Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, Vol. 73, 1, 2004, pp. 21-25

UNE REMARQUE SUR LA FORMULE DU CHANGEMENT DE VARIABLES DANS $\mathbb{R}^n$

Ho Van Thi Si

Abstract

The aim of this paper is to give a result which generalizes the usual change of variables formula in euclidean spaces.

Mathematics Subject Classification: Primary: 26B10.
Key words: Lebesgue integral, jacobian, change of variable.

1 Introduction

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ avec ℓ, la mesure de Lebesgue. Par ensembles (ou fonctions) mesurables, intégrables, ..., sans autre précision, on entend ensembles (ou fonctions) mesurables, intégrables, ... par rapport à ℓ. L'abréviation "*pp*" signifie "presque partout par rapport à ℓ", c'est-à-dire "en dehors d'un ensemble négligeable".

Dans cette note, nous allons établir le résultat suivant qui constitue une extension effective de la formule habituelle du changement de variables dans $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1.1 *Soit Φ une application continue d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, différentiable en dehors d'un ensemble négligeable dont l'image par Φ est négligeable. Si Φ est injective pp dans Ω, alors, pour toute fonction f définie pp sur $\Phi(\Omega)$,*
(i) *f est mesurable sur $\Phi(\Omega)$ si et seulement si $(f \circ \Phi)\,|\det \Phi'|$ est mesurable sur Ω,*
(ii) *f est intégrable sur $\Phi(\Omega)$ si et seulement si $(f \circ \Phi)\,|\det \Phi'|$ est intégrable sur Ω, auquel cas*

$$\int_{\Phi(\Omega)} f(y)\,dy = \int_{\Omega} f(\Phi(x))\,|\det \Phi'(x)|\,dx.$$

Ce résultat s'applique notamment aux applications localement lipschitziennes injectives *pp*. Il s'applique aussi — évidemment — aux applications continues sur Ω, injectives *pp* et différentiables en dehors d'un ensemble dénombrable.

2 Un résultat auxiliaire

Pour établir le théorème, nous avons besoin d'un lemme que nous établissons en premier lieu.

Lemme 2.1 *Si l'application Φ vérifie les conditions du théorème, elle transforme les ensembles négligeables* (resp. *mesurables*) *en ensembles négligeables* (resp. *mesurables*), *la fonction $x \mapsto |\det \Phi'(x)|$ est localement intégrable sur Ω et on a*

$$\int_E |\det \Phi'(x)|\, dx = \ell(\Phi(E))$$

pour tout ensemble borélien E d'adhérence compacte dans Ω.

Preuve. Notons d'abord que par application du théorème 8.24 (remarque 8.25) de [1], la continuité et la différentiabilité de Φ impliquent que

$$|\det \Phi'(x)| = \lim_{r\to 0} \frac{\ell(\Phi(C))}{\ell(C)}$$

pour tout point x pris en dehors d'un ensemble négligeable D tel que $\Phi(D)$ soit négligeable, C désignant un cube quelconque de rayon r contenant x.

Ensuite démontrons que Φ transforme les ensembles négligeables en ensembles négligeables. Soit donc E une partie négligeable de Ω. En privant E de l'ensemble D ci-dessus, on peut supposer Φ différentiable en tout point de E. L'ensemble E est alors la réunion des ensembles

$$E_{i,j} = \left\{ x \in E : \sup_{r<1/i} \frac{\ell(\Phi(C))}{\ell(C)} < j \right\}, \quad i,j = 1,2,\ldots$$

C désignant toujours un cube de rayon r contenant x. Pour tous i, j, fixés, l'ensemble $E_{i,j}$ est négligeable. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des cubes C_k de rayon $< 1/i$ tels que

$$E_{i,j} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \ell(C_k) \le \varepsilon$$

donc tels que, en prenant soin de ne retenir que les ensembles C_k qui rencontrent effectivement $E_{i,j}$,

$$\Phi(E_{i,j}) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Phi(C_k) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \ell(\Phi(C_k)) \leq j \sum_{k=1}^{\infty} \ell(C_k) \leq j\varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, ceci montre que $\Phi(E_{i,j})$ est négligeable. Par suite, $\Phi(E)$ est négligeable et la thèse en résulte.

Comme tout ensemble mesurable est union d'une suite de compacts et d'un ensemble négligeable, il s'ensuit, vu sa continuité, que Φ transforme les ensembles mesurables en ensembles mesurables.

Cela étant, considérons maintenant la loi λ définie sur l'ensemble des boréliens E d'adhérence compacte dans Ω selon

$$\lambda(E) = \ell(\Phi(E)).$$

Si N désigne un ensemble négligeable en dehors duquel Φ est injective, on a, vu ce qui précède

$$\lambda(E) = \ell(\Phi(E \setminus N)).$$

Ceci prouve que λ est une application dénombrablement additive. C'est donc une mesure dans Ω, absolument continue par rapport à ℓ. Elle peut donc s'écrire

$$\lambda = \lim_{r \to 0} \frac{\ell(\Phi(C))}{\ell(C)} . \ell = |\det \Phi'(x)| . \ell$$

en vertu du corollaire du théorème 8.6 de [1].∎

3 Preuve du théorème

Avec $\lambda = |\det \Phi'| . \ell$, il s'agit de prouver que, pour toute fonction f définie ℓ-*pp* sur $\Phi(\Omega)$,
(i) f est ℓ-mesurable sur $\Phi(\Omega)$ si et seulement si $f \circ \Phi$ est λ-mesurable sur Ω,
(i) f est ℓ-intégrable sur $\Phi(\Omega)$ si et seulement si $f \circ \Phi$ est λ-intégrable sur Ω, auquel cas

$$\int_{\Phi(\Omega)} f \, d\ell = \int_{\Omega} f \circ \Phi \, d\lambda.$$

Nous commençons par établir le cas particulier suivant qui s'avérera fondamental pour la suite.

Proposition 3.1 *Si $E \subset \Phi(\Omega)$ est borélien, alors E est ℓ-intégrable si et seulement si $\Phi^{-1}(E)$ est λ-intégrable, auquel cas $\ell(E) = \lambda(\Phi^{-1}(E))$.*

En conséquence, pour un ensemble borélien $E \subset \Phi(\Omega)$, E est ℓ-négligeable si et seulement si $\Phi^{-1}(E)$ est λ-négligeable.

Preuve. Soit $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de compacts croissant vers Ω. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\Phi^{-1}(E) \cap K_m$ est un borélien d'adhérence compacte dans Ω. Donc, par application du lemme, on peut écrire

$$\lambda(\Phi^{-1}(E) \cap K_m) = \ell(\Phi(\Phi^{-1}(E) \cap K_m)).$$

Or, puisque Φ transforme les ensembles négligeables en ensembles négligeables, pour des parties A, B de Ω, on a

$$A = B \ pp \Rightarrow \Phi(A) = \Phi(B) \ pp \Rightarrow \ell(\Phi(A)) = \ell(\Phi(B)),$$

ce qui donne, en désignant par N un ensemble négligeable en dehors duquel Φ est injectif,

$$\begin{aligned}
\ell(\Phi(\Phi^{-1}(E) \cap K_m)) &= \ell\big(\Phi((\Phi^{-1}(E) \setminus N) \cap (K_m \setminus N))\big) \\
&\underset{(*)}{=} \ell\big(\Phi(\Phi^{-1}(E) \setminus N) \cap \Phi(K_m \setminus N)\big) \\
&= \ell\big(\Phi(\Phi^{-1}(E)) \cap \Phi(K_m)\big) = \ell(E \cap \Phi(K_m)),
\end{aligned}$$

l'égalité en (*) résultatnt de l'injectivité de Φ dans $\Omega \setminus N$. On a donc

$$\lambda(\Phi^{-1}(E) \cap K_m) = \ell(E \cap \Phi(K_m)), \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Comme les suites d'ensembles $\Phi^{-1}(E) \cap K_m$ et $E \cap \Phi(K_m)$ croissent respectivement vers les ensembles $\Phi^{-1}(E)$ et E, on conclut aisément.∎

De cette proposition, il résulte immédiatement que si la fonction $f = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{E_i}$ est étagée sur des borérliens ℓ-intégrables de $\Phi(\Omega)$, la fonction $f \circ \Phi = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{\Phi^{-1}(E_i)}$ est étagée sur les boréliens λ-intégrables de Ω et on a $\int_{\Phi(\Omega)} f \, d\ell = \int_\Omega f \circ \Phi \, d\lambda$.

Cela étant, passons à la preuve du théorème.

D'une part, si la fonction f est ℓ-mesurable sur $\Phi(\Omega)$, elle est limite en dehors d'un ensemble borélien ℓ-négligeable $E \subset \Phi(\Omega)$ d'une suite de fonctions f_m étagées sur les boréliens ℓ-intégrables de $\Phi(\Omega)$. Vu le cas particulier, $f \circ \Phi$ est donc limite en dehors du borélien λ-négligeable $\Phi^{-1}(E)$ de la suite de fonctions $f_m \circ \Phi$ étagées sur les boréliens λ-intégrables de Ω; il s'ensuit que $f \circ \Phi$ est λ-mesurable sur Ω. Si en outre f est ℓ-intégrable sur $\Phi(\Omega)$, on peut choisir la suite f_m de Cauchy pour ℓ (i.e. telle que $\lim_{m,n} \int |f_m - f_n| \, d\ell = 0$); la suite des $f_m \circ \Phi$ est alors de Cauchy pour λ. Dès lors $f \circ \Phi$ est λ-intégrable sur Ω et, par passage à la limite, il vient $\int_{\Phi(\Omega)} f \, d\ell = \int_\Omega f \circ \Phi \, d\lambda$.

D'autre part, si f est une fonction définie ℓ-pp sur $\Phi(\Omega)$ telle que $f \circ \Phi$ soit λ-mesurable sur Ω, établissons que f est ℓ-mesurable sur $\Phi(\Omega)$. Pour cela, soit E une partie borélienne ℓ-intégrable de $\Phi(\Omega)$. Comme d'après le cas particulier, $\Phi^{-1}(E)$ est λ-intégrable, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset \Phi^{-1}(E)$ tel que $\lambda(\Phi^{-1}(E) \setminus K) \leq \varepsilon$ et que $f \circ \Phi$ soit continu sur K. Dès lors, pour tout fermé F dans $\mathbb{C}$, l'ensemble

$$f^{-1}(F) \cap \Phi(K) = \Phi\big((f \circ \Phi)^{-1}(F) \cap K\big)$$

est compact donc fermé. Ainsi f est continu sur le compact $\Phi(K)$ avec

$$\ell(E \setminus \Phi(K)) = \lambda\big(\Phi^{-1}(E \setminus \Phi(K))\big) \leq \lambda(\Phi^{-1}(E) \setminus K) \leq \varepsilon.$$

Ceci établit que f est ℓ-mesurable sur Ω.

Pour conclure, il reste donc à prouver que si la fonction f définie ℓ-*pp* sur $\Phi(\Omega$ est telle que $f \circ \Phi$ soit λ-intégrable sur Ω, elle est ℓ-intégrable sur $\Phi(\Omega)$. On sait déjà que f est ℓ-mesurable sur $\Phi(\Omega)$. Si les $K_m \subset \Omega$ désignent des compacts croissant vers Ω, les fonctions

$$f\chi_{\{y \in \Phi(K_m) : |f(y)| \leq m\}}, \quad m \in \mathbb{N},$$

sont alors ℓ-intégrables et convergent ℓ-*pp* vers f dans $\Phi(\Omega)$. De plus, on a

$$\begin{aligned}\int_{\{y \in \Phi(K_m) : |f(y)| \leq m\}} |f| \, d\ell &= \int_{\Phi^{-1}(\Phi(K_m)) \cap \{x : |f \circ \Phi(x)| \leq m\}} |f \circ \Phi| \, d\lambda \\ &\leq \int_\Omega |f \circ \Phi| \, d\lambda.\end{aligned}$$

Donc, par application du théorème de la convergence monotone, f est ℓ-intégrable sur $\Phi(\Omega)$.∎

References

[1] RUDIN W., *Real and complex analysis*, Mc Graw-Hill, 1966.

[2] GARNIR H. G., DE WILDE M., SCHMETS J., *Analyse fonctionnelle*, Tome II, Birkhäuser, 1972.

Ho Van Thi Si, 124, rue de Serbie, B-4000 Liège, Belgium
`vanthisi_ho@belgacom.net`