Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, Vol. 73, 2-3, 2004, pp. 81-97

Théorèmes de type Whitney dans des intersections de classes ultradifférentiables.

Pascal BEAUGENDRE

Université de Paris-Sud Mathématiques; Bât. 425. 91405 ORSAY, France.
Pbeaugendre@ifrance.com et Pascal.beaugendre@math.u-psud.fr

Résumé. Ce texte a pour but de décrire quelques résultats typiques des espaces de jets de Whitney. On présente plus particulièrement les propriétés d'extension et d'extension linéaire dans des classes ultradifférentiables définies par des intersections.

Mots clés : jets, fonctions ultradifférentiables, non quasi-analytique, classes de Beurling, théorème d'extension de Whitney, opérateurs d'extension linéaires, propriété de Markov, bases de Schauder.

Abstract. This text intends to describe some typical results of Whitney spaces of jets. Extension and linear extension properties within ultradifferentiable classes defined by intersections are especially dealt with.

Key words : jets, ultradifferentiable functions, non quasi-analytic, Beurling classes, Whitney extension theorem, linear extension operators, Markov's property, Schauder basis.

1 Introduction.

Le point de départ est le théorème d'extension de Whitney ([Wh]) qui assure que tout jet de Whitney sur un ensemble compact K non vide de $\mathbb{R}^n$ est la restriction des dérivées partielles d'une fonction infiniment différentiable sur $\mathbb{R}^n$. C'est, en quelque sorte, une réciproque du théorème de Taylor. Lorsque K est un singleton et si $n = 1$, il s'agit du théorème de Borel ([Bo]) qui s'énonce ainsi : si $(u_p)_{p\geq 0}$ est une suite de réels, alors il existe une fonction f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout entier p, on ait $u_p = f^{(p)}(0)$. On dit que l'on a réalisé l'extension au dessus d'un point.

A la suite de ce résultat on peut se demander sous quelles conditions l'extension peut-être réalisée à l'aide d'un opérateur linéaire continu. Par exemple, pour l'extension au dessus d'un point, un tel opérateur n'existe pas. En revanche, si $K = [-1, 1]$ et si $n = 1$, B. S. Mityagin a construit dans [Mi] un opérateur linéaire continu d'extension explicite.

Parallèlement à cette théorie classique, de nombreux auteurs ont abordé les problèmes d'extension dans des sous-algèbres naturelles du C^∞ : les classes ultradifférentiables. Ce sont des ensembles de fonctions infiniment dérivables, définis par des conditions de croissance des dérivées. Ainsi, pour l'extension au dessus d'un point en dimension 1, il s'agit de la question suivante : si la suite de réels $(u_p)_{p\geq 0}$ est à croissance contrôlée, peut-on construire une fonction f, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, réalisant l'extension dont la suite des dérivées est contrôlée de façon analogue?

Bien sûr, on s'intéresse à des classes "naturelles". Les problèmes d'équations aux dérivées partielles conduisent à définir, pour tout $(a,s) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, la classe de Gevrey $G_s^a(\mathbb{R}^n)$. Elle est formée des fonctions f, pour lesquelles il existe une constante $C_{a,s}$ telle que pour tout multi-indice $P = (p_1, ..., p_n)$ de longueur p, on ait

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial^p f(x)}{\partial^{p_1} x_1 ... \partial^{p_n} x_n} \right| \leq C_{a,s} p! a^p p^{sp}. \tag{1}$$

De telles classes ne sont pas stables par composition par une fonction affine. On est donc amené à considérer, de façon naturelle, des intersections.

Les intersections de A. Beurling et H. Komatsu sont obtenues lorsque, pour tout $a > 0$, l'inégalité (1) est vérifiée en remplaçant le membre de droite par $C_a p! a^p \exp(\phi(p))$, pour une fonction ϕ convexe sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant $\lim_{t\to+\infty} \phi(t)/t = +\infty$. (Voir $[Ko]$.) Dans cette note, ces intersections seront notées $I_{1,\phi}$. Une autre approche conduit aux intersections de A. Beurling et G. Björck. Elles sont construites en mesurant la croissance des dérivées "du côté Fourier", à l'aide d'un poids. Si le poids est assez régulier, cela revient à imposer que l'inégalité (1) soit vérifiée pour tout $a > 0$, en remplaçant le membre de droite par $C_a p! a^p \exp(\phi(ap)/a)$, avec une fonction ϕ comme ci-dessus. (Voir $[Bj]$ et $[BMT]$.) Dans cette note, ces intersections seront notées $I_{2,\phi}$.

Ces espaces de Beurling ont été étudiés par de nombreux auteurs. En particulier, ils ont examiné la possibilité d'étendre à ces classes les théorèmes classiques de Borel ou de Whitney. Par exemple, pour les intersections de A. Beurling et H. Komatsu, on peut citer les travaux de H.-J. Petzsche $[Pe2]$ et de J. Chaumat et A. M. Chollet $[CC2]$. Pour les intersections de A. Beurling et G. Björck, on peut citer les travaux de J. Bonet, R. W. Braun, R. Meise, B. A. Taylor $[BBMT]$ et de U. Franken $[Fra]$.

Cependant, certains énoncés d'analyse différentielle, comme le théorème de division de Lojasiewicz, sont faux dans ces espaces. J. Chaumat et A. M. Chollet ont démontré que ce théorème est vrai dans l'intersection des classes de Gevrey et dans certaines autres intersections qui seront notées $I_{3,\phi}$ dans cette note. Ce sont des classes pour lesquelles "une bonne analyse différentielle" est possible. (Voir $[CC3]$ et $[CC4]$). Cependant, les intersections $I_{3,\phi}$ sont incluses dans l'intersection des classes de Gevrey. Elles ont été généralisées dans $[Be1]$ et $[Be2]$. Ces nouvelles intersections, notées $I_{4,\phi}$, ont été obtenues lorsque, pour tout $a > 0$, l'inégalité (1) est vérifiée, en remplaçant le membre de droite par $C_a p! \exp(\phi(ap))$. Dans ces classes, "une bonne analyse différentielle" est encore possible.

Dans cet article, après avoir rappelé les principaux résultats relatifs à la classe C^∞, on présente les familles d'intersections mentionnées précédemment. Ensuite, sans avoir la prétention d'être exhaustif, on énonce les résultats d'extension correspondants et on compare ces intersections.

2 Problèmes d'extension pour les jets de Whitney.

2.1 Le théorème de Borel et le théorème de Whitney.

Le premier problème est celui de l'extension lorsque le compact est un singleton. Il s'agit du théorème de Borel rappelé dans l'introduction. Pour généraliser ce résultat à des ensembles compacts quelconques, on est amené à introduire la notion de jets.

2.1.1 Notations.

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\setminus\{0\}$. n désigne un élément de $\mathbb{N}^*$. Soit $J = (j_1, ..., j_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice de $\mathbb{N}^n$, on note $|J|$ ou j sa longueur, $|J| = j = j_1 + ... + j_n$ et $J! = j_1!...j_n!$. Pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $x^J = x_1^{j_1}...x_n^{j_n}$ et $|x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$.

Soit f une fonction de classe C^∞ en $x \in \mathbb{R}^n$; pour tout multi-indice $L = (l_1, ..., l_n) \in \mathbb{N}^n$ de longueur l, on note

$$f^{(L)}(x) = \frac{\partial^l f}{\partial^{l_1} x_1 ... \partial^{l_n} x_n}(x).$$

Dans tout ce qui suit, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et K un compact non vide de $\mathbb{R}^n$.

2.1.2 Définitions.

Un *jet* F sur K est la donnée d'une suite $\left(F^{(J)}\right)_{J\in\mathbb{N}^n}$ de fonctions continues sur K à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si K est inclus dans Ω et si $f \in C^\infty(\Omega)$, alors $\left(f_{|K}^{(L)}\right)_{L\in\mathbb{N}^n}$ est un jet. L'application $R_K : f \mapsto \left(f_{|K}^{(L)}\right)_{L\in\mathbb{N}^n}$ est appelée *l'application de restriction à* K.

On s'intéresse au problème d'extension suivant : si F est un jet, existe-t-il une fonction f, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, telle que $R_K(f) = F$? Bien sûr, on suppose que le jet vérifie les estimations de Taylor.

2.1.3 Définitions.

Soient $p \in \mathbb{N}$, $J \in \mathbb{N}^n$ tels que $|J| \leq p$ et $(\zeta, x) \in K^2$. On définit le *reste de Taylor* $R_\zeta^{J,p}F(x)$ par

$$R_\zeta^{J,p}F(x) = F^{(J)}(x) - \sum_{K;|J+K|\leq p} \frac{1}{K!}(x-\zeta)^K F^{(J+K)}(\zeta).$$

On dit que F est un *jet de Whitney de classe C^∞ sur K* ou plus simplement un *jet de Whitney sur K* si, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $J \in \mathbb{N}^n$ tels que $|J| \leq p$, on a $R_\zeta^{J,p} F(x) = o\left(|x-\zeta|^{p-j}\right)$ dès que $|x-\zeta|$ tend vers 0 avec $(x,\zeta) \in K^2$. On note $C^\infty(K)$ l'ensemble des jets de Whitney.

Ainsi, un jet de Whitney est un jet qui se souvient qu'il est éventuellement le jet d'une fonction de classe C^∞. On définit sur $C^\infty(K)$ une famille de semi-normes $\left(\|.\|_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ en posant

$$\|F\|_p = \sup_{J\in\mathbb{N}^n;|J|\leq p;x\in K} \left|F^{(J)}(x)\right| + \sup_{\substack{J\in\mathbb{N}^n;|J|\leq p \\ (\zeta,x)\in K^2,\zeta\neq x}} \frac{\left|R_\zeta^{J,p} F(x)\right|}{|\zeta - x|^{p-j}}.$$

H. Whitney a montré que cette condition nécessaire est aussi suffisante.

2.1.4 Théorème ($[Wh]$).

Soit F un jet; F est un jet de Whitney sur K, si et seulement si, il existe une fonction f, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, telle que $F = R_K(f)$.

2.1.5 Remarque.

Dans $[Wh]$, H. Whitney a également montré que l'extension peut être choisie réelle analytique sur le complémentaire de K.

2.2 Quelques résultats d'extension linéaire.

A la suite du théorème de Whitney on peut se demander si l'on peut réaliser l'extension à l'aide d'un opérateur linaire continu.

2.2.1 Définition.

On dit que le compact K a *la propriété d'extension linéaire* (ExL) lorsqu'il existe une application linéaire continue U, de l'espace des jets de Whitney $C^\infty(K)$ dans $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $R_K \circ U = id$. Ici id désigne l'application identité sur $C^\infty(K)$.

Rappelons tout d'abord que $\{0\}$ n'a pas la propriété (ExL). Un autre exemple de compact n'ayant pas cette propriété a été donné par M. Tidten.

2.2.2 Théorème ($[Ti]$).

Si g est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que $g > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g = 0$ sur $\mathbb{R}_-$, on pose $K_g = \left\{(x,y) \in [0,1]^2, 0 \leq y \leq g(x)\right\}$. Alors le compact K_g n'a pas la propriété (ExL).

Le premier résultat positif est dû à B. S. Mityagin. Dans son exemple, la question de l'existence de bases est très importante. Si on a une base de

Schauder absolue, alors, on peut obtenir un opérateur d'extension explicite, en étendant individuellement les éléments de la base.

2.2.3 Définition.

Soit $\mathcal{F}$ un espace de Fréchet muni d'une famille de semi-normes $(\|.\|_a)_{a>0}$. Soient $(x_m)_{m\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ et $(x'_m)_{m\geq 0}$ une suite d'éléments du dual de $\mathcal{F}$. On dit que le système $\left\{(x_m)_{m\geq 0}, (x'_m)_{m\geq 0}\right\}$ est une *base de Schauder absolue* de l'espace $\mathcal{F}$ lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :
(1) $\left\{(x_m)_{m\geq 0}, (x'_m)_{m\geq 0}\right\}$ est un système biorthogonal,
(2) pour tout $x \in \mathcal{F}$, on a $x = \sum_{m\geq 0} x'_m(x)\, x_m$,
(3) pour tout $a > 0$, il existe deux réels $b > 0$ et $C > 0$ tels que, pour tout $x \in \mathcal{F}$, on ait $\sum_{m=0}^{+\infty} |x'_m(x)|\, \|x_m\|_a \leq C\, \|x\|_b$.

Soit m un entier, on pose, pour tout $x \in [-1,1]$, $T_m(x) = \cos(m \arccos x)$; c'est le polynôme de Tchebyshev de degré m pour l'intervalle $[-1,1]$. On pose $a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t)\, dt$ et, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $a_m(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t)\cos(mt)\, dt$.

2.2.4 Théorème ([Mi]).

Le système $\left\{(T_m)_{m\geq 0}, (a_m)_{m\geq 0}\right\}$ est une base de Schauder absolue de l'espace de Fréchet $C^\infty([-1,1])$ et $[-1,1]$ possède la propriété (ExL).

Ce résultat a été généralisé par W. Pawłucki et W. Pleśniak à des compacts satisfaisant la propriété de Markov.

2.2.5 Théorème ([PP]).

Soit K un ensemble compact vérifiant la propriété de Markov suivante :
pour tout polynôme Q et tout multi-indice $J \in \mathbb{N}^n$, on a

$$\sup_{x\in K}\left\|Q^{(J)}(x)\right\| \leq \mathcal{M}(\deg Q)^{r|J|} \sup_{x\in K}\|Q(x)\|$$

avec deux constantes $\mathcal{M}$ et r qui ne dépendent ni de Q ni de J.
Alors K possède la propriété (ExL).

Le théorème suivant donne des exemples d'ensembles compacts ne vérifiant pas la propriété de Markov et qui possèdent pourtant la propriété (ExL).

2.2.6 Théorème ([$Go1$] et [$Go2$]).

On considère deux suites $(a_k)_{k\geq 1}$ et $(b_k)_{k\geq 1}$ vérifiant les conditions suivantes.
- *Les suites $(a_k)_{k\geq 1}$ et $(b_k - a_k)_{k\geq 1}$ décroissent vers 0.*
- *$b_1 \leq 1$ et pour tout entier $k \geq 1$, on a $a_k - b_{k+1} > 0$.*
- *Il existe deux constantes $C_0 \geq 3$ et $M > 0$ telles que, pour tout $k \geq 1$, on ait $2b_k \leq C_0(b_k - a_k)$, $b_k - a_k \leq 2C_0(a_k - b_{k+1})$ et $b_{k+1} - a_{k+1} \geq 2^{1-M}(b_k - a_k)^M$.*

On pose

$$K = \{0\} \cup \left(\bigcup_{k \geq 1} [a_k, b_k] \right).$$

Alors $C^{\infty}(K)$ possède une base de Schauder absolue et le compact K vérifie la propriété (ExL).

2.2.7 Remarques.

Dans les trois théorèmes précédents, les opérateurs d'extension linéaires sont relativement explicites.

Signalons enfin qu'une étude systématique de l'existence d'un opérateur linéaire continu d'extension à l'aide de l'invariant de Vogt "DN" a été faite par M. Tidten dans [*Ti*]. Récemment, L. Frerick a montré dans [*Fre*] que cet invariant est équivalent à des inégalités d'interpolation simples.

3 Intersections de classes ultradifférentiables.

On s'intéresse maintenant aux problèmes d'extension dans des intersections de classes ultradifférentiables. Ici encore Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et K un compact non vide de $\mathbb{R}^n$.

3.1 Classes ultradifférentiables de fonctions et de jets.

Dans tout ce paragraphe, on suppose que ϕ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}_+$, vérifiant la condition (H_{na}) suivante

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\phi(t)}{t} = +\infty.$$

3.1.1 Définitions.

On note $\{\phi(t), \Omega\}$ l'ensemble des fonctions de classe C^{∞} sur Ω vérifiant

$$\sup_{P \in \mathbb{N}^n; p=|P|} \sup_{x \in \Omega} \frac{\left|f^{(P)}(x)\right|}{p! \exp(\phi(p))} = \|f\|_{\{\phi(t), \Omega\}} < +\infty.$$

La classe $\{\phi(t), \Omega\}$ est un espace de Banach.

On note $\{\phi(t), K\}$ l'ensemble des jets F définis sur K vérifiant : il existe $C \geq 0$ tel que l'on ait

$$\sup_{P \in \mathbb{N}^n; p=|P|} \sup_{x \in K} \frac{\left|F^{(P)}(x)\right|}{p! \exp(\phi(p))} \leq C$$

et, pour tout entier p, pour tout multi-indice J de longueur $j \leq p$ et, pour tout $(x, \zeta) \in K^2$,

$$\left|R_{\zeta}^{J,p} F(x)\right| \leq Cj! \exp(\phi(p+1)) |\zeta - x|^{p+1-j}.$$

En prenant pour norme $\|F\|_{\{\phi(t),K\}}$ la plus petite constante C réalisant les deux inégalités précédentes, la classe $\{\phi(t), K\}$ est un espace de Banach. Les éléments de $\{\phi(t), K\}$ sont bien sûr des jets de Whitney sur K.

3.1.2 Remarques.

1. Si l'ouvert Ω est borné, $\{\phi(t), \Omega\}$ contient l'ensemble des fonctions analytiques au voisinage de $\overline{\Omega}$; la fonction ϕ mesure le "défaut d'analyticité" de la classe. Ce point de vue se justifie par le fait que, dans beaucoup de situations, c'est avec la fonction ϕ que l'on obtient des contrôles naturels. Pour s'en convaincre, il suffit d'examiner le cas de la composition de deux fonctions f et g de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On utilise la formule de Faà di Bruno ([*Ro*]). Pour tout entier n et tout réel x, on a

$$\frac{(f \circ g)^{(n)}(x)}{n!} = \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{f^{(p)}(g(x))}{p!} \sum_{J \in J_{p,n}} C_{J,p,n} \prod_{s=1}^{n} \left(\frac{g^{(s)}(x)}{s!} \right)^{j_s} \right)$$

en posant $J_{p,n} = \{(j_1, ..., j_n) \in \mathbb{N}^n, \sum_{s=1}^{n} s j_s = n \text{ et } \sum_{s=1}^{n} j_s = p\}$. De plus les constantes $C_{J,p,n}$ vérifient $\sum_{J \in J_{p,n}} C_{J,p,n} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}$. Ainsi, dans le calcul de $\frac{(f \circ g)^{(n)}}{n!}$ ce sont donc des termes $\frac{f^{(p)}}{p!}$ et $\frac{g^{(s)}}{s!}$ qui interviennent.

2. On dit que la classe $\{\phi(t), \mathbb{R}^n\}$ est non quasi-analytique lorsqu'elle contient des fonctions non nulles à support compact. D'après le théorème de Denjoy-Carleman, dont on trouve la démonstration dans [*Ma*], la classe $\{\phi(t), \mathbb{R}^n\}$ est non quasi-analytique si et seulement si ϕ vérifie l'hypothèse (H_{nqa}) suivante

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t \exp\left(\frac{\phi(t)}{t}\right)} < +\infty.$$

3.1.3 Définition.

On dit que la fonction ϕ est *fortement non quasi-analytique* lorsqu'elle vérifie la condition suivante : il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on ait

$$\sum_{k \geq p} \frac{1}{k \exp(\phi(k) - \phi(k-1))} \leq \frac{A}{\exp(\phi(p) - \phi(p-1))}.$$

Dans tout ce qui suit, sans restreindre à la généralité, on peut supposer que $\phi(0) = 0$. Ainsi, on suppose dorénavant que ϕ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}_+$, nulle en 0 et vérifiant la condition (H_{na}).

3.2 Intersections $I_{1,\phi}$ de A. Beurling et H. Komatsu.

3.2.1 Définitions.

On définit les intersections de classes de fonctions et de jets suivantes

$$I_{1,\phi}(\Omega) = \bigcap_{a>0} \{t \ln a + \phi(t), \Omega\}$$

et

$$I_{1,\phi}(K) = \bigcap_{a>0} \{t \ln a + \phi(t), K\}.$$

Ces classes ont été introduites par H. Komatsu dans $[Ko]$.

3.2.2 Définitions.

On note encore $R_K : f \mapsto \left(f_{|K}^{(L)}\right)_{L \in \mathbb{N}^n}$ *l'application de restriction à* K. C'est une application de $I_{1,\phi}(\mathbb{R}^n)$ dans $I_{1,\phi}(K)$.

On dit que l'intersection de classes $I_{1,\phi}(K)$ a *la propriété d'extension* (Ex) lorsque l'application de restriction R_K est surjective.

On dit que l'intersection de classes $I_{1,\phi}(K)$ a *la propriété d'extension linéaire* (ExL) lorsqu'il existe une application linéaire continue U, de $I_{1,\phi}(K)$ dans $I_{1,\phi}(\mathbb{R}^n)$ telle que $R_K \circ U = id$. Ici id désigne l'application identité sur $I_{1,\phi}(K)$.

Dans ces classes, le problème de l'extension au dessus d'un point a été complétement résolu par H.-J. Petzsche.

3.2.3 Théorème ($[Pe2]$).

Si ϕ vérifie l'hypothèse de non quasi-analyticité (H_{nqa}) de 3.1.2, alors les conditions suivantes sont équivalentes.
(1) $I_{1,\phi}(\{0\})$ a la propriété d'extension (Ex).
(2) $I_{1,\phi}(\{0\})$ a la propriété d'extension linéaire (ExL).
(3) La fonction ϕ est fortement non quasi-analytique.

3.2.4 Définition.

On dit que la fonction ϕ est à *croissance modérée* lorsqu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on ait $\phi(2t) \leq \alpha t + 2\phi(t)$.

Si K est un compact quelconque de $\mathbb{R}^n$, J. Chaumat et A. M. Chollet ont démontré le théorème suivant.

3.2.5 Théorème ($[CC1]$).

Si ϕ est à croissance modérée et vérifie l'hypothèse de non quasi-analyticité (H_{nqa}), alors, les conditions suivantes sont équivalentes.
(1) La fonction ϕ est fortement non quasi-analytique.
(2) Pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$, $I_{1,\phi}(K)$ a la propriété d'extension (Ex).

On verra dans le paragraphe suivant qu'un théorème d'extension linéaire pour les classes de A. Beurling et H. Komatsu découle d'un résultat obtenu dans le contexte des classes de A. Beurling et G. Björck .

3.3 Intersections $I_{2,\phi}$ de A. Beurling et G. Björck.

3.3.1 Définitions.

On définit les intersections de classes de fonctions et de jets suivantes

$$I_{2,\phi}(\Omega) = \bigcap_{a>0} \left\{ \frac{\phi(at)}{a} + t \ln a, \Omega \right\}$$

et

$$I_{2,\phi}(K) = \bigcap_{a>0} \left\{ \frac{\phi(at)}{a} + t \ln a, K \right\}.$$

Lorsque la fonction ϕ est associée à un poids ω au sens de la définition qui suit, on retrouve les intersections de classes de A. Beurling et G. Björck $[Bj]$ modifiées par R. W. Braun, R. Meise, B. A. Taylor dans $[BMT]$.

3.3.2 Définition.

Soit $\omega : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ une application continue croissante. On dit que ω est *un poids* lorsque ω satisfait les conditions suivantes :
(1) $\omega(2t) = O(\omega(t))$,
(2) $\int_1^{+\infty} \frac{\omega(t)}{t^2} dt < +\infty$,
(3) $\ln(t) = o(\omega(t))$,
(4) $\phi_{(\omega)} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[, t \mapsto \omega(e^t)$ est convexe.

On note alors $\phi^*_{(\omega)}$ la *fonction conjuguée de Young* de la fonction $\phi_{(\omega)}$. Par définition, pour tout $t \geq 0, \phi^*_{(\omega)}(t) = \sup_{x \geq 0} \{xt - \phi_{(\omega)}(x)\}$.

On dit que la fonction ϕ est *associée à un poids* lorsqu'il existe un poids ω tel que, pour tout $t \geq 0$, on ait $\phi(t) = \phi^*_{(\omega)}(t) - t \ln(t+1)$.

Dans toute la suite de ce paragraphe, on suppose que ϕ est associée à un poids ω. Les classes $I_{2,\phi}$ interviennent de façon naturelle lorsque l'on mesure la croissance des dérivées "du côté Fourier" avec le poids ω. Plus précisément, on a la proposition suivante.

3.3.3 Proposition ($[BMT]$).

On suppose que K est un compact convexe non vide. Pour tout $\lambda > 0$, on pose

$$D_\lambda(K) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \operatorname{supp}(f) \subset K \text{ et } \int_{\mathbb{R}^n} \left| \widehat{f}(t) \right| \exp(\lambda \omega(t))\, dt < +\infty \right\}$$

et

$$D_{(\omega)}(K) = \bigcap_{\lambda>0} D_\lambda(K).$$

Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, à support dans K. $f \in D_{(\omega)}(K)$ si et seulement si $f \in I_{2,\phi}(\mathbb{R}^n)$.

Pour ces intersections, on définit la propriété d'extension (Ex) et la propriété d'extension linéaire (ExL), comme au 3.2.2. Le théorème suivant généralise des résultats de $[MT1]$.

3.3.4 Théorème ($[BBMT]$, $[Ab]$).

Les conditions suivantes sont équivalentes.
(1) $I_{2,\phi}(\{0\})$ a la propriété d'extension (Ex).
(2) Pour tout compact K de $\mathbb{R}^n, I_{2,\phi}(K)$ a la propriété d'extension (Ex).
(3) Il existe K, un compact non vide de $\mathbb{R}^n$, tel que $I_{2,\phi}(K)$ ait la propriété d'extension (Ex).
(4) La fonction ϕ est fortement non quasi-analytique.

Le théorème suivant généralise des résultats de $[MT1]$ et de $[MT2]$.

3.3.5 Théorème $[Fra]$.

Si ϕ est fortement non quasi-analytique, les conditions suivantes sont équivalentes.
(1) $I_{2,\phi}(\{0\})$ a la propriété d'extension linéaire (ExL).
(2) Pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$, $I_{2,\phi}(K)$ a la propriété d'extension linéaire (ExL).
(3) Il existe $b_1 > 0$ tel que, pour tout $a > 0$, il existe $b > 0$, $A_1 > 0$ et $A_2 > 0$, tels que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on ait

$$\frac{1}{b}\phi(bp) + \frac{1}{b_1}\phi(b_1p) \leq \frac{1}{a}\phi(2ap) + A_1 + A_2p.$$

La proposition suivante, dont la démonstration est donnée dans l'annexe numéro 2 de $[Be2]$, compare les différentes classes de Beurling.

3.3.6 Proposition.

(1) Soit $\widetilde{\phi}$ une autre fonction convexe sur $\mathbb{R}_+$, nulle en 0 et vérifiant la condition (H_{na}). Si $I_{1,\phi}(\{0\}) = I_{2,\widetilde{\phi}}(\{0\})$, avec égalité topologique, alors, $\widetilde{\phi}$ est à croissance modérée et on a l'égalité topologique $I_{1,\phi}(\{0\}) = I_{1,\widetilde{\phi}}(\{0\})$.
(2) Si ϕ est à croissance modérée, alors, pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$ et tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, on a les égalités topologiques $I_{1,\phi}(K) = I_{2,\phi}(K)$ et $I_{1,\phi}(\Omega) = I_{2,\phi}(\Omega)$.

Comme R. Meise et B. A. Taylor ont montré dans $[MT1]$ qu'une fonction à croissance modérée peut être associée à un poids, on peut énoncer la conséquence suivante du théorème de 3.3.5 :

3.3.7 Théorème.

Si ϕ est une fonction à croissance modérée fortement non quasi-analytique, alors, pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$, $I_{1,\phi}(K)$ a la propriété d'extension linéaire (ExL).

3.3.8 Remarques.

Ce théorème peut être établi à l'aide d'une démonstration directe, à partir du théorème 3.2.3. (Voir [$Be2$]).

On ne sait pas si l'hypothèse croissance modérée est nécessaire dans le théorème 3.3.7.

3.4 Intersections $I_{3,\phi}$ de J. Chaumat et A. M. Chollet.

3.4.1 Définitions.

On définit les intersections de classes de fonctions et de jets suivantes

$$I_{3,\phi}(\Omega) = \bigcap_{a>0} \{a\phi(t), \Omega\}$$

et

$$I_{3,\phi}(K) = \bigcap_{a>0} \{a\phi(t), K\}.$$

Ces intersections ont été introduites par J. Chaumat et A. M. Chollet pour généraliser l'intersection des classes de Gevrey. Ils ont démontré dans [$CC3$] et [$CC4$] que ces classes jouissent de certaines "bonnes propriétés" de la classe C^∞ avec un théorème de Lojasiewicz sur la régulière situation, un théorème de division de L ojasiewicz, un théorème de composition de Glaeser et le théorème d'extension de type Whitney suivant.

3.4.2 Théorème ([$CC3$]).

On suppose que la fonction ϕ est à croissance modérée et qu'elle vérifie l'hypothèse (H_{cnqa}) suivante :

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{\phi(u)}{u\ln(\ln u)} = +\infty.$$

Alors, pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$, $I_{3,\phi}(K)$ a la propriété d'extension (Ex).

(Ici encore, la propriété d'extension (Ex) est définie comme dans 3.2.2.)

3.4.3 Remarques.

1. La condition (H_{cnqa}) est équivalente à la condition suivante :

$$\forall a > 0, \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\exp\left(\frac{a\phi(t)}{t}\right)} < +\infty.$$

En d'autres termes, elle signifie que, pour tout $a > 0$, la classe $\{a\phi(t), \mathbb{R}^n\}$ est non quasi-analytique. Cette condition est nécessaire pour qu'il y ait extension pour un compact non vide (voir [$Be2$]). Une fonction ϕ vérifiant cette condition sera appelée une fonction *complètement non quasi-analytique*.

2. Si ϕ est à croissance modérée, alors il existe une constante positive β telle que, pour tout $t \geq 1$, on ait

$$\phi(t) \leq t\phi(1) + \beta t \ln t. \tag{2}$$

Ceci montre que les intersections $I_{3,\phi}$ sont incluses dans l'intersection des classes de Gevrey non quasi-analytiques.

3.5 Intersections $I_{4,\phi}$.

3.5.1 Définitions.

On définit les intersections de classes de fonctions et de jets suivantes

$$I_{4,\phi}(\Omega) = \bigcap_{a>0} \{\phi(at), \Omega\}$$

et

$$I_{4,\phi}(K) = \bigcap_{a>0} \{\phi(at), K\}.$$

Ces intersections de classes ont été introduites dans [Be1] et [Be2] pour généraliser les intersections à croissance modérée $I_{3,\phi}$ qui, d'après la dernière remarque, sont contenues dans l'intersection des classes de Gevrey non quasi-analytiques.

Pour ces intersections, comme au 3.2.2, on définit les propriétés (Ex) et (ExL).

Dans ces nouvelles intersections, on a un théorème d'extension de type Whitney.

3.5.2 Théorème ([Be1], [Be2]).

Si ϕ est complètement non quasi-analytique, alors, pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$, $I_{4,\phi}(K)$ a la propriété d'extension (Ex).

On étudie ensuite si cette extension peut être réalisée à l'aide d'un opérateur linéaire continu. Dans le cas de la classe C^∞, la réponse dépend de la géométrie du compact. Ici les résultats sont similaires mais la réponse depend de la géométrie de K et de la croissance de la fonction ϕ.

3.5.3 Théorème ([Be1], [Be2]).

(1) $I_{4,\phi}(\{0\})$ n'a pas la propriété d'extension linéaire (ExL).
(2) On suppose que la fonction ϕ est complètement non quasi-analytique. Alors il existe une fonction f appartenant à $I_{4,\phi}(\mathbb{R})$, ayant toutes ses dérivées nulles en 0 et strictement positive sur $]0,1]$. On pose $K_f = \left\{(x,y) \in [0,1]^2, 0 \leq y \leq f(x)\right\}$ alors $I_{4,\phi}(K_f)$ n'a pas la propriété d'extension linéaire (ExL).
(3) En dimension 1, si ϕ est à croissance modérée, $I_{4,\phi}([0,1])$ n'a pas la propriété d'extension linéaire (ExL).

En particulier, dans le cas de l'intersection des classes de Gevrey, il n'y a pas d'opérateur d'extension linéaire continu.

Pour des compacts "réguliers" et pour de "grandes classes", on a la version ultradifférentiable suivante du théorème de Pawłucki et Pleśniak.

3.5.4 Théorème ([$Be1$], [$Be2$]).

Si K est un compact de $\mathbb{R}^n$ vérifiant la propriété de Markov du théorème 2.2.5 et si

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{\phi(u)}{u \ln u} = +\infty, \tag{3}$$

alors $I_{4,\phi}(K)$ a la propriété d'extension linéaire (ExL).

L'intervalle $[-1,1]$ vérifie la propriété de Markov. Pour d'autres exemples de compacts ayant cette propriété, on pourra consulter [Pl].

Pour des compacts particuliers de $\mathbb{R}$, on peut utiliser les méthodes de Mityagin et de Goncharov pour obtenir des opérateurs d'extension explicites dans les intersections $I_{4,\phi}$. Pour le segment $[-1,1]$, on obtient une nouvelle démonstration du théorème 3.5.4 dans ce cas particulier. Pour un compact de Goncharov, on obtient des exemples qui montrent que, dans ces intersections comme pour le cas de la classe C^∞, la condition de Markov n'est pas nécessaire pour qu'il existe un opérateur d'extension linéaire continu. Ici encore, la question de l'existence de bases est très importante.

Dans le théorème suivant, on utilise les notations du théorème 2.2.4.

3.5.5 Théorème ([$Be3$], [$Be4$]).

(1) *Le système $\left\{(T_n)_{n\geq 0}, (a_n)_{n\geq 0}\right\}$ est une base de Schauder absolue de l'espace de Fréchet $I_{4,\phi}([-1,1])$.*

(2) *On suppose que $\lim_{u\to+\infty} \frac{\phi(u)}{u\ln u} = +\infty$. Alors il existe un opérateur linéaire continu d'extension explicite, de $I_{4,\phi}([-1,1])$ dans $I_{4,\phi}(\mathbb{R})$.*

3.5.6 Remarques.

1. Dans la première partie de ce théorème, la condition (H_{na}) est la seule condition de croissance imposée à la fonction ϕ.

2. G.I. Balikov a prouvé un résultat analogue pour des classes définies par des limites inductives. Dans ce cas, il a établi que les polynômes de Jacobi forment une base de l'espace des fonctions ultradifférentiables sur $[-1,1]$ (voir [$Ba1$] et [$Ba2$]).

3. Pour les classes $I_{1,\phi}$, H.-J. Petzsche a montré dans [$Pe1$] que les polynômes de Tchebyshev ne forment pas, en général, une base de Schauder de l'espace $I_{1,\phi}([-1,1])$.

3.5.7 Théorème ([$Be3$], [$Be4$]).

Avec les notations du théorème 2.2.6, on considère $K = \{0\} \cup \left(\bigcup_{k\geq 1}[a_k, b_k]\right)$. *Si* $\lim_{u\to+\infty}\frac{\phi(u)}{u^2} = +\infty$, *alors* $I_{4,\phi}(K)$ *possède une base de Schauder absolue et il existe un opérateur linéaire continu d'extension explicite, de* $I_{4,\phi}(K)$ *dans* $I_{4,\phi}(\mathbb{R})$.

3.5.8 Remarques.

1. On peut vérifier que les intersections de classes $I_{4,\phi}$ héritent des propriétés obtenues par J. Chaumat et A. M. Chollet dans [$CC3$] et [$CC4$]. En effet, dans tous leurs travaux, on peut constater qu'il apparaît à chaque fois une perte de régularité typique, d'une classe "$\phi(at)$" vers une classe "$\phi(a\lambda(t+\mu))$" où λ et μ sont deux entiers strictement positifs. Une telle perte est donc masquée par l'intersection. Ainsi les théorèmes de division de Lojasiewicz et de composition de Glaeser s'étendent naturellement aux classes $I_{4,\phi}$.

Pour s'en convaincre et à titre d'exemple, il suffit d'examiner le cas de la composition par X^2, dans un anneau de séries formelles à croissance contrôlée. Cette situation correspond au théorème de composition de Glaeser au dessus d'un point. Pour tout $a > 0$, on note $S\{\phi(at)\}$ l'ensemble des séries formelles $A(X) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j X^j$ vérifiant

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{|a_j|}{\exp(\phi(aj))} < +\infty.$$

On définit sur $S\{\phi(at)\}$ une norme en posant $\|A(X)\|_a = \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{|a_j|}{\exp(\phi(aj))}$. Si $A(X) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j X^j$ est une série formelle, on note $A(X^2)$ la série formelle obtenue par composition par X^2, on a $A(X^2) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j X^{2j}$. La série formelle $A(X^2)$ appartient à $S\{\phi(at)\}$ si et seulement si, $A(X)$ appartient à $S\{\phi(2at)\}$. De plus, on a

$$\|A(X^2)\|_a = \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{|a_j|}{\exp(\phi(2aj))} = \|A(X)\|_{2a}.$$

2. On peut aussi établir, à l'instar de H. Whitney dans [Wh] et de M. Valdivia dans [Va], des théorèmes d'extension avec réelle analyticité sur le complémentaire de K. On a, par exemple :

Théorème ([$Be1$]). *Soit* K *un ensemble compact non vide de* $\mathbb{R}^n$. *On suppose que* $I_{4,\phi}(K)$ *a la propriété d'extension linéaire* (ExL). *Alors il existe un opérateur linéaire continu d'extension* U, *de* $I_{4,\phi}(K)$ *dans* $I_{4,\phi}(\mathbb{R}^n)$ *tel que, pour tout* $F \in I_{4,\phi}(K)$, *la fonction* $U(F)$ *soit réelle analytique sur* $\mathbb{R}^n \backslash K$.

3. Récemment, une généralisation du théorème 3.5.2 a été donnée par J. Schmets and M. Valdivia dans [SV].

3.6 Comparaison entre les classes.

Pour les classes $I_{1,\phi}$ et $I_{2,\phi}$ on a déjà donné l'énoncé 3.3.6. Les deux propositions suivantes comparent les classes $I_{3,\phi}$ et $I_{4,\phi}$ puis les classes $I_{2,\phi}$ et $I_{4,\phi}$. Ici encore ϕ désigne une fonction convexe sur $\mathbb{R}_+$, nulle en 0 et vérifiant la condition (H_{na}).

3.6.1 Proposition ([$Be2$]).

(1) Pour toute fonction ϕ, tout compact K de $\mathbb{R}^n$ et tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, on a $I_{4,\phi}(K) \subset I_{3,\phi}(K)$ et $I_{4,\phi}(\Omega) \subset I_{3,\phi}(\Omega)$ et les injections sont continues.
(2) Si $I_{3,\phi}(\{0\}) = I_{4,\phi}(\{0\})$, alors ϕ vérifie la condition (H) suivante :
pour tout $a \in]0,1[$, il existe $b \in]0,1[$ et $C \geq 0$ tels que, pour tout $t \geq 0$, on ait $b\phi(t) \leq \phi(at) + C$.
(3) Si ϕ vérifie (H), alors, pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$ et tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, on a les égalités topologiques $I_{4,\phi}(K) = I_{3,\phi}(K)$ et $I_{4,\phi}(\Omega) = I_{3,\phi}(\Omega)$.

3.6.2 Proposition ([$Be2$]).

(1) Pour toute fonction ϕ, tout compact K de $\mathbb{R}^n$ et tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ on a $I_{4,\phi}(K) \subset I_{2,\phi}(K)$ et $I_{4,\phi}(\Omega) \subset I_{2,\phi}(\Omega)$ et les injections sont continues.
(2) Si $I_{4,\phi}(\{0\}) = I_{2,\phi}(\{0\})$, alors, ϕ vérifie la condition (H') suivante :
pour tout $a \in]0,1[$, il existe $b \in]0,1[$ et $C \geq 0$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on ait

$$\phi(bt) \leq C + b\phi(at).$$

(3) Si ϕ vérifie la condition (H'), alors, pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$ et tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, on a les égalités topologiques $I_{4,\phi}(K) = I_{2,\phi}(K)$ et $I_{4,\phi}(\Omega) = I_{2,\phi}(\Omega)$.

On peut noter que la condition (H') implique la condition suivante : il existe $\alpha > 1$, $\lambda > 0$ et $C_2 > 0$ tels que, pour tout $t \geq \lambda$, on ait $\phi(t) \geq C_2 t^\alpha$.

4 Références bibliographiques.

[Ab] A.V. Abanin, On Whitney's extension theorem for spaces of ultradifferentiable functions. Math. Ann 320 (2001), 115-126.
[$Ba1$] G.I. Balikov, Spaces of non-quasianalytic ultradifferentiable functions with polynomial basis. Bull. Pol. Acad. Sci., Math. 40, No.2, 81-85 (1992), 81-85.
[$Ba2$] G.I. Balikov, Notes on the continuous linear extension operator and the basis in some DFS-spaces of ultradifferentiable functions on interval. Rostocker Math. Kolloq. 52, (1998) 47-56.
[$Be1$] P. Beaugendre, Extensions de jets dans des intersections de classes non quasi-analytiques. Ann. Polon. Math. 76 (2001) , 213-243.
[$Be2$] P. Beaugendre, Intersections de classes non quasi-analytiques. Thèse, Orsay (2002).

[$Be3$] P. Beaugendre, Opérateurs linéaires continus d'extension dans des intersections de classes ultradifférentiables. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004), 197-202.
[$Be4$] P. Beaugendre, Opérateurs d'extension linéaires explicites dans des intersections de classes ultradifférentiables. A paraître dans Math. Nachr..
[Bj] G. Björck, Linear partial differential operators and generalized distributions, Ark. Mat. 6, (1965), 351-407.
[$BBMT$] J. Bonet, R. W. Braun, R. Meise, B. A. Taylor, Whitney's extension theorem for nonquasianalytic classes of ultradifferentiable functions, Studia Math. 99 n°2, (1991), 155-184.
[Bo] E. Borel, Sur quelques points de la théorie des fonctions, Ann. Sci. Ec. Norm. Super., IV. Ser. 12 (1895), 9-55.
[BMT] R. W. Braun, R. Meise, B. A. Taylor, Ultradifferentiable functions and Fourier analysis, Res. in Math. 17 (1990), 206-237.
[$CC1$] J. Chaumat et A. M. Chollet, Théorème de Whitney dans des classes ultradifférentiables, Publ. Inst. Rech. Math. Lille 28 (1992), VIII.1-VIII.32 et C. R. Acad. Sci. Paris Série I, 315 (1992), 901-906.
[$CC2$] J. Chaumat et A. M. Chollet, Surjectivité de l'application restriction à un compact dans des classes de fonctions ultradifférentiables, Math. Ann 298 (1994), 7-40.
[$CC3$] J. Chaumat et A. M. Chollet, Propriétés de l'intersection des classes de Gevrey et de certaines autres classes, Bull. Sci. Math. 122 (1998), 455-485.
[$CC4$] J. Chaumat et A. M. Chollet, Sur la division et la composition dans des classes ultradifférentiables. Studia Math. 136 (1999), 49-79.
[Fra] U. Franken, Continuous linear extension of ultradifferentiable functions of Beurling type, Math. Nachr. 164 (1993), 119-139.
[Fre] L. Frerick, Extension operators for spaces of infinitely differentiable Whitney functions, Habilitationsschrift, Wuppertal (2001).
[$Go1$] A. Goncharov, Spaces of Whitney functions with basis, Math. Nachr. 220 (2000), 47-57.
[$Go2$] A. Goncharov, On the explicit form of an extension operator for C^∞-functions, East Journal on Approximations, 7, 2 (2001), 179-193.
[Ko] H. Komatsu, Ultradistributions I. J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I A 20 (1972), 25-105.
[Ma] S. Mandelbrojt, Séries adhérentes, régularisation des suites, applications. Coll. Borel. Gauthier-Villars (1952).
[$MT1$] R. Meise, B. A. Taylor, Whitney's extension theorem for ultradifferentiable functions of Beurling type, Ark. Mat. 26 (1988), 265-287.
[$MT2$] R. Meise, B. A. Taylor, Linear extension operators for ultradifferentiable functions of Beurling type on compact sets, Amer. J. of Math. 111 (1989), 309-337.
[Mi] B. S. Mityagin, Approximate dimension and bases in nuclear spaces, Russian Math. Surveys, 16 (1961), 59-127.
[PP] W. Pawłucki et W. Pleśniak, Extension of C^∞ functions from sets with polynomial cusps, Studia Math. 88 (1988). 279-287.
[$Pe1$] H.-J. Petzsche, Die Nuklearität der Ultradistributionsräume und der Satz

vom Kern. II. Manuscr. Math. 27, 221-251 (1979), 221-251.
[$Pe2$] H.-J. Petzsche, On a E. Borel theorem. Math. Ann 282 (1988), 299-313.
[Pl] W. Pleśniak, Recent Progress in multivariate Markov Inequality. Approx. Theory. in memory of A. K. Varma. Pure Appl. Math., Marcel Dekker. 212 (1998), 449-464.
[Ro] S. Roman, The formula of Faà di Bruno. Amer. Math. Monthly 87 (1980), 805-809.
[SV] J. Schmets et M. Valdivia, Extension properties in intersections of non quasi-analytic classes. A paraître dans Note Mat..
[Ti] M. Tidten, Fortsetzungen von C^∞-Funktionen, welche auf einer abgeschlossenen Menge in $\mathbb{R}^n$ definiert sind. Manuscripta. Math. 27 (1979), 291-312.
[Va] M. Valdivia, On certain analytic function ranged linear operators in spaces of ultradifferentiable functions. Math Japonica 44, n° 3 (1996), 415-434.
[Wh] H. Whitney, Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets. Trans. Amer. Math. Soc 36 (1934), 63-89.