UNE REMARQUE SUR LA FORMULE DU CHANGEMENT DE VARIABLES DANS $\mathbb{R}^n$

Ho Van Thi Si

Abstract

The aim of this paper is to give a remit which generalizes the usual change of variables formula in euclidean spaces.

Mathematics Subject Classification: Primary: 26B10.
Key words: Lebesgue integral, jacobian, change of variable.

1 Introduction

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ avec $\ell$, la mesure de Lebesgue. Par ensembles (ou fonctions) mesurables, intégrables, ..., sans autre précision, on entend ensembles (ou fonctions) mesurables, intégrables, ... par rapport à $\ell$. L'abréviation "pp" signifie "presque partout par rapport à $\ell$", c'est-à-dire "en dehors d'un ensemble négligeable".

Dans cette note, nous allons établir le résultat suivant qui constitue une extension effective de la formule habituelle du changement de variables dans $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1.1 Soit $\Phi$ une application continue d'un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, différentiable en dehors d'un ensemble négligeable dont l'image par $\Phi$ est négligeable. Si $\Phi$ est injective pp dans $\Omega$, alors, pour toute fonction $f$ définie pp sur $\Phi(\Omega)$, (i) $f$ est mesurable sur $\Phi(\Omega)$ si et seulement si $(f \circ \Phi) [ \det \Phi']$ est mesurable sur $\Omega$, (ii) $f$ est intégrable sur $\Phi(\Omega)$ si et seulement si $(f \circ \Phi) [ \det \Phi']$ est intégrable sur $\Omega$, auquel cas

$$\int_{\Phi(\Omega)} f(y) \, dy = \int_{\Omega} f(\Phi(x)) [ \det \Phi'(x) ] \, dx.$$