Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 47e année, nº 5-8, 1978, pp. 161-191

SUR LA THÉORIE DE LA RELATIVITÉ RESTREINTE DANS LA RÉGION DU GENRE ESPACE (*)

par R. DUTHEIL et A. RACHMAN (*)
Laboratoire de Physique de la Faculté des Sciences, 86022 Poitiers, France
et Laboratoire de Physique Théorique, Institut Henri Poincaré, 75005 Paris

RÉSUMÉ

A partir du groupe 0_4^+ des rotations dans des plans complexes, groupe purement mathématique, on peut déduire trois groupes de transformations physiques : le Groupe de Lorentz subceique (LSC) correspondant aux bradyons et impliquant des lignes d'univers du genre temps, ou ce qui est équivalent une métrique pseudo-euclidienne de signature $+ - - -$; le Groupe de Lorentz transceique (LTC), possibilité mathématique « ouverte » pour les tachyons, impliquant des lignes d'univers du genre espace, ou proposition équivalente une métrique pseudo-euclidienne de signature $- + + +$; le Groupe de Lorentz « ceique » correspondant aux systèmes de repère dont la quantité de mouvement serait infinie (IMF ou Infinite Momentum Frame) et aux coordonnées du cône de lumière, la métrique étant également spécifique et les systèmes IMF correspondant aux luxons.

Le Groupe LTC comprend des transformations superlumineuses « symétriques » des transformations du Groupe LSC : ces transformations transceiques posent le problème physique de l'extension théorique éventuelle des systèmes de repère inertiels, constitués de « matière tachyonique » dont les vitesses relatives sont toujours plus grandes que celle de la lumière, ces référentiels tachyoniques ayant des coordonnées inhérentes dans lesquelles est exprimée la métrique : dans ces systèmes de repère, le temps propre prend une structure non habituelle, tout en gardant la même définition. On définit également le concept de « matière tachyonique ».

Il est alors possible de faire la théorie relativiste de cette variété d'univers transceique et en particulier de retrouver de façon déductive, à partir des équations de la Dynamique tachyonique les résultats « heuristiques » obtenus par Feinberg et Sudarshan concernant l'impulsion-énergie, et ceci sans introduire de masse imaginaire.

On étend le Principe de covariance généralisée d'Einstein aux référentiels d'inertie tachyoniques : en conséquence les équations de la Physique des bradyons ou des tachyons, écrites sous forme tensorielle ont la même forme : il faut alors les considérer comme des relations à connexions affines dans un espace général affine où il existe donc une « supercovariance ».

Les auteurs proposent une formule d'effet Doppler transceique pouvant être vérifiée

(*) La terminologie suivante sera utilisée au cours de ce travail : c étant la vitesse de la lumière dans le vide, l'adjectif ceique s'appliquera à cette vitesse, les adjectifs subceique et transceique s'appliquant respectivement aux vitesses inférieures et supérieures à c.

(**) Adresse de la correspondance : A. RACHMAN, Laboratoire de Physique, Faculté des Sciences, 86022 Poitiers Cedex, France.

Présenté par J. C. Pecker et P. Swings, le 19 mai 1978.

expérimentalement en Astrophysique, à partir de la Terre, en cas de découverte « d'objets tachyoniques ».

Comme application ils montrent qu'il est possible d'écrire très simplement une équation de Klein-Gordon transceique, de faire la théorie quantique d'un champ de tachyons de spin zéro et d'introduire la notion d'antitachyon.

Les résultats jusqu'ici négatifs des expériences destinées à mettre en évidence les tachyons s'expliquent peut-être par cette « symétrie relativiste » dissimulée par une dissymétrie de fait ainsi que cela s'est produit pour le positron et les antiparticules.

I. INTRODUCTION

Il existe en physique de nombreux exemples où une possibilité mathématique ouverte s'est révélée être occupée en fait, c'est-à-dire où une symétrie de droit se trouve dissimulée par une dissymétrie de fait, ce qui peut rendre difficile la mise en évidence expérimentale d'un phénomène : on pense en particulier à l'exemple du positron et des antiparticules.

Il nous a semblé qu'il pourrait exister peut-être une situation analogue pour les tachyons : derrière une dissymétrie de fait avec les bradyons qui pourrait rendre compte de l'échec des tentatives expérimentales, il existe peut-être une symétrie mathématique qui serait une « symétrie relativiste ».

C'est dans cet esprit que, faisant totalement abstraction de la « variété d'univers bradyonique » ou « subceique », et en se basant sur le seul postulat de l'invariance de c, nous avons construit une théorie de la Relativité Restreinte spécifiquement tachyonique et correspondant à une variété d'univers « transceique ». On pose au départ trois axiomes qui reçoivent une justification théorique ultérieure : le premier axiome consiste à supposer l'existence dans la variété transceique, de « matière tachyonique », et donc de référentiels d'inertie tachyonique auxquels sont associées des coordonnées superlumineuses réelles inhérentes à ces systèmes et de nature différente des coordonnées bradyoniques. Le deuxième axiome consiste à postuler que les vitesses relatives de deux référentiels d'inertie tachyoniques sont toujours supérieures à c. Le troisième axiome est le choix d'une métrique exprimée en coordonnées réelles inhérentes, en accord avec les vitesses toujours supérieures à c. Ce concept de métrique étant conforme aux idées de Minkowski [1], le choix de cette métrique entraînant nécessairement que les lignes d'univers sont du genre espace et réciproquement.

Ces axiomes sont théoriquement justifiés par l'établissement d'une transformation réelle faisant partie d'un « Groupe de Lorentz transceique ». En fait, et c'est là qu'apparaît la « symétrie », on montre qu'à partir d'un groupe purement mathématique : le group O_4^+ des rotations dans des plans complexes, on peut déduire trois groupes « physiques » et trois seulement : le groupe de Lorentz subceique, le groupe de Lorentz transceique, et le groupe de Lorentz ceique correspondant aux référentiels IMF (Infinite Momentum Frame) [2]. L'analyse du groupe transceique permet de préciser le concept de « matière tachyonique » déjà avancé par certains auteurs [3], et on donne la définition et les propriétés spatio-temporelles de cette « matière », la notion de « temps propre » en particulier n'ayant plus les mêmes propriétés que dans la variété subceique.

On développe ensuite le problème de la possible observation expérimentale de tachyons ou « objets tachyoniques » sur la base de ce modèle théorique, en établissant la formule d'un effet Doppler superlumineux supposé observé à partir d'un référentiel bradyonique, formule déjà proposée empiriquement par un autre auteur [4].

Ce travail est le développement exhaustif de résultats publiés antérieurement [5], [6].

Si cette hypothèse de travail correspondait à la réalité, contrairement à des idées exprimées récemment par Everett [7], [8], les tachyons rentreraient dans le cadre d'une théorie de la Relativité Restreinte généralisée, et il n'y aurait pas de solution de continuité dans la covariance. Nous voulons souligner que cette théorie de la Relativité Restreinte dans la région du genre espace constitue une possibilité mathématique ouverte que seule l'expérience pourra confirmer ou infirmer.

II. AXIOMES DE BASE

On admet que le postulat fondamental de la Relativité Restreinte : invariance de la vitesse de la lumière c par rapport à tous les référentiels d'inertie, est valable dans la variété d'univers transceique. En outre, on prend comme bases les axiomes suivants qui recevront ultérieurement une justification théorique.

Axiome I

Il existe une « matière tachyonique » et donc des référentiels d'inertie superlumineux en matière tachyonique, que l'on distingue des référentiels d'inertie en matière bradyonique = Ordinary Referential Frame = ORF. Il existe des coordonnés réelles superlumineuses inhérentes aux référentiels superlumineux, et dont la nature et les propriétés peuvent être différentes des coordonnées associées à un système ORF.

Axiome II

Par définition la vitesse relative de deux référentiels d'inertie superlumineux est toujours plus grande que c, contrairement à la vitesse relative de deux référentiels ORF qui est toujours plus petite que c.

Axiome III

Par rapport à un référentiel d'inertie superlumineux, les lignes d'univers seront du « genre espace » et une succession d'évènements superlumineux le long d'une telle ligne d'univers seront reliés par la métrique suivante :

$$dS^2 = G_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu \qquad (1)$$
$$\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$$

où dS^2 est positive; dS^2 est une métrique réelle définie à l'aide des coordonnées superlumineuses réelles X^μ mesurées par rapport au référentiel superlumineux en accord avec l'axiome I.

La métrique (1) de signature

$$- + + +$$

définit la variété d'univers $\tilde{E}_4$ comme un espace pseudo-euclidien [9] dont la tenseur métrique covariant peut s'écrire

$$G_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

La métrique

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{3}$$

où ds^2 est exprimée à l'aide des coordonnées réelles sous-lumineuses, a comme signature

$$+ - - -$$

et définit la variété d'univers E_4 sub-ceique.
En effet

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \Sigma(dx^i)^2 = dt^2\left(c^2 - \frac{\Sigma(dx^i)^2}{dt^2}\right)$$

$$= dt^2(c^2 - v^2) = c^2 dt^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = c^2 dt^2(1 - \beta^2)$$

ds^2 est positif pour $v < c$ ou $\beta < 1$, négatif (ds imaginaire) pour $v > c$ ou $\beta > 1$.
Par contre

$$dS^2 = -c^2 dT^2 + \Sigma(dX^i)^2 = dT^2\left(\frac{\Sigma(dX^i)^2}{dT^2} - c^2\right)$$

$$= dT^2(v^2 - c^2) = c^2 dT^2\left(\frac{v^2}{v^2} - 1\right) = c^2 dT(\beta^2 - 1)$$

dS^2 est positif (dS réel) pour $v > c$ ou $\beta > 1$ est négatif (dS imaginaire) pour $v < c$ ou $\beta < 1$.

Minkowski [1] a montré que la structure de la métrique (3) pouvait seulement représenter une variété d'univers où toutes les vitesses sont inférieures à c. En accord avec ces idées de Minkowski, la seule possibilité pour représenter un univers où toutes les vitesses sont supérieures à c est donc la métrique réelle (1) exprimée en coordonnées réelles X^μ inhérentes aux référentiels superlumineux. Il faut remarquer que le choix de la métrique ds^2 ou dS^2 est conventionnel, mais il n'en reste pas moins toujours deux possibilités suivant les domaines de vitesses inférieures ou supérieures à c, car pour $v < c$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \Sigma(dx^i)^2 \tag{4}$$

sera positive et négative pour $v > c$, alors que

$$dS^2 = -c^2 dT^2 + \Sigma(dX^i)^2 \tag{5}$$

sera positive pour $v > c$ et négative pour $v < c$.
Ces deux possibilités persistent si l'on inverse la convention.

Il semble cependant plus commode de choisir la première convention puisque ds ou dS représentent les intervalles élémentaires d'univers respectivement dans les variétés E_4 et $\tilde{E}_4$ et puisque ds et dS sont considérés comme des quantités physiquement mesurables : ds sera réel pour deux évènements sous-lumineux correspondant à une vitesse inférieure à c et imaginaire pour deux évènements de « l'ailleurs » et dS sera réel pour deux évènements superlumineux correspondant à une vitesse supérieure à c et imaginaire pour deux évènements de « l'ailleurs » transceique.

Il est capital de remarquer au sujet de l'axiome III que le choix de la métrique

dS^2 dans le système de coordonnées superlumineuses réelles inhérentes implique nécessairement non seulement que les lignes d'univers seront du « genre espace » mais que ce seront des axes « d'espace » au sens usuel du terme.

En effet si nous posons dans (5)

$$X_4 = icT \tag{6}$$

nous obtenons

$$dS^2 = dX_4^2 + \Sigma(dX_i)^2 \tag{7}$$

qui reste positif (c'est-à-dire que dS est réel) comme (5), alors que dans le cas symétrique subceique on a

$$ds^2 = c^2dt^2 - \Sigma(dx^i)^2 > 0 \tag{8}$$

alors qu'en posant $x_4 = ict$

$$\underline{ds}^2 = dx_4^2 + \Sigma(dx_i)^2 < 0 \tag{9}$$

Le fait que dans la représentation ($X_4 = icT$, X_i) dS^2 soit positif entraîne nécessairement que la ligne d'univers est non seulement du genre « espace », mais est un axe d'espace, alors que (9) signifie que la ligne d'univers sera du « genre temps » et axe temporel.

D'où l'on peut déduire le *Théorème suivant* :

La condition nécessaire et suffisante pour que dS^2 représente la métrique de la variété $\tilde{E}_4$ des évènements superlumineux *est que les lignes d'univers soient du genre espace et des axes « d'espace »* dans le système de coordonnées inhérentes.

III. Relative restreinte de l'univers transcéique

Dans $\tilde{E}_4$ les transformations qui feront passer d'un référentiel d'inertie tachyonique R à un autre référentiel d'inertie tachyonique R′ seront linéaires et donc de la forme

$$X'_\mu = \Lambda_{\mu\nu} X_\nu \tag{10}$$
$$\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$$

et elles conservent la quantité

$$X^2 = G_{\mu\nu} X_\mu X_\nu \tag{11}$$

où X_ν et X'_μ sont les systèmes de coordonnées superlumineuses réelles inhérentes respectivement pour les référentiels R et R′.

Les coefficients de la métrique sont définis par

$$G_{00} = -1 ;\ G_{11} = G_{22} = G_{33} = 1 ;\ G_{ij} = G_{ji} = 0 \text{ pour } i \neq j$$

La quantité conservée est donc

$$X^2 = -X_0^2 + \Sigma X_i^2 \tag{12}$$
$$(X_0 = cT)$$

Il est clair que les transformations ainsi introduites forment un groupe : le groupe de toutes les 4×4 matrices qui conservent X^2. L'élément identité du groupe sera la transformation identique $X'_\mu = X_\mu$.

On peut caractériser algébriquement les matrices Λ en introduisant la matrice représentant le tenseur métrique covariant soit

$$G = (G_{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

La condition (11) s'écrit alors

$$G_{\mu\nu}\Lambda_{\mu\varkappa}\Lambda_{\nu\rho}X_\varkappa X_\rho = G_{\varkappa\rho}X_\varkappa X_\rho \quad . \tag{14}$$

soit

$$G_{\mu\nu}\Lambda_{\mu\varkappa}\Lambda_{\varkappa\rho} = G_{\varkappa\rho} \tag{15}$$

ou sous forme matricielle

$$\Lambda^T G \Lambda = G \tag{16}$$

Λ^T représentant la transposée de la matrice Λ.

L'équation (16) permet de calculer le nombre de paramètres de la matrice : Λ contient 16 éléments de matrice réels : G est une matrice symétrique, de sorte que l'équation (16) égale deux matrices symétriques et représente donc 10 conditions, si bien que Λ dépend au total de 6 paramètres réels : Λ est donc hexaparamétrique, les six paramètres indépendants correspondant aux trois composantes de la vitesse définissant le mouvement relatif et aux trois angles d'Euler de la rotation définissant l'orientation relative des systèmes de coordonnées superlumineuses. La transformation sera donc bien quadridimensionnelle.

Dans ces conditions, posons, comme il est classique de le faire pour déterminer les éléments de matrice :

$$X_4 = iX_0 = icT; \; X'_4 = iX'_0 = icT' \tag{17}$$

Nous avons

$$\sum_i X_i^2 + X_4^2 = \Sigma X_i'^2 + X_4'^2 \tag{18}$$

Il existe entre les X' et les X la transformation linéaire

$$X'_\mu = \alpha_{\mu\nu}X_\nu \tag{19}$$

les éléments de matrice $\alpha_{\mu\nu}$ devant remplir les conditions d'orthogonalité

$$\alpha_{\mu\nu}\alpha_{\lambda\nu} = \delta_{\mu\lambda} \tag{20}$$

ν indice muet, $\delta_{\mu\lambda}$ étant le symbole de Kronecker.

Étant donné qu'il y a six paramètres indépendants, on peut reprendre point par point la classique démonstration utilisant le groupe 0_4^+ de rotations, qui montre que l'on peut se ramener sans aucune perte de généralité à des rotations à deux dimensions, avec une coordonnée imaginaire (*) dans les différents plans complexes

(*) Le sous-groupe O_2^+ des rotations à deux dimensions qui est un groupe abélien compact.

ce qui signifie que, sans perte de généralité, on peut rendre les axes parallèles deux à deux, l'axe $X'_3 = X'$ par exemple se déplaçant le long de $X_3 = X$ avec la vitesse colinéaire $v = \beta c > c (\beta > 1)$. Puisque $X'_1 = X_1$, $X'_2 = X_2$, la relation (18) se réduit à

$$X_3^2 + X_4^2 = X_3'^2 + X_4'^2 \tag{21}$$

et la matrice de transformation devient

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{bmatrix} \tag{22}$$

avec les conditions d'orthogonalité

$$\begin{cases} \alpha_{33}^2 + \alpha_{34}^2 = 1 \\ \alpha_{43}^2 + \alpha_{44}^2 = 1 \\ \alpha_{33}\alpha_{43} + \alpha_{34}\alpha_{44} = 0 \end{cases} \tag{23}$$

D'après la section II, la ligne d'univers est du genre espace et doit être un axe d'espace, en l'espèce OX', défini par

$$X'_4 = 0 \tag{24}$$

(24) donne la quatrième condition s'ajoutant à (23) et signifie que tous les points de X' définis par $X'_4 = 0$ se déplacent avec une vitesse uniforme $v > c$ par rapport à OX.

A l'instant T nous avons

$$X_3 = vT = - i\beta X_4, \ (\beta = v/c > 1) \tag{25}$$

La condition (24) s'écrit

$$X'_4 = \alpha_{43}X_3 + \alpha_{44}X_4 = X_4[\alpha_{44} - i\beta\alpha_{43}] \tag{26}$$

$$\text{soit } \alpha_{44} = i\beta\alpha_{43} \tag{27}$$

D'après la deuxième condition de (23)

$$\alpha_{43}^2 + \alpha_{44}^2 = 1$$

$$\text{soit } [\beta^2 - 1]\, \alpha_{43}^2 = - 1 \tag{28}$$

D'où

$$\alpha_{43} = \frac{-i}{\sqrt{\beta^2 - 1}}; \ \alpha_{44} = \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \tag{29}$$

le signe — étant choisi pour α_{43} de manière à avoir une transformation propre. De la troisième condition de (23) nous tirons

$$\alpha_{33} = - \frac{\alpha_{44}}{\alpha_{43}}\alpha_{34} = - i\beta\alpha_{34} \tag{30}$$

Or la première condition de (23) donne

$$\alpha_{33}^2 + \alpha_{34}^2 = 1, \text{ soit } \alpha_{34}^2(\beta^2 - 1) = - 1 \tag{31}$$

Donc

$$\alpha_{34} = \frac{i}{\sqrt{\beta^2 - 1}}\,;\ \alpha_{33} = \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \tag{32}$$

le signe $+$ étant choisi pour α_{34} de manière à avoir une transformation propre. En définitive nous avons

$$\begin{aligned} X'_3 &= \alpha_{33}X_3 + \alpha_{34}X_4 \\ X'_4 &= \alpha_{43}X_3 + \alpha_{44}X_4 \\ X_4 &= ic\mathrm{T} = iX_0;\ X'_4 = ic\mathrm{T}' = iX'_0 \end{aligned} \tag{33}$$

et en tenant compte des valeurs (29) et (32) des éléments de matrice nous obtenons la transformation

$$\left\{\begin{aligned} & X'_3 = \frac{\beta X_3 - X_0}{\sqrt{\beta^2 - 1}};\ X'_0 = \frac{\beta X_0 - X_3}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \\ & X'_1 = X_1;\ X'_2 = X_2 \end{aligned}\right. \tag{34}$$

et en transposant la matrice en obtient la transformation inverse

$$\left\{\begin{aligned} & X_3 = \frac{\beta X'_3 + X'_0}{\sqrt{\beta^2 - 1}};\ X_0 = \frac{\beta X'_0 + X'_3}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \\ & X_1 = X'_1;\ X_2 = X'_2 \end{aligned}\right. \tag{35}$$

La transformation est réelle et quadridimensionnelle ainsi qu'il résulte de l'étude précédente et l'analyse par la théorie des groupes confirme que ces transformations forment un groupe de transformations homogènes, propres, car

$$((\alpha)) = +1;\ \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix} \tag{36}$$

orthochrones, car $\alpha_{44} > 0$ (37), et conservant la métrique dS^2. L'élément identité (ou unité, ou neutre) pour lequel on a

$$X'_\mu = X_\mu \tag{38}$$

est obtenu pour $\beta = \infty$ (soit $\beta \gg 1$ ou $v \gg c$).

Ces transformations font donc partie d'un « Groupe de Lorentz transceique », symétrique du Groupe de Lorentz subceique.

D'une manière générale, la vitesse relative de deux référentiels d'inertie est définie par rapport aux lignes d'univers; dans l'univers subceique la ligne d'univers est du genre temps et c'est un axe temporel. Il faudra donc transposer cette définition dans l'univers transceique où les lignes d'univers sont du genre espace et axes d'espace et définies par

$$\begin{aligned} X'_4 = 0 \ \text{ ou } \ X'_0 = 0 \\ \text{ou} \quad X_4 = 0 \ \text{ ou } \ X_0 = 0 \end{aligned} \tag{39}$$

Alors que dans l'univers subceique, la vitesse relative sera obtenue en formant

$$\left(\frac{dx}{dx_0}\right)_{x'=k} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{dx}{dx_4}\right)_{x'=k} \tag{40}$$

dans le système de coordonnées ORF et $x' = k$ définit les lignes d'univers du genre temps : en particulier $x' = 0$ est la ligne d'univers de l'origine dans le système ORF primée; au contraire il faudra former, dans le système de coordonnées superlumineuses inhérentes

$$\left(\frac{dX}{dX_0}\right)_{X'_0=k} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{dX}{dX_4}\right)_{X'_4=k} \tag{41}$$

C'est-à-dire en l'espèce ici $k = 0$, donc

$$\left(\frac{dX}{dX_0}\right)_{X'_0=0} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{dX}{dX_4}\right)_{X_4=0} \tag{42}$$

soit en utilisant les deuxièmes équations de (34) ou (35), puisque on fait respectivement

$$\begin{aligned} X'_0 &= 0 \text{ ou } dX'_0 = 0 \\ X_0 &= 0 \text{ ou } dX_0 = 0 \end{aligned} \tag{43}$$

on obtient

$$\begin{cases} dX'_0 = -dX + \beta dX_0 = 0;\ dX/dX_0 = \beta \\ dX_0 = dX' + \beta dX'_0 = 0;\ dX'/dX'_0 = -\beta \end{cases} \tag{44}$$

Tous les points de $X'_0 = 0$ se déplacent par rapport aux points de $X_0 = 0$ avec la vitesse β et tous les points de $X_0 = 0$ se déplacement par rapport aux points de $X'_0 = 0$ avec la vitesse $-\beta$.

On ne peut utiliser les premières équations de (34) et (35) en écrivant $X'_3 = X' = 0$, soit $dX'_3 = dX' = 0$ ou $X_3 = X = 0$, soit $dX_3 = dX = 0$, car écrire ces égalités reviendrait à considérer $X'_3 = X' = 0$ ou $X_3 = X = 0$ comme des lignes d'univers qui seraient alors du genre temps et axes temporels, ce qui est contraire aux hypothèses : on trouverait alors comme vitesse $1/\beta$ (Note 1).

Si dans la transformation de Lorentz subceique

$$x' = \frac{x - \beta x_0}{\sqrt{1-\beta^2}};\ x'_0 = \frac{x_0 - \beta x}{\sqrt{1-\beta^2}};\ x'_1 = x_1;\ x'_2 = x_2;\ \beta < 1 \tag{45}$$

on pose

$$\beta = 1/\beta' = c/v \tag{46}$$

on obtient une représentation paramétrique de cette transformation

$$x' = \frac{\beta' x - x_0}{\sqrt{\beta'^2 - 1}};\ x'_0 = \frac{\beta' x_0 - x}{\sqrt{\beta'^2 - 1}};\ x'_1 = x_1;\ x'_2 = x_2 \tag{46}$$

Note 1 : Si de même dans la transformation subceique on fait $x'_0 = 0$, ce qui revient à écrire que les lignes d'univers sont du genre espace et axes d'espace, on trouve

$$dx/dx_0 = 1/\beta.$$

où le paramètre β' varie entre les valeurs $\beta' = \infty$ et $\beta' = 1$ quand β varie respectivement entre 0 et 1, mais cette forme paramétrisée de la transformation de Lorentz subceique n'a rien à voir avec la transformation superlumineuse : on ne peut en aucun cas attribuer au paramètre $\beta' = c/v$ la valeur d'une vitesse relative. Il s'agit d'une forme paramétrisée de la transformation subceique qui reste exprimée en coordonnées ORF dans la métrique ds^2.

Au contraire la transformation de Lorentz transceique a été établie *ab initio*, dans la métrique dS entre référentiels tachyoniques, en supposant *non connue* l'existence d'une variété d'univers subcéique et d'un groupe de transformations de Lorentz subceique, dont on fait totalement abstraction au cours du raisonnement proprement « transceique ».

Si nous posons maintenant

$$\sin \Phi = \frac{-i}{\sqrt{\beta^2 - 1}}; \ \cos \Phi = \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - 1}}; \ \cot \Phi = \frac{\cos \Phi}{\sin \Phi} = i\beta \tag{47}$$

on voit que la matrice (22) contient la sous-matrice

$$\begin{pmatrix} \cos \Phi & -\sin \Phi \\ \sin \Phi & \cos \Phi \end{pmatrix} \tag{48}$$

opérateur du groupe 0_2^+ des rotations (*) dans les plans complexes, ou pour la transformation inverse la sous-matrice

$$\begin{pmatrix} \cos \Phi & \sin \Phi \\ -\sin \Phi & \cos \Phi \end{pmatrix} \tag{49}$$

transposée de (48), Φ variant entre des valeurs correspondant à 0 ($\beta = \infty$) et $\pi/4 (\beta = 1)$.

En fait le groupe 0_4^+ des rotations dans les plans complexes et ses sous-groupes 0_2^+ sont des groupes purement mathématiques, l'opérateur de rotation étant la matrice (48) ou sa transposée (49), soit d'une manière générale l'opérateur hermitien et unitaire de 0_2^+ :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \mp \sin \theta \\ \pm \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \tag{50}$$

A partir du groupe purement mathématique 0_4^+ on peut obtenir trois groupes de transformations ayant une signification physique et ne faisant intervenir que des éléments réels : le groupe de Lorentz subceique, le groupe de Lorentz transceique et le groupe de Lorentz « ceique » qui est un groupe de rotations limite correspondant à $\theta \to \pi/4$ et qui physiquement comprend les transformations entre deux systèmes IMF associés aux luxons dont les vitesses relatives sont toujours égales à c [2].

Pour obtenir les transformations du groupe de Lorentz subceique, on pose

$$\theta = \psi; \ \mathrm{tg}\ \psi = i\frac{v}{c} = i\beta \tag{51}$$

en remplaçant le paramètre ψ qui est un angle par le paramètre réel v ayant les dimensions d'une vitesse : ψ est l'angle de deux lignes d'univers du genre temps,

(*) Groupe abélien compact.

c'est-à-dire l'angle de deux axes temporels et varie entre $0(\beta = 0)$ et $\pi/4(\beta = 1)$. Le ds^2 correspondant sera négatif si l'on utilise la coordonnée $x_4 = ict$

$$ds^2 < 0 \tag{52}$$

et positif en coordonnées réelles avec $x_4 = ct$

$$ds^2 > 0 \tag{53}$$

Les vitesses relatives seront toujours inférieures à $c(\beta < 1)$ et les référentiels lorentziens correspondants du type bradyonique ORF.

Pour obtenir les transformations du groupe de Lorentz transceique à partir du groupe 0_4^+, on pose

$$\theta = \Phi; \ \cot \Phi = i \frac{v}{c} = i\beta \tag{54}$$

Φ est alors l'angle de deux lignes d'univers du genre espace, c'est-à-dire l'angle de deux axes d'espace et varie entre les valeurs $0(\beta = \infty)$ et $\pi/4(\beta = 1)$.

Le $d\mathrm{S}^2$ correspondant exprimé en coordonnées inhérentes sera positif si l'on utilise la coordonnée $\mathrm{X}_4 = ic\mathrm{T}$

$$d\mathrm{S}^2 > 0 \tag{54}$$

et sera également positif en coordonnées réelles avec $\mathrm{X}_0 = c\mathrm{T}$.

$$d\mathrm{S}^2 > 0 \tag{55}$$

Nous allons maintenant justifier les axiomes introduits initialement, en particulier celui qui a trait à la possibilité d'existence de référentiels tachyoniques et de « matière tachyonique ».

L'analyse comparée par la théorie des groupes [5] du groupe de Lorentz subcéique et du groupe de Lorentz transceique montre les faits suivants : l'existence de l'Identité ou élément neutre

$$\mathrm{X}'_\mu = \mathrm{X}_\mu \tag{56}$$

pour $\beta = \infty$ ($\beta \gg 1$ ou $v \gg c$) correspond symétriquement à l'existence de l'Identité

$$x'_\mu = x_\mu \tag{57}$$

pour $\beta = 0$ ($\beta \ll 1$ ou $v \ll c$) respectivement dans les groupes transceique et subceique; $\beta = 0$ est une valeur limite ($\beta \to 0$) qui ne correspond plus à une « vitesse relative », mais définit dans la variété d'univers subceique un référentiel bradyonique et par suite la possible existence de « matière bradyonique » que l'on peut définir comme une agrégat de bradyons dont les rapports cinématiques mutuels sont statistiquement définis par $\beta = 0$, c'est-à-dire en fait $\beta \ll 1$ ou $v \ll c$.

De même, par analogie, la valeur $\beta = \infty$, soit en fait $\beta \gg c$ ou $v \gg c$ ne pourrait plus être considérée comme correspondant à une « vitesse relative », et définirait, comme le suggère l'analyse mathématique faite par la théorie des groupes, un référentiel « tachyonique ». On est donc amené à envisager la possibilité théorique d'agrégats de tachyons (« gaz de tachyons » par analogie avec un « gaz de photons »), dont les rapports cinématiques mutuels sont statistiquement définis par

$$\beta \gg 1 \text{ ou } v \gg c \tag{58}$$

Cet état n'est donc ni le « repos » ni le mouvement, mais correspond ainsi que nous allons le montrer à une « fusion spatio-temporelle », au sens de Minkowski [1], différente de celle qui est inhérente à la matière bradyonique de l'univers subceique.

En effet [10, p. 27 et 28] : « Soit un point matériel de coordonnées spatiales x^μ fonctions du temps t, les x^μ et t étant exprimés dans le même repère lorentzien. L'expérience montre qu'il existe toujours un repère lorentzien physique dans lequel le point est au repos. Il suit de là que *la trajectoire spatio-temporelle* (*ligne d'univers*) du point matériel x^i ($i = 1, 2, 3, 4$) est partout du genre temps et qu'on peut définir en chacun de ses points (« instants-points ») *un repère lorentzien tangent* (modulo une banale rotation des axes 1, 2, 3). *En corollaire, la vitesse physique d'un point matériel est toujours inférieure à c.*

Par une idéalisation quelque peu radicale, la Théorie de la Relativité introduit la notion *d'observateurs ponctuels* dont le corps serait réduit à *un point matériel.* Elle pose alors *en principe* que le temps vécu par un tel observateur s'obtient par intégration des temps lorentziens tangents, c'est-à-dire qu'il est mesuré par l'abscisse curviligne

$$ds = icd\tau$$

$$(ds^2 = dx^i dx_i;\ d\tau \textit{ temps propre})$$

Elle postule en outre que *l'espace observationnel* d'un tel observateur *est en chacun de ses instants-points la variété plane trimendisionnelle normale à la courbe* ».

Dans le cas de la variété d'univers transceique, par contre, où les lignes d'univers sont du genre espace et axes d'espace (l'énoncé équivalent étant que la métrique est dS^2) et où la vitesse d'un point matériel est toujours supérieure à c, il existe toujours un repère lorentzien tachyonique possible, tel que dans le système de coordonnées inhérentes, le point soit dans un état cinématique *qui n'est plus le mouvement* (mais qui n'est pas le repos). Ce référentiel sera tel que « l'espace observationnel », c'est-à-dire le sous-espace $\tilde{E}_3$, soit en chacun des instants-points de la ligne d'univers, *la variété plane tridimensionnelle tangente à la ligne d'univers*, c'est-à-dire que les lignes d'univers étant rectilignes, $\tilde{E}_3$ *contient* les lignes d'univers qui sont du genre espace et axes d'espaces définies par $\beta \gg 1$ ou $v \gg c$ ($\beta = \infty$) ou ce qui est équivalent par

$$X_0 = 0 \tag{59}$$

Dans le cas de la variété d'univers subceique (ou bradyonique), l'espace observationnel est normal à la ligne d'univers et cet espace E_3 peut être considéré comme le lieu de l'ensemble des points qui sont tous au repos les uns par rapport aux autres, leurs lignes d'univers étant toutes parallèles entre elles et normales à l'espace observationnel E_3 : un tel ensemble de particules peut constituer de la matière bradyonique, les lignes d'univers étant définies par

$$x_i = C^{te} \tag{60}$$

ce qui correspond à $\beta \ll 1$ ou $v \ll c$ (β, $v \to 0$).

Par contre dans la variété transceique, l'espace $\tilde{E}_3$ peut être considéré comme le lieu de l'ensemble des particules dont les lignes d'univers sont contenues dans cet espace (ou tangentes à cet espace) et dont les rapports cinématiques mutuels ne sont plus le mouvement (ni le repos).

Un tel ensemble de particules serait susceptible de former de la « matière tachyonique ». Mais alors le « temps propre » d'une telle particule, toujours défini, d'après la définition relativiste générale, suivant la ligne d'univers, sera donc mesuré ici suivant un axe d'espace, alors que le « temps cinématique » est mesuré suivant l'axe normal à la variété plane $\tilde{E}_3$, contrairement à ce qui a lieu dans un référentiel lorentzien bradyonique, où axe de temps propre et axe de temps cinématique sont confondus en un même axe dit axe temporel : en effet, nous pouvons écrire, d'après la définition relativiste du temps propre $d\tau$

$$d\tau^2 = \frac{1}{c^2} \sum_{\mu=1}^{0} dX_\mu^2 = \frac{1}{c^2} \left[\sum_i (dX_i)^2 - c^2 dT^2 \right] = \frac{dS^2}{c^2} \tag{61}$$

$$(\mu = 1, 2, 3, 0;\ i = 1, 2, 3)$$

Pour $\beta \gg 1$, ou ce qui est équivalent pour $T = 0$, ou $dT = 0$, relation qui définit le sous-espace $\tilde{E}_3$, la relation (61) devient

$$d\tau^2 = \frac{\sum_i dX_i^2}{c^2} \tag{62}$$

soit par exemple

$$d\tau = \frac{dX}{c} \tag{63}$$

Le « temps propre » est donc mesuré suivant OX et toute mesure de longueur X est aussi une mesure de temps propre τ, ce qui montre que les « coordonnées inhérentes » postulées dans les axiomes initiaux sont de nature différente des coordonnées bradyoniques.

D'une manière générale, dans son référentiel tachyonique propre, défini par

$$T = 0 \tag{64}$$

une particule sera définie par les coordonnées

$$T = 0,\ X_1,\ X_2,\ X_3 \tag{65}$$

et les X_i sont aussi coordonnées de « temps propre »

$$\tau_1 = \frac{X_1}{c};\ \tau_2 = \frac{X_2}{c};\ \tau_3 = \frac{X_3}{c} \tag{66}$$

Si un deuxième référentiel lorentzien tachyonique se déplace par rapport au premier considéré avec une vitesse relative

$$\frac{dX}{dX_0} = \beta > 1 \tag{67}$$

dX_0 étant différent de zéro, le mouvement sera observé dans le premier référentiel suivant la direction OX, mais en fonction du « temps cinématique » mesuré suivant l'axe OX_0 normal au sous-espace $\tilde{E}_3$.

On peut encore définir $d\tau$ par

$$d\tau^2 = \frac{dS^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} [\Sigma\, dX_i^2 - dX_0^2] = \frac{1}{c^2} [\Sigma\, dX_i^2 - c^2 dT^2]$$

$$= \frac{1}{c^2} [v^2 dT^2 - c^2 dT^2] = \beta^2 dT^2 - dT^2 \tag{68}$$

et $$d\tau^2 = \lim\,[\beta^2 dT^2 - dT^2] \tag{69}$$

pour $$\beta = \infty,\ dT = 0$$

soit

$$d\tau^2 = \lim\,(\beta^2 dT^2) = \frac{dS^2}{c^2} = \frac{\Sigma(dX_i)^2}{c^2} \tag{70}$$

$$\beta = \infty,\ dT = 0$$

Donc

$$d\tau = \lim\,(\beta dT) = \frac{dS}{c} = \frac{\sqrt{dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2}}{c} \tag{71}$$

$$\beta = \infty,\ dT = 0$$

Il est intéressant de remarquer l'analogie qui existe entre l'introduction du concept de coordonnées de temps propre d'une particule transceique dans son référentiel tachyonique propre et l'introduction du concept de coordonnées du cône de lumière dans les systèmes IMF (infinite momentum frame) utilisés dans la théorie des partons : les référentiels IMF constituent en quelque sorte les référentiels propres des luxons avec une métrique spécifique.

En effet [2] on arrive aux expressions

$$\begin{aligned} x &= x';\ y = y' \\ z &= \frac{1}{2}(t' + z')e^{w} \\ t &= \frac{1}{2}(t' + z')e^{w} \end{aligned} \tag{72}$$

Pour définir les coordonnées des systèmes IMF, on fait $w = \infty$; alors z et $t \to \infty$, et on définit les nouvelles coordonnées inhérentes à un système IMF par les quantités

$$\begin{aligned} &z\,.\,e^{-w} \\ &t\,.\,e^{-w} \end{aligned} \tag{73}$$

qui tendent vers une limite finie, quand $w \to \infty$, bien que z et $t \to \infty$ et que $e^{-w} \to 0$. En effet

$$\begin{aligned} \lim\,(z\,.\,e^{-w}) &= \frac{1}{2}(t' + z') \\ \lim\,(t\,.\,e^{-w}) &= \frac{1}{2}(t' + z') \end{aligned} \tag{74}$$

On définit alors les coordonnées τ et ζ du cône de lumière (après multiplication par $\sqrt{2}$) comme

$$\begin{aligned} \tau &= \sqrt{2}\,\lim\,(te^{-w}) \\ \zeta &= \sqrt{2}\,\lim\,(ze^{-w}) \end{aligned} \tag{75}$$

quand $w = \infty$, d'où la transformation du « groupe de Lorentz ceique »

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}(t' + z'); \; \xi = x'; \; \chi = y'; \; \zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}(t' - z') \tag{76}$$

On remarquera l'analogie des définitions (71) et (75).

Il existe donc une variété d'univers ceique de métrique

$$d\sigma^2 = d\tau d\zeta + d\zeta d\tau - d\chi^2 - d\xi^2 = 0$$

de signature $+ + - -$ exprimée dans le système de coordonnées inhérentes (τ, ζ, χ, ξ), qui est celui du cône de lumière.

On peut donc concevoir la possibilité d'existence d'une « matière luxonique » agrégat d'un ensemble de luxons dont toutes les vitesses relatives sont égales à c, ce qui permet de définir le concept de référentiel IMF physique.

IV. DYNAMIQUE DANS LA VARIÉTÉ D'UNIVERS TRANSCÉIQUE

La variété d'univers transceique $\tilde{E}_4$ étant rapportée à des coordonnées curvilignes quelconques (y^α) et la métrique prenant la forme

$$dS^2 = G_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta \tag{77}$$

avec

$$G_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta}(y^\alpha); \; \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$$

soit un point matériel en mouvement dans $\tilde{E}_4$ avec une vitesse naturellement supérieure à c : ce mouvement est défini par la donnée des (y^α) en fonction de l'intervalle S compté le long de la ligne d'univers du point dans $\tilde{E}_4$, le quadrivecteur vitesse unitaire du point étant

$$u^\alpha = \frac{dy^\alpha}{dS} \tag{78}$$

Dans un système de coordonnées réelle inhérentes à un référentiel tachyonique

$$(X^i, X^4 = cT; \; i = 1, 2, 3)$$

avec la métrique

$$\begin{gathered} dS^2 = -(dX^4)^2 + \Sigma(dX^i)^2 \\ (- + + +) \end{gathered} \tag{79}$$

équivalent à $dT/dS = c \dfrac{1}{\sqrt{\beta^2 - 1}}$,

si $v^i = dX^i/dT$ sont les composantes de la vitesse d'espace $\vec{v}(|\vec{v}| > c)$ et $v = \beta c (\beta > 1)$ la grandeur de la vitesse, on obtient immédiatement

$$u^i = \frac{v^i}{c\sqrt{\beta^2 - 1}}; \; u^4 = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \tag{80}$$

Note 2 : Pour le problème de la macrocausalité dans la variété d'univers $\tilde{E}_4$ voir l'appendice 3.

Il semble logique d'étendre le Principe de covariance générale d'Einstein (*), concernant les équations de la Physique à la variété d'univers transceique et de poser un principe de supercovariance.

Dans ces conditions, caractérisons l'inertie d'un tachyon par un paramètre réel μ ayant les dimensions d'une masse, les équations de la Dynamique transcéique s'écrivent sous forme tensorielle

$$\mu c^2 \frac{\nabla u^\alpha}{d\mathrm{S}} = \Phi^\alpha \tag{81}$$

∇u^α étant la différentielle absolue de u^α, le coefficient c^2 étant introduit pour des raisons d'homogénéité bien connues, Φ^α étant le vecteur force d'univers, $\nabla u^\alpha / d\mathrm{S}$ l'accélération d'univers relative à S. Dans le système de coordonnées réelles inhérentes d'un référentiel tachyonique, ces équations s'écrivent

$$\mu c^2 \frac{du^\alpha}{d\mathrm{S}} = \Phi^\alpha \tag{82}$$

Il en résulte immédiatement que le principe de l'Inertie est conservé : un tachyon isolé admet pour ligne d'univers une géodésique de l'élément linéaire de $\tilde{\mathrm{E}}_4$ pour laquelle ce $d\mathrm{S}^2$ est positif.

$$\frac{du^i}{d\mathrm{S}} = 0 ; \frac{du^4}{d\mathrm{S}} = 0 \tag{83}$$

A partir des équations (82) on trouve par un calcul classique les composantes du quadrivecteur d'impulsion-énergie dans le système de coordonnées inhérentes d'un référentiel tachyonique soit

$$\tilde{p}^i = \frac{\mu v^i}{\sqrt{\beta^2 - 1}} ; \; \tilde{p}^4 = \frac{\tilde{\mathrm{E}}}{c} = \frac{\mu c}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \tag{84}$$

dont la norme est en posant $\tilde{p}^2 = \Sigma(\tilde{p}^i)^2$

$$-(p^4)^2 + \Sigma(p^i)^2 = \mu^2 c^2$$

ou

$$(p)^2 - (p^4)^2 = \mu^2 c^2 \tag{85}$$

avec la signature $- + + +$, soit pour deux référentiels tachyoniques ayant la disposition habituelle

$$\tilde{\mathrm{E}} = \frac{\mu c^2}{\sqrt{\beta^2 - 1}} ; \; \tilde{p} = \frac{\mu \beta c}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \tag{86}$$

$$\tilde{\mathrm{E}}^2 - \tilde{p}^2 c^2 = -\mu^2 c^4 \text{ ou } \tilde{p}^2 c^2 - \tilde{\mathrm{E}}^2 = \mu^2 c^4 \tag{87}$$

C'est le résultat obtenu initialement par G. Feinberg [11] et Sudarshan [12] à partir des expressions subceiques du quadrivecteur d'impulsion-énergie, en écrivant que

(*) Tous les repères sont équivalents pour formuler les lois de la nature : ces lois sont covariantes vis à vis de transformations de coordonnées arbitraires. Les lois de la Physique doivent être telles qu'elles sont valables *dans un repère absolument quelconque*, in Einstein A., The Meaning of Relativity. Princeton University Press, 1955, et Einstein, Lorentz, Minkowski, Das Relativittsäprinzep, Teubner.

par rapport à un référentiel ORF si β est plus grand que 1, la masse propre d'un tachyon dans ce référentiel est imaginaire.

$$m^* = \mu i \tag{88}$$

Or nous obtenons ces expressions d'une manière déductive à partir des équations générales de la Dynamique de la variété transceique, μ étant réel et sans faire intervenir de « masse propre imaginaire ».

Les équations précédentes de la Dynamique tachyonique peuvent être écrites, ainsi que leurs conséquences, comme des relations entre observables mesurés à partir d'un référentiel ORF.

Soit en effet un tachyon ou « objet » tachyonique observé à partir d'un référentiel ORF avec *une vitesse mesurée* $\bar{v} > c$ ou $\bar{\beta} > 1$ par rapport à ce référentiel ORF. *Cette vitesse mesurée n'est pas une vitesse relative* : *le concept de vitesse relative* entre un objet faisant partie de la *variété subceique* et un objet faisant partie de la *variété transceique n'a en effet pas de sens,* ainsi que nous le préciserons ultérieurement; $\bar{v} > c\,(\bar{\beta} > 1)$ est simplement une quantité mesurée à partir d'un référentiel ORF et ayant les dimensions d'une vitesse : si un tachyon ou « objet » tachyonique se déplace sur une ligne d'univers réelle du genre espace, son déplacement sera enregistré par exemple entre le point d'espace

$$\bar{x}^i$$

et le point d'espace

$$\bar{x}^i + d\bar{x}^i$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

entre les instants

$$\bar{t} \text{ et } \bar{t} + \overline{dt}$$

$\bar{x}^i$ et $\bar{t}$, et $\bar{x}^i + \overline{dx^i}$ et $\bar{t} + \overline{dt}$ désignant les coordonnées mesurées du tachyon dans le système de coordonnées ORF, la vitesse mesurée dans ces conditions étant

$$\bar{v} > c(\bar{\beta} > 1).$$

La ligne d'univers du genre espace décrite par le tachyon est alors définie par la *métrique mesurée*

$$d\bar{s}^2 = -c^2\overline{dt}^2 + \Sigma(\overline{dx^i})^2 \;(- + + +) \tag{98}$$

Dans ces conditions on peut écrire les relations suivantes entre observables

$$\bar{\mu}c^2\frac{\nabla\bar{u}^\alpha}{d\bar{s}} = \bar{\Phi}^\alpha \tag{90}$$

soit dans ce système de coordonnées ORF

$$\bar{\mu}c^2\frac{d\bar{u}^\alpha}{d\bar{s}} = \bar{\Phi}^\alpha \tag{91}$$

ce qui donne les quantités mesurées

$$\bar{p}^i = \frac{\bar{\mu}\bar{v}^i}{\sqrt{\bar{\beta}^2 - 1}}\,;\; \bar{p}^4 = \frac{\bar{E}}{c} = \frac{\bar{\mu}c}{\sqrt{\bar{\beta}^2 - 1}} \tag{92}$$

$$(\bar{p})^2 - (p^4)^2 = \mu^2c^2 \tag{93}$$

soit en supposant la propagation parallèle à un axe ORF

$$\bar{p} = \frac{\bar{\mu}\bar{\beta}c}{\sqrt{\bar{\beta}^2 - 1}}; \quad \bar{p}^4 = \frac{\bar{\mathrm{E}}}{c} = \frac{\bar{\mu}c}{\sqrt{\bar{\beta}^2 - 1}} \tag{94}$$

La quantité $\bar{\mu}$ est expérimentalement accessible, puisque pour $\bar{v} \gg c$, soit $\bar{\beta} \gg 1$, on a

$$\bar{p} = \bar{\mu}c \quad (\bar{p} \sim \bar{\mu}c) \tag{95}$$

On retrouve les résultats obtenus par G. Feinberg et Sudarshan [11] et déjà signalés.

Réciproquement, à partir d'un référentiel tachyonique, un bradyon ou « objet bradyonique » serait observé comme ayant une ligne d'univers du genre temps définie par *la métrique mesurée*

$$d\bar{\mathrm{S}}^2 = c^2 d\bar{\mathrm{T}}^2 - \Sigma(d\bar{\mathrm{X}}^i)^2 \quad (+ - - -) \tag{96}$$

et par un raisonnement symétrique du précédent, on trouverait pour le bradyon observé avec la vitesse mesurée $\bar{v} < c\,(\bar{\beta} < 1)$ les observables

$$\bar{p} = \frac{\bar{m}\bar{\beta}c}{\sqrt{1 - \bar{\beta}^2}}; \quad \bar{p}^4 = \frac{\bar{\mathrm{E}}}{c} = \frac{\bar{m}c}{\sqrt{1 - \bar{\beta}^2}} \tag{97}$$

$\bar{m}$ étant la « masse propre » du bradyon qui peut être atteinte « expérimentalement » puisque pour $\bar{v} \ll c\,(\bar{\beta} \ll 1)$

$$\bar{p}^4 = \frac{\bar{\mathrm{E}}}{c} \sim \bar{m}c \tag{98}$$

μ et $\bar{m}$ étant des invariantes scalaires caractéristiques d'une particule on posera

$$\bar{\mu} = \mu \quad \bar{m} = m \tag{99}$$

Il est alors clair que les vitesses mesurées, soit $\bar{v} > c$, soit $\bar{v} < c$ ($\bar{\beta} > 1$ ou $\bar{\beta} < 1$) *ne sont pas des vitesses relatives.*

V. EFFET DOPPLER TRANSCEIQUE

Nous nous proposons de résoudre les deux problèmes suivants :

Problème 1. — Étant donné dans $\tilde{\mathrm{E}}_4$ (métrique $d\mathrm{S}^2$) un faisceau de photons monochromatique et deux référentiels tachyoniques de vitesse relative $v > c\,(\beta > 1)$, trouver la formule de transformation des fréquences.

Problème 2. — Soit un faisceau monochromatique de fréquence $\tilde{\nu}_0$ mesurée par rapport à un référentiel tachyonique. Le système de repère tachyonique possédant une vitesse mesurée $\bar{v}_1 > c\,(\bar{\beta}_1 > 1)$ par rapport à un référentiel ORF, quelle est la relation existant entre la fréquence mesurée $\bar{\nu}_1$ par rapport au système ORF et $\tilde{\nu}_0$ et vice-versa ?

1. *Effet Doppler transceique spécifique.*

Considérons dans $\tilde{\mathrm{E}}_4$ deux référentiels tachyoniques (1) et (2) se déplaçant dans la même direction X_1 parallèle à X_2 avec la vitesse relative $v > c$ ($\beta > 1$) et un tachyon se déplaçant dans la direction commune X_1 avec la vitesse $v_1 > c$ par rapport à (1) et $v_2 > c$ par rapport à (2). L'énergie et l'impulsion de ce tachyon par rapport à (1) et (2) sont respectivement

$$\tilde{E}_1 = \frac{\mu c^2}{\sqrt{\frac{v_1^2}{c^2} - 1}}; \; \tilde{p}_1 = \frac{\mu v_1}{\sqrt{\frac{v_1^2}{c^2} - 1}}; \; \tilde{E}_2 = \frac{\mu c^2}{\sqrt{\frac{v_2^2}{c^2} - 1}}; \; \tilde{p}_2 = \frac{\mu v_2}{\sqrt{\frac{v_2^2}{c^2} - 1}} \tag{100}$$

En utilisant la formule de composition des vitesses (voir Appendice 1), il est possible par un calcul classique d'obtenir $\tilde{p}_2$ en fonction de $\tilde{E}_1$, $\tilde{p}_1$ et v (c'est-à-dire β) et $\tilde{E}_2$ en fonction de $\tilde{E}_1$, $\tilde{p}_1$ et v (ou β). On suppose ensuite que le tachyon considéré tend à être un photon de vitesse $v_1 = c$, d'énergie $h\tilde{\nu}_1$ et de moment $\frac{h\nu_1}{c}$

$$\left(v_1 = c, \tilde{E}_1 = h\tilde{\nu}_1, \mid \tilde{p}_1 \mid = \frac{h\tilde{\nu}_1}{c}\right) \tag{101}$$

par rapport à (1) et d'énergie et de moment $\tilde{E}_2 = \frac{h\tilde{\nu}_2}{c}$, $\tilde{p}_2 = h\tilde{\nu}_2$ par rapport à (2)

$$\left(v_2 = c, \tilde{E}_2 = h\tilde{\nu}_2, \mid \tilde{p}_2 \mid = \frac{h\tilde{\nu}_2}{c}\right) \tag{102}$$

Dans ces conditions on obtient comme formule d'effet Doppler transceique

$$\frac{\tilde{\nu}_2}{\tilde{\nu}_1} = \sqrt{\frac{\beta - 1}{\beta + 1}}; \; \beta > 1 \tag{103}$$

qui correspond à la formule subceique

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}; \; \beta < 1 \tag{104}$$

Pour le cas limite $\beta = 1$ commune aux deux effets Doppler subceique et transceique, on obtient

$$\tilde{\nu}_2 = 0 \tag{105}$$

ce qui est normal, puisque les propriétés des luxons, et des photons en particulier doivent être les mêmes par rapport à un référentiel ORF et par rapport à un référentiel tachyonique.

Pour $\beta \gg 1$ ou $v \gg c$ on obtient

$$\tilde{\nu}_2 = \tilde{\nu}_1 \tag{106}$$

On remarquera dans ce cas la symétrie existant avec les référentiels ORF : dans l'effet Doppler subceique pour $\beta \ll 1$ ou $v \ll c$ la formule (104) donne

$$\nu_2 = \nu_1 \tag{107}$$

ce qui correspond aussi à la transformation identique dans le groupe de Lorentz.

Dans l'effet Doppler transceique, le « redshift » est obtenu quand la vitesse relative varie de $v \gg c$ à c et cet effet est d'autant plus grand que la vitesse décroit et est proche de c.

Sur la figure (1) l'effet Doppler transceique est représenté pour des vitesses variant de $v \ll -c$ à $v = -c$ et de $v \gg +c$ à $v = +c$ et l'effet Doppler subceique pour des valeurs de la vitesse variant de $v \gg -c$ à $-c$ et de $v \ll +c$ à $+c$.

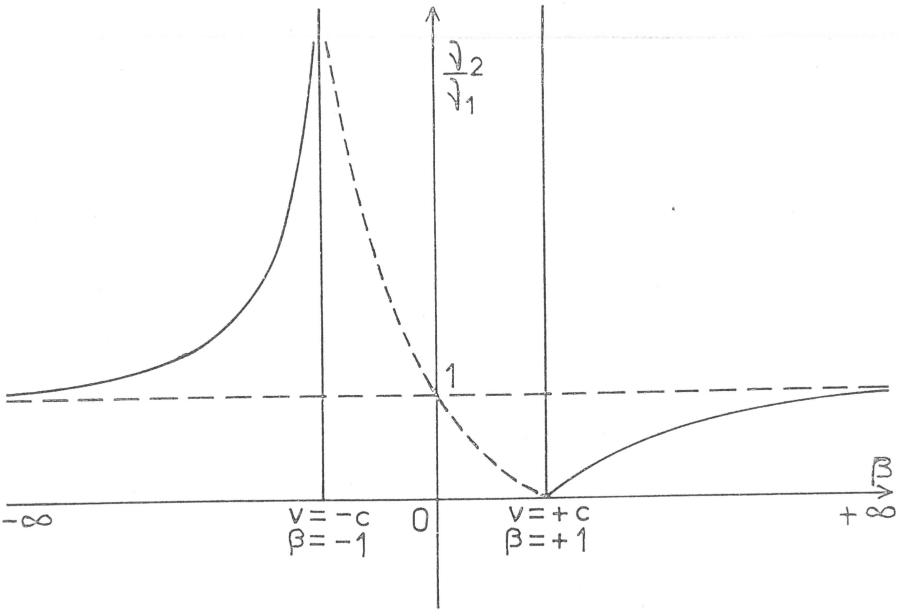

Fig. 1. — Diagramme schématique des effets Doppler sous-lumineux et super-lumineux.

a) L'intervalle $(-c, 0, c)$ représente des vitesses relatives sous-lumineuses entre des systèmes de repère ORF.

b) Les intervalles $(-\infty, -c)$ et $(+\infty, +c)$ représentent des vitesses relatives super-lumineuses entre des systèmes de repère tachyoniques.

2. *Effet Doppler transceique mesuré par rapport à un système ORF.*

Soit un référentiel tachyonique $\widetilde{R}_1$ ayant une vitesse mesurée $\bar{v}_1 > c$, soit $\bar{\beta}_1 > 1$ par rapport au référentiel (ORF) R_1, les axes X_1 et x_1 étant parallèles à la direction de la vitesse. Considérons dans $\widetilde{E}_4$ un tachyon dont le quadrivecteur d'impulsion-énergie a comme composantes par rapport à $\widetilde{R}_1$

$$P^{\mu}_{(1)} \tag{108}$$

Supposons que ce tachyon se déplace parallèlement à X_1

$$P^2_{(1)} = P^3_{(1)} = 0 \tag{109}$$

Dans ces conditions

$$(P^1_{(1)})^2 - (P^4_{(1)})^2 = \mu^2 c^2 \tag{110}$$

Par rapport à R_1 ce quadrivecteur a comme *composantes mesurées*

$$\bar{p}^{\mu}_{(1)} \tag{111}$$

soit $\bar{p}^1_{(1)},\ \bar{p}^4_{(1)},\ \bar{p}^2_{(1)} = \bar{p}^3_{(1)} = 0$ (112)

avec $\quad (\bar{p}^1_{(1)})^2 - (\bar{p}^4_{(1)})^2 = \bar{\mu}^2 c^2 = \mu^2 c^2 \qquad (113)$

$\bar{\mu}$ pouvant être déterminé expérimentalement puisque pour $\bar{v} \gg c$

$$\bar{p} \sim \bar{\mu} c \qquad (114)$$

D'autre part μ étant un scalaire invariant $\bar{\mu} = \mu \qquad (115)$

Dans ces conditions on peut écrire

$$(\bar{p}^1_{(1)})^2 - (\bar{p}^4_{(1)})^2 = (\mathrm{P}^1_{(1)})^2 - (\mathrm{P}^4_{(1)})^2 \qquad (116)$$

$\bar{p}^1_{(1)}$, $\bar{p}^4_{(1)}$, $\bar{\mu}$, $\bar{\beta}$, étant déterminés expérimentalement, la solution convenant au problème et tenant compte de la vitesse $\bar{\beta}_1$ est

$$\bar{p}^1_{(1)} = \frac{\pm \mathrm{P}^4_{(1)} + \bar{\beta}_1 \mathrm{P}^1_{(1)}}{\sqrt{\bar{\beta}_1^2 - 1}}; \quad \bar{p}^4_{(1)} = \frac{\pm \mathrm{P}^1_{(1)} + \bar{\beta}_1 \mathrm{P}^4_{(1)}}{\sqrt{\bar{\beta}_1^2 - 1}} \qquad (118)$$

Cette relation n'est pas une transformation de Lorentz, car $\bar{\beta}_1$ est une *vitesse mesurée* et *n'est pas une vitesse relative* : il s'agit donc d'une pseudo-transformation de Lorentz, non réversible et ayant la valeur d'une simple relation algébrique. On a choisi le signe — dans (118).

Si dans $\tilde{\mathrm{E}}_4$, $\mathrm{P}^\mu_{(1)}$ est l'impulsion-énergie d'un photon ayant la fréquence $\tilde{\nu}_0$ par rapport à $\tilde{\mathrm{R}}_1$, nous avons

$$\mathrm{P}^4_{(1)} = \mathrm{P}^1_{(1)} = \frac{h\tilde{\nu}_0}{c} \qquad (119)$$

et par rapport à R_1, *les composantes mesurées* de l'impulsion-énergie sont

$$\bar{p}^4_{(1)} = \bar{p}^1_{(1)} = \frac{h\bar{\nu}_1}{c} \qquad (120)$$

où $\bar{\nu}_1$ est la fréquence mesurée du photon par rapport à R_1.

En remplaçant dans l'équation (118), $\mathrm{P}^\mu_{(1)}$ et $\bar{p}^\mu_{(1)}$ par les valeurs (119) et (120) nous obtenons

$$\bar{\nu}_1 = \tilde{\nu}_0 \sqrt{\frac{\bar{\beta}_1 - 1}{\bar{\beta}_1 + 1}} \qquad (121)$$

A partir de cette expression, si l'on mesure $\bar{\nu}_1$, par exemple à partir de la Terre, considérée comme un système ORF quasi inertiel, et si on avait une possibilité de connaître $\tilde{\nu}_0$, on pourrait donc déduire $\bar{\beta}_1 > 1$ qui serait complètement opposé au cas similaire, mais dans la matière bradyonique, *où* l'on obtient toujours $\beta_1 < 1$.

Le problème est donc de connaître $\tilde{\nu}_0$ à la source, supposée être un objet astrophysique en matière tachyonique.

On pourrait supposer l'existence hypothétique d'un « atome d'Hydrogène tachyonique », faire donc la théorie de cet atome, et pouvoir ainsi prédire théoriquement la fréquence d'émission $\tilde{\nu}_0$. Ce problème sera analysé dans une étape ultérieure de cette recherche.

Évidemment cette analyse présuppose une expérience cruciale en relation au problème du déplacement vers le rouge, mais que dans le cadre de cette théorie, au lieu de donner une vitesse d'éloignement plus petite que c, il devrait en résulter une vitesse d'éloignement plus grande que c.

VI. APPLICATION : MÉCANIQUE QUANTIQUE ET THÉORIE QUANTIQUE D'UN CHAMP DE TACHYONS

Nous avons établi la relation fondamentale

$$\tilde{\mathrm{E}}^2 - \tilde{p}^2 c^2 = -\mu^2 c^4 \quad . \tag{122}$$

En vertu du principe de covariance générale, remplaçons dans cette relation $\tilde{\mathrm{E}}$ et $\tilde{p}$ par les opérateurs quantiques

$$\tilde{\mathrm{E}} = \tilde{\mathrm{H}} \to i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathrm{T}}; \ \tilde{p} \to -i\hbar\nabla; \ \nabla\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{X}}, \frac{\partial}{\partial \mathrm{Y}}, \frac{\partial}{\partial \mathrm{Z}}\right) \tag{123}$$

(X, Y, Z, T) étant un système de coordonnées tachyoniques inhérentes.

$$\tilde{\mathrm{E}}^2 = \tilde{\mathrm{H}}^2 = \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathrm{T}}\right)^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{T}^2}; \ \tilde{p}^2 = (-i\hbar\nabla)^2 = -\hbar^2\nabla^2 = -\hbar^2\Delta \tag{124}$$

Nous pouvons alors écrire une équation de Klein-Gordon transceique décrivant les tachyons de spin 0, c'est-à-dire des bosons tachyoniques

$$\left[-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{T}^2} + c^2\hbar^2\Delta\right]\tilde{\psi} = -\mu^2 c^4 \tilde{\psi} \ \text{ou} \ \left[\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{T}^2}\right]\tilde{\psi} = \frac{-\mu^2 c^2}{\hbar^2}\psi \tag{125}$$

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{T}^2} + \frac{\mu^2 c^2}{\hbar^2}\right]\tilde{\psi} = 0 \ \text{ou} \ [\Box + \chi^2]\,\tilde{\psi}\,(\mathrm{X}_\mu) = 0 \tag{126}$$

$$\mu = 1, 2, 3, 4; \ \mathrm{X}_4 = ic\mathrm{T}; \ \chi^2 = \frac{\mu^2 c^2}{\hbar^2}$$

L'équation K.G. pour les bradyons de spin 0 s'écrit

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\psi = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi \ \text{ou} \ \left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\psi = -\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi \tag{127}$$

Dans le premier membre de (127) on retrouve la signature de E_4 $(+ - - -)$ alors que dans le premier membre de l'équation K.G. transceique

$$\left[-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{T}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{X}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{Y}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{Z}^2}\right]\tilde{\psi} = -\frac{\mu^2c^2}{\hbar^2}\tilde{\psi}$$

on retrouve la signature $(- + + +)$ de $\tilde{\mathrm{E}}_4$.

On vérifie immédiatement que cette équation est invariante par la transformation superlumineuse.

D'une manière générale, remarquons que l'équation $\Box\psi = \mathrm{K}\psi$, K étant un scalaire positif, négatif ou nul, peut être considérée d'un point de vue strictement mathématique, comme invariante par la transformation superlumineuse, quel que soit K. Une telle équation peut être désignée sous le terme d'équation de Klein-

Gordon généralisée. En particulier pour $K = m^2c^2/\hbar^2$ nous avons la forme usuelle de l'équation K.G. bradyonique (ou subceique) qui, du point de vue mathématique, est réellement invariante par la TTCL (Transformation transceique de Lorentz), mais ceci a comme conséquence physique

$$\tilde{E}^2 - \tilde{p}^2c^2 = -\mu^2c^4 < 0 \tag{128}$$

ce qui implique $K < 0$, comme c'est le cas pour l'équation K.G. transceique décrivant des particules de masses « propres » réelles et non imaginaires, comme cela se produit si l'on fait $K > 0$.

L'équation K.G. transceique physiquement acceptable pour les tachyons de spin 0 est donc $\square \tilde{\psi} = -\mu^2c^2/\hbar^2\tilde{\psi}$ et l'équation K.G. avec $K > 0$ n'est pas acceptable pour des tachyons, car elle donnerait des masses « propres » imaginaires.

L'équation K.G. généralisée $\square \psi = K\psi$ est aussi invariante par la TSCL (Transformation subceique de Lorentz), quel que soit K. En particulier l'équation K.G. transceique ($K = -\mu^2c^2/\hbar^2$) est invariante par la TSCL, mais ceci entraîne comme conséquence physique

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4 > 0, \text{ soit } K > 0 \tag{129}$$

et l'équation décrivant des bradyons de masses « propres » réelles et non imaginaires et de spin 0 est $\square \psi = m^2c^2/\hbar^2\psi$: c'est l'équation K.G. usuelle. Enfin pour $K = 0$ nous avons

$$\square \psi = 0 \text{ ou } \left[\Delta - \left(\frac{1}{c^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\psi = 0 \tag{130}$$

C'est l'équation décrivant la propagation de luxons de spin zéro.

En définitive nous avons

Équation K.G.S.C.	$\square \psi = [m^2c^2/\hbar^2]\,\psi$	Bradyons
Équation K.G.T.C.	$\square \tilde{\psi} = [-\mu^2c^2/\hbar^2]\,\tilde{\psi}$	Tachyons
Équation c	$\square \psi = 0$	luxons de spin zéro

Du reste en partant de l'équation K.G. sub ou transceique et en accord avec le résultat précédent, nous aboutissons à une équation unique écrite sous forme tensorielle en coordonnées curvilignes y^μ dans l'espace affine (voir Appendice 2 pour l'établissement de cette équation).

$$g^{\mu\nu}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial y^\mu \partial y^\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{\partial\psi}{\partial y\alpha}\right] = -\chi^2\psi(y^\mu) \tag{131}$$

$\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ étant les symboles de Christoffel de première espèce, $g^{\mu\nu}$ et $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ étant fonctions des $y^\mu(\mu, \nu, \alpha = 1, 2, 3, 4)$.

En prenant les tenseurs métriques $(g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu})$ avec $g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1$; $g^{44} = +1$ ou $(g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu})$ avec $g^{11} = g^{22} = g^{33} = 1$; $g^{44} = -1$ et respectivement les coordonnées inhérentes bradyoniques et tachyoniques, on obtient les équations K.G. sub et transceique et pour $\chi = 0$ l'équation des luxons de spin zéro.

Comme pour l'équation de la Dynamique, il existe donc une supercovariance « affine », c'est-à-dire qu'une même équation considérée comme relation à connexions affines peut représenter bradyons ou tachyons suivant le choix du tenseur métrique et des coordonnées inhérentes.

Remarquons que $\bar{\mu} = \mu$ pouvant être atteint expérimentalement pour $\beta \gg 1$, on peut écrire une équation K.G. transceique en coordonnées mesurées $\bar{x}_\mu$ à partir d'un référentiel ORF

$$[\overline{\Box} + \overline{\chi}^2]\,\overline{\psi}(\bar{x}_\mu) = 0 \tag{132}$$

On peut établir les éléments d'une Mécanique ondulatoire des tachyons de spin 0 : considérons en effet l'onde plane

$$\tilde{\psi} = \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\tilde{\mathrm{E}}\mathrm{T} - \sum_i^3 \tilde{p}_i \mathrm{X}_i)\right] \tag{133}$$

$$(\mathrm{X}_1 = \mathrm{X};\ \mathrm{X}_2 = \mathrm{Y};\ \mathrm{X}_3 = \mathrm{Z})$$

En différenciant cette expression nous avons

$$\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial \mathrm{T}} = \tilde{\mathrm{E}}\,\frac{i}{\hbar}\,\tilde{\psi};\quad \frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial \mathrm{T}^2} = -\frac{\tilde{\mathrm{E}}^2}{\hbar^2}\,\tilde{\psi} \tag{134}$$

d'oū l'on tire

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial \mathrm{T}^2} = \frac{\tilde{\mathrm{E}}^2}{c^2\hbar^2}\,\tilde{\psi} \tag{135}$$

Alors nous avons successivement

$$\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial \mathrm{X}} = -i\,\frac{p_x}{\hbar}\,\tilde{\psi};\quad \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial \mathrm{Y}} = -i\,\frac{\tilde{p}_\mathrm{Y}}{\hbar}\,\tilde{\psi};\quad \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial \mathrm{Z}} = -i\,\frac{\tilde{p}_\mathrm{Z}}{\hbar}\,\tilde{\psi} \tag{136}$$

$$\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial \mathrm{X}^2} = -\frac{\tilde{p}_x^2}{\hbar^2}\,\tilde{\psi};\quad \frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial \mathrm{Y}^2} = -\frac{\tilde{p}_\mathrm{Y}^2}{\hbar^2}\,\tilde{\psi};\quad \frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial \mathrm{Z}^2} = -\frac{\tilde{p}_\mathrm{Z}^2}{\hbar^2}\,\tilde{\psi}$$

expressions à partir desquelles nous obtenons

$$\Delta\tilde{\psi} = \frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial \mathrm{X}^2} + \frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial \mathrm{Y}^2} + \frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial \mathrm{Z}^2} = -\frac{\tilde{p}_\mathrm{X}^2 + \tilde{p}_\mathrm{Y}^2 + \tilde{p}_\mathrm{Z}^2}{\hbar^2}\,\tilde{\psi} = -\frac{\nabla^2}{\hbar^2}\,\tilde{\psi} = -\frac{\tilde{p}^2}{\hbar^2}\,\tilde{\psi} \tag{137}$$

Donc

$$\Delta\tilde{\psi} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial \mathrm{T}^2}\left[\frac{\tilde{\mathrm{E}}^2}{c^2\hbar^2} - \frac{\tilde{p}^2}{\hbar^2}\right]\tilde{\psi} = \frac{\tilde{\mathrm{E}}^2 - \tilde{p}^2c^2}{c^2\hbar^2}\,\tilde{\psi} \tag{138}$$

Comme $\tilde{\mathrm{E}}^2 - \tilde{p}^2c^2 = -\mu^2c^4$, nous avons

$$\Delta\tilde{\psi} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial \mathrm{T}^2} = \frac{-\mu^2c^4}{\hbar^2c^2}\,\tilde{\psi} = -\frac{\mu^2c^2}{\hbar^2}\,\tilde{\psi} \tag{139}$$

L'équation K.G. transceique admet donc la solution en onde plane

$$\tilde{\psi} = \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\tilde{\mathrm{E}}\mathrm{T} - \sum_i^3 \tilde{p}_i \mathrm{X}_i)\right] \tag{140}$$

Dans ces conditions considérons l'onde plane monochromatique

$$\tilde{\psi} = \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\tilde{E}T - \tilde{p}_x X)\right] \tag{141}$$

décrivant une propagation le long de l'axe des X : à partir de cette solution nous pouvons établir la fréquence et la longueur de l'onde associée à un tachyon. En effet

$$\tilde{\psi} = \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\tilde{E}T - \tilde{p}_x X)\right] = \exp\left[\frac{2\pi i}{h}(\tilde{E}T - \tilde{p}_x X)\right] \tag{142}$$

$$= \exp\left[2\pi i\left(\frac{\tilde{E}T}{h} - \frac{\tilde{p}_x}{h}X\right)\right] .$$

Pour trouver la fréquence et la longueur de l'onde associée à un tachyon, il suffit d'identifier les deux expressions

$$\tilde{\psi} = \exp\left[2\pi i\left(\frac{\tilde{E}}{h}T - \frac{\tilde{p}_x}{h}X\right)\right] = \exp\left[2\pi i\left(\tilde{\nu}T - \frac{X}{\tilde{\lambda}}\right)\right] \tag{143}$$

Pour la fréquence nous trouvons

$$\tilde{\nu} = \frac{\tilde{E}}{h} = \frac{\mu c^2}{h\sqrt{\beta^2 - 1}} \tag{144}$$

Si par rapport à un référentiel tachyonique, un tachyon se déplace avec la vitesse relative $\beta > 1$, la fréquence de l'onde associée au tachyon est par rapport au référentiel tachyonique

$$\tilde{\nu} = \frac{\mu c^2}{h\sqrt{\beta^2 - 1}} = \frac{\tilde{E}}{h} \tag{145}$$

La relation fondamentale de la Mécanique ondulatoire des bradyons $E = h\nu$ est donc vraie pour les tachyons

$$\tilde{E} = h\tilde{\nu} \tag{146}$$

Pour $\beta \gg 1$, nous avons $\tilde{\nu} \sim 0$ et pour un photon $E = h\nu$.
La longueur de l'onde associée à un tachyon est donnée par

$$\frac{\tilde{p}X}{h} = \frac{1}{\tilde{\lambda}}; \text{ donc } \tilde{\lambda} = \frac{h}{\tilde{p}_x} \tag{147}$$

La seconde relation fondamentale de la Mécanique ondulatoire des bradyons est donc conservée. Si $\beta \gg 1$, $\tilde{\lambda} \sim h/\mu c$.

Dans le cas des bradyons, par rapport à un référentiel ORF, si $\beta \ll 1$, $\lambda \to \infty$ et $\nu \sim mc^2/h$. Enfin pour les photons (luxons) les formules donnent effectivement

$$E = h\nu; \ \lambda = h/p \tag{148}$$

La démonstration est générale : si une onde se propage dans une direction quelconque

$$\tilde{\psi} = \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\tilde{E}T - \tilde{\vec{p}}\tilde{\vec{r}})\right] \text{ ou } \tilde{\psi} = \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\tilde{E}T - \tilde{p}_x X - \tilde{p}_y Y - \tilde{p}_z Z)\right] \tag{149}$$

$$\tilde{E} = h\tilde{\nu}; \ \tilde{\lambda} = \frac{h}{|\tilde{\vec{p}}|} \tag{150}$$

Calculons maintenant la vitesse de phase $\tilde{u}$. Nous avons

$$\tilde{\lambda}\tilde{\nu} = \tilde{u} \tag{151}$$

Or

$$\tilde{\nu} = \frac{\tilde{E}}{h} = \frac{(\mu c/h)c}{\sqrt{\beta^2 - 1}}; \quad \frac{1}{\tilde{\lambda}} = \frac{\tilde{p}}{h} = \frac{(\mu c/h)\beta}{\sqrt{\beta^2 - 1}}; \quad \tilde{\lambda} = \frac{\sqrt{\beta^2 - 1}}{(\mu c/h)\beta} \tag{152}$$

Donc

$$\tilde{u} = \tilde{\lambda}\tilde{\nu} = \frac{c}{\beta} = \frac{c^2}{v}; \quad \tilde{u} = \frac{c^2}{v} \tag{153}$$

La vitesse de phase de l'onde associée à un tachyon est donc donnée par la même expression que celle donnant la vitesse de phase de l'onde associée à un bradyon.

Pour un bradyon $\beta < 1$ et $u = c/\beta$ est toujours plus grand que c.

Pour un tachyon $\beta > 1$ et $u = c/\beta$ est toujours plus petit que c.

Quand $\beta \gg 1$, $u \sim 0$ pour un tachyon.

Quand $\beta \ll 1$, $u \to \infty$ pour un bradyon.

Calculons maintenant la vitesse de groupe $\tilde{w}$: écrivons

$$\tilde{\nu} = \frac{\mu c^2}{h\sqrt{\beta^2 - 1}} = \frac{k}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \tag{154}$$

Nous avons

$$\tilde{w} = \frac{d\tilde{\nu}}{d(\tilde{\nu}/\mu)}$$

$$\tilde{\nu} = k(\beta^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}; \quad d\tilde{\nu} = -k\beta(\beta^2 - 1)^{-\frac{3}{2}}\, d\beta \tag{155}$$

$$\tilde{u} = \frac{c^2}{v} = \frac{c^2}{\beta c} = \frac{c}{\beta}$$

$$\frac{\tilde{\nu}}{\tilde{u}} = \frac{k}{\sqrt{\beta^2 - 1}}\,\frac{1}{\tilde{u}} = k\frac{\beta}{c}(\beta^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$d\left(\frac{\tilde{\nu}}{\tilde{u}}\right) = \frac{k}{c}\,d\beta\,(\beta^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} - \frac{k}{c}\,\beta^2 d\beta(\beta^2 - 1)^{-\frac{2}{3}}$$

$$d\left(\frac{\tilde{\nu}}{\tilde{u}}\right) = \frac{k}{c}\,d\beta\,\frac{1}{(\beta^2 - 1)^{1/2}} - \frac{k}{c}\,\beta^2 d\beta\,\frac{1}{(\beta^2 - 1)^{3/2}}$$

$$d\left(\frac{\tilde{\nu}}{\tilde{u}}\right) = \frac{k}{c}\,d\beta\,\frac{-1}{(\beta^2 - 1)^{3/2}} = -\frac{k}{c}\,d\beta\,(\beta^2 - 1)^{-\frac{3}{2}} \tag{156}$$

Des relations (155) et (156) nous tirons

$$\tilde{w} = \frac{d\tilde{\nu}}{d(\tilde{\nu}/\tilde{u})} = \beta c = v > c \tag{157}$$

Comme pour les bradyons, la vitesse de groupe est égale à la vitesse de la particule, mais pour les tachyons cette vitesse de groupe est toujours plus grande que c.

Il est clair que l'on peut également obtenir une équation de Dirac correspondant aux tachyons de spin 1/2. Enfin on peut développer d'une façon symétrique une théorie quantique des champs tachyoniques : par exemple dans l'équation K.G. transceique

$$\Box \widetilde{\Phi} = -\mu^2 c^2/\hbar^2 . \widetilde{\Phi} \tag{158}$$

on considérera $\widetilde{\Phi}$ comme un opérateur décrivant un *collectif entier*, un champ de tachyons, chacun ayant une masse propre μ et un spin 0. $\widetilde{\Phi}$ étant un opérateur complexe de la forme

$$\widetilde{\Phi} = \widetilde{\Phi}_1 + i\widetilde{\Phi}_2 \tag{159}$$

on aura un champ à deux degrés de liberté intrinsèque associés aux deux degrés de liberté liés à la charge électrique d'un tachyon chargé. On aura donc une théorie décrivant des tachyons « scalaires » de charge positive et négative : $\widetilde{\Phi}^*$ sera opérateur de création et $\widetilde{\Phi}$ opérateur d'annihilation. On pourra donc faire la théorie d'un champ matériel « tachyonique » d'opérateur $\widetilde{\Phi}$, ce champ étant un champ tachyon-antitachyon.

APPENDICE 1

Soit trois référentiels tachyoniques 1, 2, 3 tels que les vitesses relatives v_{21} et v_{32} soient parallèles : on obtient la valeur de la vitesse v_{31}, manifestement parallèle aux deux précédentes en composant les cotangentes.

Soit $\cot \Phi = i\beta = i\dfrac{v}{c}$; $\cot \Phi' = i\beta' = i\dfrac{v'}{c}$; $\cot \Phi'' = i\dfrac{v''}{c}$

$$v = v_{21}; \; v' = v_{32}; \; v'' = v_{31}$$

$$\Phi'' = \Phi + \Phi'$$

$$\cot \Phi'' = \cot(\Phi + \Phi') = \frac{\cot \Phi \cot \Phi' - 1}{\cot \Phi + \cot \Phi'}$$

$$\cot \Phi'' = i\beta'' = \frac{-\beta\beta' - 1}{i\beta + i\beta'}; \; \beta'' = \frac{\beta\beta' + 1}{\beta + \beta'}; \; \frac{v''}{c} = \frac{\beta\dfrac{v'}{c} + 1}{\beta + \beta'}$$

D'où $$v'' = \frac{c + \beta v'}{\beta' + \beta} = \frac{c + \beta v'}{\dfrac{v'}{c} + \beta}$$

En composant deux vitesses qui sont égales ou plus grandes que c il est facile de montrer qu'il est impossible d'obtenir une vitesse plus petite que c. Par exemple si $v' = c$, on trouve

$$v'' = c$$

Si $v' \gg c$, on trouve aisément

$$v'' = v$$

ce qui est lié à l'obtention de la transformation identité pour $v > c$.

Les équations K.G. subceique et transceique s'écrivent respectivement

$$\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right]\psi = -\chi^2\psi;\ \chi^2 = m^2c^2/\hbar^2$$

$$\left[\widetilde{\Delta} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{T}^2}\right]\psi = -\widetilde{\chi}^2\psi;\ \widetilde{\chi}^2 = \mu^2c^2/\hbar^2$$

Dans l'espace affine ξ_4 en considérant les coordonnées curvilignes (y^μ) par rapport à un repère naturel, ces deux équations sont remplacées par l'équation unique

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^\mu dy^\nu} = -\mathrm{K}\psi$$

$$\mu,\ \nu = 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

$g^{\mu\nu}$ étant le tenseur métrique qui dans les référentiels spécifiques et les coordonnées inhérentes spécifiques sera respectivement

$$(g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu})$$

soit $g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1;\ g^{44} = +1;$ soit $g^{11} = g^{22} = g^{33} = 1;\ g^{44} = -1$

K ayant les valeurs respectives χ^2 ou $\widetilde{\chi}^2$.

ψ étant un scalaire, sa dérivée ordinaire est un vecteur covariant

$$\psi_{\mu,} = \frac{\partial\psi}{\partial y^\mu}$$

Donc

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^\mu \partial y^\nu} = \frac{\partial\psi_{\mu,}}{\partial y^\nu}$$

et

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^\mu \partial y^\nu} = g^{\mu\nu}\psi_{\mu,\nu} = -\mathrm{K}\psi$$

D'après la définition même de la dérivée covariante d'un vecteur ψ_μ, nous avons

$$\psi_{\mu,\nu} = \frac{\partial\psi_\mu}{\partial y_\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{\partial\psi}{\partial y^\alpha} = \frac{\partial^2\psi}{\partial y^\mu \partial y^\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{\partial\psi}{\partial y^\alpha}$$

$$(\mu,\ \nu,\ \alpha = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

$\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ étant le symbole de Christoffel.

Dans ces conditions l'équation de Klein-Gordon généralisée, considérée comme relation à connexions affine dans l'espace affine ξ_4 représentera à la fois les phénomènes bradyoniques et tachyoniques et s'écrira

$$g^{\mu\nu}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial y^\mu \partial y^\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{\partial\psi}{\partial y^\alpha}\right] = -\mathrm{K}\psi(y^\mu)$$

Le problème de la macrocausalité
dans la variété d'univers transceique

Nous voulons montrer que cette variété d'univers obeit au Principe de Macrocausalité. Afin de le démontrer nous allons nous appuyer sur le Théorème de Zeeman [13], qui établit une relation directe avec le Principe de causalité et le groupe de Lorentz : d'une manière plus précise le Théorème de Zeeman démontre que la causalité implique le groupe de Lorentz et réciproquement. Désignons par x un point de l'espace-temps, M, dans l'espace de Minkowski, c'est-à-dire un point faisant partie de l'ensemble des points tels que

$$-\infty < x^{\mu} < +\infty$$

$x^0 = t$ est la coordonnée temporelle. Définissons une relation d'ordre

$$« < »$$

entre deux points de l'espace-temps

$$x < y$$

par les conditions

$$x^0 < y^0 \tag{1}$$

$$(y - x)^2 > 0 \tag{2}$$

où $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(+, -, -, -)$.

Il est facile de montrer la transitivité de la relation d'ordre. La relation (2) montre que $(y - x)$ est un intervalle du genre temps, alors que la relation (1) établit qu'un évènement décrit par x se produit dans le temps avant celui décrit par y. Physiquement un évènement tel que x peut exercer une influence sur un évènement postérieur y : x et y sont (ou peuvent être) « reliés causalement ». Considérons la classe de toutes les applications F qui produisent

$$\mathrm{M} \rightarrow \mathrm{M},$$

qui possèdent un inverse unique F^{-1} et qui satisfont à

$$\mathrm{F} : \mathrm{M} \rightarrow \mathrm{M} \tag{3}$$

$$x < y \leftrightarrow \mathrm{F}x < \mathrm{F}y \tag{4}$$

quels que soient x, y, εM.

Ces applications peuvent être désignées comme les automorphismes causaux de M. Physiquement, cette classe d'applications conserve l'ordre *temporel*, ou ce qui est l'équivalent l'ordre *causal* des évènements dans l'espace de Minkowski. Le résultat précis démontré par Zeeman est que l'ensemble des automorphismes causaux forme un groupe engendré par le groupe orthochrone de Lorentz (comprenant l'inversion de parité, mais excluant l'inversion temporelle), par les translations de temps et d'espace, et par les dilatations.

Ce résultat est remarquable, car ni la continuité, ni la linéarité ne sont supposées réalisées pour les transformations F de M $\rightarrow$ M, alors que le résultat final montre que les transformations F sont *linéaires* et *continues*.

Il est clair que le Théorème de Zeeman peut s'appliquer à $\tilde{E}_4$, puisque le groupe de Lorentz superceique est orthochrone. La condition

$$X < Y$$

s'écrivant alors

$$X^0 < Y^0 \tag{5}$$

$$(Y - X)^2 > 0 \tag{6}$$

où $G_{\mu\nu} = \text{diag}\,(-, +, +, +)$

où la relation (6) exprime que $(Y - X)$ est un intervalle du genre espace. Le Principe de macrocausalité est donc valable dans $\tilde{E}_4$.

REMERCIEMENTS

Les auteurs expriment leur reconnaissance au Professeur J. C. PECKER, du Collège de France, pour son appui, pour l'intérêt qu'il a manifesté à la lecture de ce manuscrit et pour ses suggestions et ses critiques constructives concernant les applications de cette théorie en Astrophysique; ainsi qu'au Professeur Olivier COSTA DE BEAUREGARD, de l'Institut H. Poincaré, pour ses encouragements et les fructueux échanges d'idées qu'ils ont eus avec lui.

SUMMARY

Based on the 0_4^+ group of rotations in complex planes, a purely mathematical group, three groups of physical transformations can be derived : the subluminal Lorentz group corresponding to braydons and implying time-like world lines, or its equivalent, a pseudo-Euclidean metric with signature $+ - - -$; the superluminal Lorentz group, an « open » mathematical possibility for tachyons, implying space-like world lines, or the equivalent, a pseudo-Euclidean metric with signature $- + + +$; the « luxonic » Lorentz group corresponding to referential frames of which the quantity of movement is infinite (IMF or Infinite Momentum Frame) and to the coordinates of the light cone, the metric also being specific and the IMF referential frames corresponding to luxons.

The superluminal Lorentz group comprises « symetrical » superluminal transformations of transformations of the subluminal Lorentz group : these superluminal transformations raise the physical problem of the potential theoretical extension of inertial referential frames, consisting of « tachyonic matter », whose relative velocities are always greater than that of light, these tachyonic referential frames having inherent coordinates in which the metric is expressed. In these referential frames, proper time assumes an unorthodox structure, while maintaining the same definition. The concept of « tachyonic matter » is also defined. It is then possible to develop the relativistic theory of this superluminal world variety and in particular to reobtain in deductive form, starting from the equations of the tachyonic dynamics, the « heuristic » results obtained by Feinberg and Sudarshan concerning the components of the energy-momentum four-vector, without introducing an imaginary mass.

The Einstein generalized principe of covariance is extended to the inertial tachyonic referential frames here introduced : as a consequence the equations of physics related to bradyons or to tachyons written in tensorial form may present the same form. It is then possible to consider those equations as affine connections in a general affine space where a kind of « supercovariance » may exist.

The authors propose an expression for a superluminal Doppler effect that might be verified experimentally in astrophysics performing measurements from the earth, if « tachyonic objects » were discovered.

As an application the authors show that it is possible to write in a very simple form a superluminal Klein-Gordon equation, to develop the quantum theory of a tachyonic field of spin zero and to introduce the concept of antitachyon.

The hitherto negative results of experiments designed to confirm the presence of tachyons may be explained by this « relativistic symmetry » masked by a *de facto* dissymmetry, as has occurred for the positron and the antiparticules.

RÉFÉRENCES

[1] A. Einstein, H. A. Lorentz, H. Minkowski and H. Weyl. The Principle of Relativity. Dover Publications Inc., p. 80, 81, in *Space and Time*, by H. Minkowski, p. 75-91.

[2] J. Kogut and L. Susskind. Physics Reports. *Phys. Lett. C*, 8, 75 (1973).

[3] Whitney, A. R., Shapiro, I. I., Rogers, A. E. E., Robertson, D. S., Knight, C. A., Clark, T. A., Goldstein, R. M., Marandino, G. E. and Vandenburg, N. R. *Science*, **173**, 225 (1971).

[4] Gregory, C. *Nature Physical Science*, **239**, 56 (1972).

[5] Rachman, A. and Dutheil, R. *Lett Nuovo Cimento*, **8**, 611 (1973).

[6] Rachman, A. and Dutheil, R. *Lett Nuovo Cimento*, **8**, 893 (1973).

[7] Everett, Allen, E. *Phys. Review D*, **13**, 785 (1976).

[8] Everett, Allen, E. *Phys. Review D*, **13**, 795 (1976).

[9] Lichnerowicz, A. *Éléments de Calcul Tensoriel*, p. 175, 176, 177. Armand Colin, Paris (1964).

[10] Costa de Beauregard, O. *Précis de Relativité Restreinte*, p. 27, 28. Monographies Dunod, Paris (1964).

[11] G. Feinberg, *Physical Review*, **159**, 1089 (1967).

[12] O. M. P. Bilaniuk, V. K. Deshpande and E. C. G. Sudarshan, *American Journal of Physics*, **30**, 718 (1962).

[13] Zeeman, E. C. *Journ. of Math. Phys.*, **5**, 490 (1964).