(j)$ est un opérateur différentiel suivant $t$ et $x$ , pseudo-différentiel suivant $y$ et d'ordre total au plus $j$ . De plus l'ordre de $B(j)$ par rapport à $D_t$ est au plus $m-2$.

On a désigné aussi par $H = h_m$ la matrice principale de $h$, $H^\star$ sa matrice sous- principale, par $K = k_l$ la matrice principale de $k$ et $K^\star$ sa matrice sous-principale.

**Remarque 1.1** *Les hypothèses* **(A-1)** *et* **(A-1)'** *expriment le fait que $h$ et $k$ sont des opérateurs à caractéristiques de multiplicité constante au plus égale à 2. On peut écrire alors:*

$$H_m = \prod_{j=1}^{m_1}(\tau - \tau_j(t,x,y;\xi,\eta))^2 \prod_{j=m_1+1}^{m_2}(\tau - \tau_j(t,x,y;\xi,\eta)) = (H_{m_1})^2 H'_{m_2-m_1}$$
$$K_l = \prod_{j=1}^{l_1}(\xi - \xi_j(t,x,y;\eta))^2 \prod_{j=l_1+1}^{l_2}(\xi - \xi_j(t,x,y;\eta)) = (K_{l_1})^2 K'_{l_2-l_1}$$

*Avec* $2l_1 + (l_2 - l_1) = l_2 + l_1 = Nl$ *et* $2m_1 + (m_2 - m_1) = m_2 + m_1 = Nm.$

**Remarque 1.2** *L'hypothèse* **(A-2)** *(resp.***(A-2)'***) est équivalente à l'existence d'un mineur de $h_m$ (resp. $k_l$), non divisible par $(\tau - \tau_j)$(resp. $(\xi - \xi_j)$) pour tout $j = 1,\ldots,m_1$ (resp. $j = 1,\ldots,l_1$).*

**<u>Enoncé du Problème</u>**

On considère le problème de Goursat suivant :

$$(1.2) \qquad \begin{cases} \mathcal{H}u(t,x,y) = (hk - r)u(t,x,y) = f(t,x,y), \\ D_t^i u \mid_{t=0} = \phi_i(x,y), \ \ 0 \le i \le m-1 \\ D_x^j u \mid_{x=0} = \psi_j(t,y), \ \ 0 \le j \le l-1 \end{cases}$$

avec les conditions de compatibilité suivantes :

$$(C) \qquad D_x^j \phi_i(0,y) = D_t^i \psi_j(0,y), \qquad \forall\ 0 \le i \le m-1\ ,\ 0 \le j \le l-1$$

**Définition**
On dit que $\mathcal{H}$ vérifient les conditions de Levi $\mathcal{L}$, si (L-1) Le polynôme sous caractéristique de $h$ est divisible par $H_{m_1}$ (L-2) Le polynôme sous caractéristique de $k$ est divisible par $K_{l_1}$

On obtient le résultat suivant:

**Théorème**

*Si l'opérateur $\mathcal{H}$ vérifie les conditions* **(A.1)(A.1)'(A.2)(A.2)'**, **(A-3)** *et celles de Levi $\mathcal{L}$, alors pour tout $f \in \mathcal{E}_t(\tilde{H}^\infty_{x,y})$, $\phi_i \in \tilde{H}^\infty_{x,y}$ , $0 \le i \le m-1$ et $\psi_j \in \mathcal{E}_t(H^\infty_y)$, $0 \le j \le l-1$, vérifiant les conditions de compatibilité (C), il existe une unique solution $u$ dans $\mathcal{E}_t(\tilde{H}^\infty_{x,y})$ du problème (1.2).*

# 2 Preuve du Résultat

Nous allons prouver ce Théorème par induction en se ramenant à des problèmes de Cauchy pour $h$ et $k$ relativement à des données respectives sur les hyperplans $t = 0$ et $x = 0$.

## 2.1 Préliminaires

**Lemme 2.1** *(L-1) est équivalent à:*
*Il existe $p$( resp. $p'$ ) différentiel en $t$ et pseudo-différentiel en $(x,y)$ de symbole principal $P = cof(h_m)$ d'ordre $m_1 + m_2$, $\Delta_{m_1}$ (resp. $\Delta'_{m_1}$) de symbole principal $H_{m_1}$ et $\Delta_{m_2}$ (resp. $\Delta'_{m_2}$) de symbole principal $H'_{m_2-m_1}$ différentiels en $t$ et pseudo-différentiels en $(x,y)$ tels que :*

$$ph = \Delta_{m_2}\Delta_{m_1}I_{N\times N} + C(m_2 - 1)\Delta_{m_1} + C(m_2 + m_1 - 2).$$

*( respectivement*

$$hp' = \Delta'(m_2)\Delta'(m_1)I_{N\times N} + C'(m_2 - 1)\Delta'(m_1) + C'(m_2 + m_1 - 2)).$$

*Où $C(m_2 - 1)$ (resp. $C'(m_2 - 1)$) et $C(m_2 + m_1 - 2)$ ( respectivement $C'(m_2 + m_1 - 2)$) sont d'ordre respectifs $m_2 - 1$ et $m_2 + m_1 - 2$.*

**Lemme 2.2** *(L-2) équivaut à :*
*Il existe $q$ (resp. $q'$) différentiel en $x$ et pseudo-différentiel en $y$ de symbole principal $Q = cof(k_l)$ d'ordre $l_1 + l_2$, $\Gamma_{l_1}$ (resp. $\Gamma'_{l_1}$) de symbole principal $K_{l_1}$ et $\Gamma_{l_2}$ ( resp. $\Gamma'_{l_2}$) de symbole principal $K'_{l_2-l_1}$ différentiels en $x$ et pseudo-différentiels en $y$ tels que :*

$$qk = \Gamma_{l_2}\Gamma_{l_1}I_N + C(l_2 - 1)\Gamma_{l_1} + C(l_2 + l_1 - 2).$$

*(resp.*

$$kq' = \Gamma'_{l_2}\Gamma'_{l_1}I_N + C'(l_2 - 1)\Gamma'_{l_1} + C'(l_2 + l_1 - 2)).$$

*Où les $C_j$ (resp. $C'_j$ sont des opérateurs d'ordre inférieurs ou égal à $j$.*

**Preuve**
Posons

$$D_x - \xi_j(t,x,y; D_y) = \partial_j$$

On a :

$$\begin{cases} \partial_1\partial_2 \dots \partial_{l_2} I_N = \Gamma_{l_2} \\ \partial_1\partial_2 \dots \partial_{l_1} I_N = \Gamma_{l_1} \end{cases}$$

où $1 \leq l_1 \leq l_2$, et

$$\begin{cases} \xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{l_1} \text{ sont des racines doubles} \\ \xi_{l_1+1},\dots,\xi_{l_2} \text{ sont des racines simples} \end{cases}$$

L'hypothèse **(A-2)'** est équivalente à l'hypothèse **(A-2)"** suivante :

**(A-2)"** Il existe un opérateur $q$ de symbole principal
$Q = {}^{cof}(k_l) = cof(k)$ tel que :

$$kq = \Gamma_{l_2}\Gamma_{l_1} I_{N\times N} + A(l_2-1)\Gamma_{l_1} + A(l_1+l_2-2)$$

où $A(i) \equiv A(i;t,x,y,D_x,D_y)$ est un opérateur pseudo-différentiel suivant $y$ et *un* opérateur différentiel suivant $x$, d'ordre total $i$ et $I_N$ est la matrice identité .

## 2.2 Domaine de Dépendance pour le Problème de Goursat et Estimations d'Energie

Soit

(2.1) $$\tau_{max} = max_{\{t\ \in[0,T],|x|\leq X,y\ \in\mathbb{R}^n,|\xi|=1,i=1,\dots,m_2\}} \mid \tau_i(t,x,y;\xi,0) \mid$$

(2.2) $$\mathcal{D}(t_0,x_0) = \{(t,x,y);\mid x-x_0 \mid < \tau_{max}(t_0-t)\}$$

$$\Omega(t_0,X_0) = \bigcup_{|x_0|<X_0} \mathcal{D}(t_0,x_0),\ X_0>0,t_0\in[0,T]$$

On fixe un point $(t_0,X_0)$. Posons :

$$\Omega(t_0,X_0) \equiv \Omega.$$

Et on note $\Omega(s)$ l'intersection de $\Omega$ et de l'hyperplan $t=s$. Soit

$$\Omega(s) = \Omega \cap \{(s,x,y)\}$$

**Proposition 2.1** *On considère le problème suivant:*

(2.3) $$\begin{cases} hv = f\ \in\ \mathcal{E}_t(\tilde{H}^{\infty}_{x,y}) \\ D_t^i v\mid_{t=0} = \phi_i(x,y) \in \tilde{H}^{\infty}_{x,y}, 0\leq i\leq m-1 \end{cases}$$

*Sous les suppositions* $(A-1)$ *et* $(A-2)$*, la solution du problème de Cauchy 2.3 admet l'éstimation suivante :*

(2.4) $$\sum_{i=0}^{m-2+p} \parallel D_t^i v \parallel_{k+m-2+p-i,\Omega(t)}$$

$$\leq C_1(k,p)\Big\{\sum_{i=0}^{m-1} \parallel \phi_i \parallel_{k+m-1+p-i,\Omega(0)} + \int_0^t \sum_{i=0}^{p} \parallel D_s^i f(s) \parallel_{k+p-i,\Omega(s)} ds\Big\}$$

*$\forall p$, $\forall k$ , où*

$$\| f \|^2{}_{k,\Omega(t)} = \sum_{j+|\alpha|\leq k} \int_{\Omega(t)} | D_x^j D_y^\alpha f |^2 dxdy.$$

*et $C_1(k,p)$ est une constante dépendante de $k$,$p$ et $\Omega(t)$ mais indépendante de $f$ et de $(\phi_i)$ .*

**Preuve de la Proposition 2.1**

Pour la preuve, nous allons utiliser les lemmes suivants, grâce auxquels, on localise les inégalités sur $\Omega(t)$,$\Omega(0)$ *et* $\Omega(s)$ respectivement, car $h$ n'est différentiel que relativement à $t$ et à $x$ et pas par rapport à $y$.

**Lemme 2.3** *On considère le problème (2.3).*
*On suppose $(A-1)$, $(A-2)$ et en plus $f \in \mathcal{E}_t(\tilde{H}^\infty_{x,y})$,$\phi_i(x,y) \in \tilde{H}^\infty_{x,y}$, alors la solution du problème 2.3 a une estimation suivante:*

$$(2.5) \quad \sum_{i=0}^{m-2+p} \| D_t^i v \|_{k+m-2+p-i}$$

$$\leq C_1(k,p)\Big\{ \sum_{i=0}^{m-1} \| \phi_i \|_{k+m-1+p-i} + \int_0^t \sum_{i=0}^{p} \| D_s^i f(s) \|_{k+p-i} ds \Big\}.$$

*où*

$$\| u \|_k = \| u \|_{H^k(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y^n)}.$$

*De plus, dans le problème de Cauchy 2.3, le domaine de dépendance du point $(t_0,x_0,y)$ est $\mathcal{D}(t_0,x_0)$. A savoir que si*

*$f \equiv 0$ dans $\mathcal{D}(t_0,x_0)$ et $\phi \equiv 0$ dans $\mathcal{D}(t_0,x_0) \cap \{t=0\}$, alors $v \equiv 0$ dans $\mathcal{D}(t_0,x_0)$.*

**Preuve du lemme 2.3**

Pour l'inégalité (2.5), on utilise les résultats de D.Gourdin ([6] et [7]). Pour montrer que $\mathcal{D}(t_0,x_0)$ est un domaine de dépendance, on commence par établir un lemme d'unicité et son corollaire.

**Lemme d'unicité**

Si $u(t,x,y)$ vérifie $hu = 0$ et $u(0,x,y) = 0$ dans un voisinage de l'origine (0,0) du type $W_x(0) \times \mathbb{R}_y^n$, alors $u(t,x,y) = 0$ dans un voisinage de l'origine (0,0,0) de la forme $V_{t,x}(0,0) \times \mathbb{R}_y^n$.

**Preuve**

Soit
$$\mathcal{D}_\epsilon = \{(t,x,y) \in \Omega ; t + x^2 < \epsilon, t \geq 0\}$$
où $\epsilon$ est suffisament petit pour que $\mathcal{D}_\epsilon|_{t=0} \subset W_x(0) \times \mathbb{R}^n_y$.

Par une transformation de Holmgren,

$$\begin{cases} t' = t + x^2 \\ x' = x \\ y' = y \end{cases}$$

l'opérateur $h$ se transforme en un opérateur $\tilde{h}$ et $u$ en $\tilde{u}$ avec $u(t,x,y) = \tilde{u}(t',x',y')$.

On voit que $\mathcal{D}_\epsilon$ est transformé en $\tilde{\mathcal{D}}_\epsilon$ qui a pour frontière $t' = x'^2$ *et* $t' = \epsilon$; $\tilde{u}$ est défini sur $\tilde{\mathcal{D}}_\epsilon$.

On pose $\tilde{u} = 0$ dans l'extérieur de $\tilde{\mathcal{D}}_\epsilon$, dans la bande $[0,\epsilon] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. On note $\tilde{u}(t',x',y')$ cette nouvelle fonction définie dans $[0,\epsilon] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et qui a un support dans $\tilde{\mathcal{D}}_\epsilon$.

L'opérateur $\tilde{h}$ a les même propriétés que celles de $h$; on l'étend à $\Omega' = [0,\epsilon] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ([6]).On a $\tilde{h}\tilde{u} = 0$ et $\tilde{u}(0,x,y) = 0$
D'après l'inégalité d'energie (2.5) sur l'opérateur étendu $\tilde{h}$ à $\Omega'$, on a: $\tilde{u}(t,x,y) = 0$ dans $\Omega'$. D'où $u(t,x,y) = 0$ dans $\mathcal{D}_\epsilon$. cqfd.

**Corollaire**

Soit $S$ une hypersurface définie par $\phi(t,x) = 0$ passant par $(t_0,x_0,y_0)$ et satisfaisant $(\frac{\partial \phi}{\partial t})^2 > (\tau_{max})^2 (\frac{\partial \phi}{\partial x})^2$

Si $u$ est une fonction définie dans un voisinage de $(t_0,x_0) \times \mathbb{R}^n$, vérifiant $hu = 0$ et nulle dans l'itersection du voisinage précédent avec $S$, alors $u = 0$ dans un voisinage de $(t_0,x_0) \times \mathbb{R}^n$.

**Preuve**

On fait la transformation:

$$\begin{cases} t' = \phi(t,x) \\ x' = x \\ y' = y \end{cases}$$

$h$ se transforme en un opérateur vérifiant les hypothèses d'unicité locale. D'où le résultat.

A l'aide de ce corollaire, on démontre que $\mathcal{D}(t_0,x_0)$ est un domaine de dépendance (cf [6]: Th.2, Déf.4, 4',5, Prop.8,9,10), car $\mathcal{D}(t_0,x_0)$ est une réunion d'hypersurfaces spatiales d'équations $t = t_0 - \frac{1}{\tau_{max}}\sqrt{\lambda + (x-x_0)^2}, \lambda \in ]0,(\tau_{max}t_0)^2[$.

Ainsi, **la Proposition 2.1 sera déduite de la façon suivante**:
Soient

$$\begin{cases} f' = f \ dans \ \mathcal{D}(t_0,x_0) \\ \phi'_j = \phi_j \ dans \ \Omega(0) \end{cases}$$

et posons

$$\begin{cases} f' = 0 \ dans \ C_{\mathcal{D}}(t_0,x_0) \\ \phi'_j = 0 \ dans \ C_{\Omega}(0) \end{cases}$$

Considérons les deux problèmes de Cauchy suivants:

$$(C_1) \begin{cases} hv = f \\ D_t^j v = \phi_j \end{cases}$$

$$(C_2) \begin{cases} hv' = f' \\ D_t^j v' = \phi'_j \end{cases}$$

En soustrayant les deux systèmes, on obtient:

$$(C_2) - (C_1) \begin{cases} h(v-v') = f - f' \\ D_t^j (v-v') = \phi_j - \phi'_j \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{cases} h(v-v') = 0 \ dans \ \mathcal{D}(t_0,x_0) \\ D_t^j (v-v') = 0 \ dans \ \Omega(0) \end{cases}$$

Ce qui implique que $v - v' = 0$ dans $\mathcal{D}(t_0,x_0)$
En appliquant l'inégalité d'énergie du lemme 2.3 ci-dessus à $v'$, on a:

$$\sum_{i=0}^{m-2+p} \parallel D_t^i v' \parallel_{k+m-2+p-i,\Omega(t)}$$

$$\leq C_1(k,p)\Big\{ \sum_{i=0}^{m-1} \parallel \phi'_i \parallel_{k+m-1+p-i,\Omega(0)} + \int_0^t \sum_{i=0}^{p} \parallel D_s^i f'(s) \parallel_{k+p-i,\Omega(s)} ds \Big\}$$

D'où:

$$\sum_{i=0}^{m-2+p} \| D_t^i v' \|_{k+m-2+p-i,\Omega(t)}$$

$$\leq C_1(k,p)\Big\{ \sum_{i=0}^{m-1} \| \phi_i \|_{k+m-1+p-i,\Omega(0)} + \int_0^t \sum_{i=0}^{p} \| D_s^i f(s) \|_{k+p-i,\Omega(s)} ds \Big\}.$$

Ensuite, on pose $u = qu'$ .Ainsi,on a :

$$\begin{cases} kqu' = v \\ hv = rqu' + f \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k'u' = v \\ hv = r'u' + f \end{cases}$$

On a alors :

**Proposition 2.2** *On considère le problème suivant:*

$$(2.5) \qquad \begin{cases} kqu' = v \ \in \ \mathcal{E}_t(\tilde{H}^\infty_{x,y}) \\ D_x^j u' \mid_{x=0} = \psi'_j(t,y) \ \in \ \mathcal{E}_t(\tilde{H}^\infty_y), \ 0 \leq j \leq l_2 + l_1 - 1 = Nl - 1 \end{cases}$$

*Sous les hypothèses $(A-2)$ et $(A-2)'$, la solution du problème de Cauchy (2.5) a l'estimation suivante:*

$$(2.6) \qquad \sum_{h=0}^{p'} \| D_t^h \{\Gamma(l_{2-i})\Gamma_{l_1} u'\} \|_{q'(i)+k+p'-h,\Omega(t)}$$

$$\leq C_2(k,p')\{\sum_{h=0}^{p'} \sum_{j=0}^{Nl-1} \| D_t^h \psi'_j(t,y) \|_{y,k+p'+l-1-j-h} + \sum_{h=0}^{p'} \| D_t^h v \|_{k+p'-h,\Omega(t)}\}$$

$0 \leq i \leq l-1$ *où* $q'(i) = Nl - (l_1 + l_{2-i}) - i$ ,

$$avec \ \ \| \psi \|^2{}_{y,k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int | D_y^\alpha \psi |^2 dy,$$

*$C_2(k,p')$ est une constante dépendante de $k,p'$ et $\Omega(t)$ mais indépendante de $v$ et de $\{\psi_j\}$.*

*En particuliers si $i = 2$ ,l'inégalité (2.6) devient :*

$$(2.7) \qquad \sum_{h=0}^{p'} \| D_t^h u' \|_{Nl-2+k+p'-h,\Omega(t)}$$

$$\leq C_2(k,p')\{\sum_{h=0}^{p'} \sum_{j=0}^{Nl-1} \| D_t^h \psi'_j(t,y) \|_{y,k+p'-h} + \sum_{h=0}^{p'} \| D_t^h v \|_{k+p'-h,\Omega(t)}\}$$

**Preuve de la Proposition 2.2**

On considère le problème (2.5)

$$(2.6) \begin{cases} k' = kqu' = v \ \in \ \mathcal{E}_t(\tilde{H}^{\infty}_{x,y}) \\ D_x^j u' \mid_{x=0} = \psi'_j(t,y) \ \in \ \mathcal{E}_t(\tilde{H}^{\infty}_y), \ 0 \leq j \leq l_2 + l_1 - 1 = Nl - 1 \end{cases}$$

On pose $u = qu'$.

$k'$ étant hyperbolique dans la direction de $x$. On considère $t$ comme paramètre. Par la théorie des équations hyperboliques, nous avons le lemme suivant:

**Lemme 2.4** *Le problème de Cauchy (2.6) admet une solution unique $u \in \mathcal{E}_x(H^{\infty}_y)$ et nous avons l'estimation suivante:*

$$(2.8) \qquad \sum_{j=0}^{q'(i)+p} \| D_x^j \{\Gamma(l_{2-i})\Gamma_{l_1} u'\} \|_{y,k+q'(i)+p-j}$$

$$\leq C(k,p)\Big\{\| \psi(t,y) \|_{y,k+p+l-1} + \int_{|x'|\leq|x|} \sum_{j=0}^{p} \| D_{x'}^j v(x') \|_{y,k+p-j} dx'\Big\}$$

On fixe $t$ et soit $X(t) = max_{(t,x,y) \ \in\Omega(t)} \mid x \mid$.
De (2.8), posons $k = 0$, nous avons :

$$(2.9) \qquad \int_{|x|\leq X(t)} \sum_{j=0}^{q'(i)+p} \| D_x^j \{\Gamma(l_{2-i})\Gamma_{l_1} u'\} \|^2{}_{y,q'(i)+p-j} dx$$

$$\leq C'(k,p)\Big\{ \int_{|x|\leq X(t)} \sum_{j=0}^{Nl-1} \| \psi'_j(t,y) \|^2{}_{y,p+Nl-1-j} dx +$$

$$+\int_{|x|\le X(t)}\sum_{j=0}^{p}\Big(\int_{|x'|\le|x|}\| D^j_{x'}v(x')\|_{y,p-j}dx'\Big)^2dx\Big\}$$

Et on a:

$$\text{(2.10)}\qquad \int_{|x|\le X(t)}\sum_{j=0}^{q'(i)+p}\| D^j_x\{\Gamma(l_{2-i})\Gamma_{l_1}u\}\|^2{}_{y,q'(i)+p-j}dx$$

$$=\|\Gamma(l_{2-i})\Gamma_{l_1}u\|^2{}_{q'(i)+p,\Omega(t)}$$

Et en plus, on a :

$$\int_{|x|\le X(t)}\sum_{j=0}^{p}\Big(\int_{|x'|\le|x|}\| D^j_{x'}v(x')\|_{y,p-j}dx'\Big)^2dx$$

$$\le \int_{|x|\le X(t)}\sum_{j=0}^{p}\{\int_{|x'|\le|x|}1^2dx'\int_{|x'|\le|x|}\| D^j_{x'}v(x')\|^2{}_{y,p-j}dx'\}dx$$

$$\le \int_{|x|\le X(t)}\sum_{j=0}^{p}\{2X(t)\int_{|x'|\le|x|}\| D^j_{x'}v(x')\|^2{}_{y,p-j}dx'\}dx$$

$$\le (2X(t))^2\| v\|^2{}_{p,\Omega(t)}$$

Ainsi,on a :

$$\text{(2.11)}\qquad \|\Gamma(l_{2-i})\Gamma_{l_1}u\|^2{}_{q'(i)+p,\Omega(t)}$$

$$\le C'(0,p)\Big\{\{2X(t)\|\psi(t,y)\|^2{}_{y,p+l-1}+(2X(t))^2\| v\|^2{}_{p,\Omega(t)}\Big\}$$

Si $p'=0$ dans (2.3), et (2.3) est équivalent à (2.11).

Ensuite on considère les estimées de la dérivée dans la direction de $t$. On différentie (2.6) par rapport à $t$. Et de la même manière,on obtient l'estimation de la dérivée dans la direction de $t$.

Ainsi on a une proposition analogue à la proposition (2.2) dont la preuve s'apparente à celle de la proposition 2.2.

**Proposition 2.3** *Quel que soit $k$, le problème*

$$\text{(2.12)}\qquad \begin{cases} ku=v\ \in\ \mathcal{E}_t(\tilde H^\infty_{x,y})\\ D^j_xu\mid_{x=0}=\psi_j(t,y)\ \in\ \mathcal{E}_t(\tilde H^\infty_y),\ 0\le j\le l-1\end{cases}$$

*admet l'éstimation suivante:*

$$(2.13) \qquad \sum_{h=0}^{m-2} \| D_t^h u \|_{m-2-h,\Omega(t)} \leq C \sum_{h=0}^{m-2} \| D_t^h u' \|_{Nl-2+m-2-h,\Omega(t)}$$

$$\leq C\Big\{ \sum_{h=0}^{m-2} \sum_{j=0}^{m-1} \| D_t^h \psi_j(t,y) \|_{y,m-2-h} + \sum_{h=0}^{m-2} \| D_t^h v \|_{m-2-h,\Omega(t)} \Big\}$$

**Preuve de la Proposition 2.3**

On établit la première inégalité par recurrence sur $h$ et la deuxième est exactement la Proposition 2.2 en prenant $i = \nu$ et $p' = m - 2$

## 2.3 Construction de la solution

Soit

$$(2.14) \qquad ku = v$$

Alors $\varpi u = (hk - r)u = f$ est équivalent à (2.15)

$$(2.15) \qquad \begin{cases} ku = v \\ hv = ru + f \end{cases}$$

On re-écrit

$$(2.16) \qquad D_t^i(ku) \mid_{t=0} = \sum_{k=0}^{i} C_{ik}(x,y; D_x, D_y)\phi_k(x,y) \equiv \tilde{\phi}_i'(x,y)$$

,où $C_{ik}$ est un opérateur différentiel suivant $x$ et pseudo-différentiel suivant $y$ et d'ordre total au plus $l$.

Soit $v_1$ la solution de:

$$\begin{cases} hv_1 = f \\ D_x^j v_1 \mid_{x=0} = \tilde{\phi}_j'(x,y) \ , \ 0 \leq j \leq m-1 \end{cases}$$

Et $u_1$ la solution de:

$$\begin{cases} ku_1 = v_1 \\ D_x^j u \mid_{x=0} = \psi_j(t,y) \ , \ 0 \leq j \leq m-1 \end{cases}$$

En général, pour $\rho \geq 2$, $v_\rho$ est la solution de:

$$\begin{cases} hv_\rho = ru_{\rho-1} \\ D_t^i v_\rho \mid_{t=0} = 0 \ , \ 0 \leq i \leq m-1 \end{cases}$$

Et $u_\rho$ est solution de :

$$\begin{cases} ku_\rho = v_\rho \\ D_x^j u_\rho \mid_{x=0} = 0{,}0 \leq j \leq l-1 \end{cases}$$

Nous voulons montrer que la série $u_1 + u_2 + \ldots$ converge. Prenons $k$ et $p$ dans (2.7) et on les fixe . Par la preuve de la Proposition 2.1, nous avons :

$$\sum_{i=0}^{m-2+p} \| D_t^i v_1 \|_{k+m-p-2-i,\Omega(t)} \tag{2.17}$$

$$\leq C_1 \Big\{ \sum_{i=0}^{m-1} \| \tilde{\phi} \|_{k+p-1,\Omega(0)} + \int_0^t \sum_{i=0}^{p} \| D_s^i f(s) \|_{k+p-i,\Omega(s)} ds \Big\}$$

Et par la proposition (2.2),nous avons l'éstimation de $u_1'$ ($u_1 = qu_1'$). Dans 2.4, soit $k$ comme dans 2.5 et $p' = m-2+p$. Ainsi, on a:

$$\begin{cases} k'u' = v \\ hv = r'u' + f \end{cases}$$

d'ordre total $(m+l-2)N$, avec

$$\begin{cases} u = qu' \\ k' = kq \ d'ordre \ lN \end{cases}$$

on a :

(2.18)

$$\sum_{h=0}^{p'=m-2+p} \| D_t^h \{\Gamma(l_{2-i})\Gamma_{l_1} u_1'\} \|_{q'(i)+k+m-2+p-1-i,\Omega(t)}$$

$$\leq C_2 \Big\{ \sum_{h=0}^{m-2+p} \sum_{j=1}^{lN-1} \| D_t^h \psi_j'(t,y) \|_{y,k+m-2+p+lN-j-h} +$$

$$+ \sum_{h=0}^{m-2+p} \| D_t^h v_1 \|_{k+m-2+p-h,\Omega(t)} \Big\}$$

Soit

$$\begin{cases} k'u'_1 = v_1 \ (k' = kq \ , \ u_1 = qu'_1) \\ D_x^j u'_1 = \psi'_j(t,y), \ 0 \leq j \leq Nl-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} hv_\rho = r'u'_{\rho-1} \ (r' = rq \ , \ u_\rho = qu'_\rho) \\ D_t^i v_\rho \mid_{t=0} = 0 \ (0 \leq j \leq Nl-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k'u'_\rho = v_\rho \ (k' = kq \ , \ u_\rho = qu'_\rho) \\ D_x^j u'_\rho = \psi'_j(t,y), \ 0 \leq j \leq Nl-1 \end{cases}$$

Soient

(2.19) $$\sum_{i=0}^{m-1} \| \tilde{\phi}_i \|_{k+m-1+p-i,\Omega(0)} = M_1$$

(2.20) $$sup_{0\leq s\leq T}\{\sum_{i=0}^{p} \| D_s^i f(s) \|_{k+p-i,\Omega(s)}\} = K$$

(2.21) $$\sum_{h=0}^{m-2+p} \sum_{j=0}^{Nl-1} \| D_t^h \psi'_j(t,y) \|_{y,k+m-2+p+Nl-1-j-h} = M_2$$

De 2.18 à 2.21,on a :

(2.22)

$$\sum_{h=0}^{m-2+p} \| D_t^h\{\Gamma(l_2)\Gamma_{l_1}u'_1\} \|_{q'(i)+k+m-2+p-i-h,\Omega(t)}$$

$$\leq C_2M_2 + C_2C_1M_1 + C_1C_2\int_0^t Kds = C_2M_2 + C_2C_1M_1 + C_1C_2Kt$$

Par l'hypothèse $(A-3)$ et (2.22) , on a :

(2.23)

$$\sum_{h=0}^{p} \| D_t^h(r'u'_1) \|_{k+p-h,\Omega(t)} \leq C'_3 \sum_{i=0}^{2} \sum_{h=0}^{m-2+p} \| D_t^h\{\Gamma(l_{2-i})\Gamma_{l_1}u'_1\} \|_{q'(i)+k+p-1-h,\Omega(t)}$$

En posant $C_3 = 3C'_3$, par 2.22 et 2.23, on a:

(2.24) $$\sum_{h=0}^{p} \| D_t^h(r'u'_1) \|_{k+p-h,\Omega(t)} \leq C_2C_3M_2 + C_1C_2C_3M_1 + C_1C_2C_3Kt.$$

Et en général, par induction, on a:
La solution $u'_\rho$ du problème

$$\text{(2.25)} \qquad \begin{cases} k'u'_\rho = v_\rho \ (k' = kq \ , \ u_\rho = qu'_\rho) \\ D_x^j u'_\rho = \psi'_j(t,y),\ 0 \leq j \leq Nl-1 \end{cases}$$

a l'éstimation suivante:

$$\text{(2.26)} \qquad \sum_{h=0}^{m-2+p} \parallel D_t^h \{\Gamma(l_{2-i})\Gamma_{l_1} u'_\rho\} \parallel_{q'(i)+k+m-2+p,\Omega(t)}$$

$$\leq (C_1C_2C_3)^{\rho-1}\{(C_2M_2 + C_1C_2M_1)\frac{t^{\rho-1}}{(\rho-1)!} + C_1C_2K\frac{t^\rho}{(\rho)!}\}$$

En particuliers si $i = 2$, (2.26) devient:

$$\text{(2.27)} \qquad \sum_{h=0}^{m-2+p} \parallel D_t^h u'_\rho \parallel_{Nl-2+m-2+p-h,\Omega(t)}$$

$$\leq (C_1C_2C_3)^{\rho-1}\{M\frac{t^{\rho-1}}{(\rho-1)!} + N\frac{t^\rho}{(\rho)!}\}$$

où $M = C_2M_2 + C_1C_2M_1$ ,$\tilde{K} = C_1C_2K$.
Par conséquent

$$\sum_{\rho=1}^{\infty} D_t^h u'_\rho$$

$(0 \leq h \leq m-2+p)$ est convergente dans $H^{Nl-2+m-2+k+p-h}(\Omega(t))$.
En posant

$$u' = \sum_{\rho=1}^{\infty} u'_\rho$$

Alors $D_t^h u'_\rho \in \ H^{Nl-2+m-2+k+p-h}(\Omega(t))$,$0 \leq h \leq m-2+p$, où $k$ *et* $p$ sont arbitraires,alors par le Lemme de Sobolev, $u' \in \ C^\infty(\Omega(t))$. Il est évident que $u = ru'$ est solution du problème de Goursat 1.2.

## 2.4 Unicité de la solution

Soient $u^1$ et $u^2$ deux solutions du problème (1.2).
Posons $w = u^1 - u^2$. Ainsi $w$ satisfait

$$
\begin{cases} \varpi w = (hk - r)w = 0 \\ D_t^i w \mid_{t=0} = 0 \ 0 \le i \le m-1 \\ D_x^j w \mid_{x=0} = 0 \ 0 \le j \le l-1 \end{cases} \tag{2.28}
$$

si et seulement si:

$$
\begin{cases} kw = v \\ hv = rw \\ D_t^i w \mid_{t=0} = 0 \quad 0 \le i \le m-1 \\ D_x^j w \mid_{x=0} = 0 \quad 0 \le j \le l-1 \end{cases}
$$

Montrons que le problème 2.28 a pour seule solution $w = 0$.
Par la Proposition 2.1, nous avons

$$
\sum_{h=0}^{m-2} \| D_t^h kw \|_{m-2-h,\Omega(t)} \le C_1 \int_0^t \| rw \|_{\Omega(s)} ds \tag{2.29}
$$

Dans la Proposition 2.3, posons $p' = m-2$ et $k = 0$,nous avons

$$
\sum_{h=0}^{m-2} \| D_t^h w \|_{m-2-h,\Omega(t)} \le C_2 \sum_{h=0}^{m-2} \| D_t^h kw \|_{m-2-h,\Omega(t)} \tag{2.30}
$$

Par l'hypothèse $(A-5)$, on a :

$$
\| rw \|_{\Omega(s)} \le C_3 \sum_{h=0}^{m-2} \| D_t^h w \|_{m-2-h,\Omega(s)} \tag{2.31}
$$

Soit

$$
M_3(t) \equiv \sum_{h=0}^{m-2} \| D_t^h \ w \|_{m-2-h,\Omega(t)} \tag{2.32}
$$

Ainsi par de 2.30 à 2.32, nous avons

$$
M_3(t) \le 3C_2C_1 \int_0^t \| rw \|_{\Omega(s)} ds \le 3C_1C_2C_3 \int_0^t M_3(s) ds \tag{2.33}
$$

Posons $N_3 = sup_{0 \le t \le T} M_3(t)$ et $3C_1C_2C_3 = C$, nous avons

$$
M_3(t) \le C \int_0^t M_3(s) ds \le CN_3 t \tag{2.34}
$$

Ainsi $M_3(t) \leq CN_3(t)$. Par ref2.32, nous avons

$$M_3(t) \leq C \int_0^t CN_3 sds \leq C^2 N_3 \frac{t^2}{2!} \tag{2.35}$$

En général pour tout $j$ arbitraire;$j \geq 1$, nous avons

$$M_3(t) \leq C^j N_3 \frac{t^j}{j!} \tag{2.36}$$

$$Ainsi\ M_3(t) \equiv 0 \Longrightarrow w \equiv 0$$

Ceci complète la preuve du Théorème.

## Références


[1] Bourbaki, Modules plats.Localisations. Hermann, Paris 1961.

[2] Y. CHOQUET-BRUHAT,Ondes Asymptotiques et Approchées pour des systèmes d'équatins aux dérivées partielles non linéaires, J. Math. pures et appl. 48, 1969, 117-158

[3] D. GOURDIN , Systèmes faiblement hyperboliques à caractéristiques multiples. Comptes rendus Acad. Sci. Paris 278, série A,1974, 269-274.

[4] D. GOURDIN , Le problème de Cauchy pour les systèmes linéaires, faiblement hyperboliques caractéristiques multiples. Comptes rendus Acad. Sci. Paris 282, série A,1976, 1105-1107.

[5] D. GOURDIN ,*Les opérateurs faiblement hyperboliques matriciels à caractéristiques de multiplicités constantes , bien décomposables et le problème de Cauchy non caractéristiques associé .* J. Math. Kyoto Univ.,17-3 (1977),539-566 .

[6] D. GOURDIN ,*Problème de Cauchy non caractéristique pour les systèmes hyperboliques à caractéristiques de multiplicité variable, Domaine de dépendance.* Comm. in Partial Diff. equations, 4(5),1979,447-507.

[7] D. GOURDIN ,M. MECHAB ,*Etude du problème de Cauchy faiblement hyperbolique $C^\infty$ pour des systèmes à caractéristiques de multiplicité variable quelconque.* Collection "Travaux en Cours" (Ed. J. Vaillant),Hermann 1985,121-147.

[8] Y. HASEGAWA , On the Levi conditon for Goursat problem, J. Math. Kyoto Univ.,27-1 (1987),1-25.

[9] Y. HASEGAWA, On the $C^\infty$ Goursat problem for the equations with constant coefficients , J. Math. Kyoto Univ.,19-1 (1979),125-151.

[10] L. HÖRMANDER, The Analysis of Linear Partial Differential Operators III .

[11] A. LAX , On the Cauchy's Problem for differential equations with multiple characteristics, Comm. pure apll. Math.,IX (1956), 135-169.

[12] P. D. LAX , Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems Duke Mth. J.,vol.24,1957,627-646

[13] D. LUDWIG,Exact and asymptotic solutions of the Cauchy problem, Comm. pure appl. Math. vol. 13,1960,473-508

[14] A. LAX , On the Cauchy's Problem for differential equations with multiple characteristics, Comm. pure apll. Math.,IX (1956), 135-169.

[15] T.NISHITANI, *On the $\mathcal{E}$-wellposedness for Goursat problem with constant coefficients*, J.Math. Kyoto Univ.,20-1 (1980),179 -190.

[16] J. VAILLANT ,Données de Cauchy portées par une caractéristique double dans le cas d'un système linéaire d'équations aux dérivées partielles,rôle des bicaractéristiques. J.Math. pures . appl. 47, 1968, p.1-40

[17] J. VAILLANT , Systèmes hyperboliques à caractéristiques multiples, J. Math. pure et apl. 58,1979, 165-216.