

PROGRAMME GÉNÉRAL POUR LA RÉOLUTION
DE SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
AUX VALEURS PROPRES ET AUX CONDITIONS LIMITES

par R. SCUFLAIRE

*Aspirant du Fonds National de la Recherche Scientifique
Université de Liège, Institut d'Astrophysique*

ABSTRACT

A Fortran program has been written that allows to solve numerically differential boundary-value problems of a very general type. It is shown that a fitting method is not suited for this type of problems and that a finite-difference method is to be preferred. In the appendix, we propose a finite-difference method having the same advantages as the Runge-Kutta method.

I. INTRODUCTION

Un programme a été mis au point permettant de résoudre des systèmes d'équations différentielles aux valeurs propres et aux conditions limites d'un type général. Cherchons des fonctions $y_j(x)$ et des paramètres λ_s (que nous appellerons valeurs propres) tels que les équations suivantes soient satisfaites

$$(1.1) \quad \begin{cases} \varphi_\alpha(y_j(a), \lambda_s) = 0 & (\alpha = 1, \dots, p) \\ \psi_\beta(y_j(b), \lambda_s) = 0 & (\beta = 1, \dots, q) \\ f_i(x, y_j, \frac{dy_k}{dx}, \lambda_s) = 0 \text{ pour } x \in]a, b[\quad (i = 1, \dots, n) \end{cases}$$

Les indices j, k varient de 1 à n ; l'indice s varie de 1 à r .

On supposera que la condition suivante est satisfaite

$$n + r = p + q \quad (1.2)$$

Remarquons qu'elle est satisfaite pour un problème de Sturm-Liouville. En effet, en posant y_1 égale la fonction inconnue et y_2 égale sa dérivée, l'équation différentielle du second ordre peut être remplacée par deux équations du premier ordre ($n = 2$). L'équation contient un paramètre ($r = 1$). Aux deux conditions limites données, ajoutons une condition de normalisation afin de déterminer univoquement la solution, par exemple en imposant la valeur de la fonction inconnue ou de sa dérivée à une extrémité. On a alors trois conditions aux limites ($p + q = 3$) et (1.2) est satisfaite.

Si le système (1.1) admet des solutions et si nous connaissons une approximation grossière de l'une d'entre elles, notre programme permet d'obtenir cette solution aux erreurs de troncature et aux erreurs d'arrondi près.

Présenté par P. Ledoux, le 20 janvier 1972.

On rencontre des équations de ce type dans de nombreux problèmes d'astrophysique. Citons par exemple les équations de pulsation linéaire d'une étoile (la fréquence de pulsation jouant le rôle de valeur propre), les équations de la structure interne (si on prend la masse comme variable indépendante, il n'y a pas de valeurs propres), etc.

Dans ce qui suit, nous ne prétendons pas discuter les avantages et inconvénients de toutes les méthodes numériques permettant de résoudre ce type de problèmes. Il existe suffisamment d'ouvrages spécialisés (voir par exemple [1]). Nous nous limiterons à montrer que la méthode des différences finies est beaucoup mieux adaptée à ce genre de problème que les méthodes de fitting. Nous illustrerons ce point par un exemple particulièrement instructif.

Nous ne ferons sur les fonctions φ_α , ψ_β et f_i d'autres hypothèses que celles qui seront nécessaires pour que les expressions écrites aient un sens. En particulier, nous supposons que le système considéré possède au moins une solution et nous admettons que celle-ci est dérivable autant de fois qu'il sera nécessaire. Remarquons que nous ne supposons pas les équations linéaires, nous ne les supposons pas résolues par rapport à la dérivée et les premiers membres peuvent dépendre des valeurs propres d'une façon absolument quelconque.

Dans le paragraphe 2 nous montrerons que les méthodes de fitting sont à déconseiller pour ce genre de problème. Dans le paragraphe suivant, nous exposons la méthode des différences finies sous la forme que nous avons utilisée dans notre programme et nous illustrerons les performances de la méthode à l'aide d'un exemple. Nous évoquerons brièvement les difficultés qu'elle suscite dans le paragraphe 4. Enfin, dans l'appendice nous exposerons la méthode d'ordre 4 que nous avons établie.

2. LES MÉTHODES DE FITTING

Il semblerait qu'une méthode de fitting soit particulièrement indiquée en raison de la facilité de programmation d'une telle méthode et la possibilité d'utiliser une méthode d'intégration d'ordre élevé et très souple du type de Runge-Kutta. Dans une telle méthode, si a est pris comme point initial, on choisit à priori les r valeurs des λ_s et $n - p$ conditions initiales supplémentaires, c'est-à-dire qu'on choisit arbitrairement les valeurs de $n + r - p = q$ paramètres que nous noterons ξ_γ ($\gamma = 1, 2, \dots, q$). Ce choix étant fait, on peut intégrer les équations dans tout l'intervalle $[a, b]$ comme on le fait pour un problème avec conditions initiales. Si les conditions limites en $x = b$ ne sont pas satisfaites, on recommence avec de nouvelles valeurs pour les ξ_γ .

Dans les conditions

$$\psi_\beta(y_i(b), \lambda_s) = 0 \tag{2.1}$$

les $y_i(b)$ et les λ_s sont des fonctions des ξ_γ et on peut écrire le système ci-dessus sous la forme

$$\psi'_\beta(\xi_\gamma) = 0 \tag{2.2}$$

où il y a autant d'équations que d'inconnues. Il suffit donc de résoudre ce système pour obtenir la solution du problème.

Ceci semble très satisfaisant. Et il en est bien ainsi si les fonctions $\psi'_\beta(\xi_\gamma)$ sont des fonctions suffisamment régulières des ξ_γ . Mais en fait, les fonctions ψ'_β sont des fonctions très compliquées des ξ_γ (obtenues par le processus d'intégration numérique) et dans certains cas, les $y_i(b)$ varieront de façon tout à fait irrégulière

quand on modifie légèrement les valeurs des ξ_γ . Il en sera de même pour les ψ'_β , au point que la résolution du système n'ait plus beaucoup de sens. Même si on parvenait alors à obtenir les ξ_γ qui annulent les ψ'_β , les erreurs d'arrondi et les erreurs de contractures auront sur les $y_j(x)$ un effet semblable à celui d'une légère variation des ξ_γ et la solution obtenue n'aurait aucun sens.

Pour mieux comprendre ce phénomène, introduisons le concept de problème bien ou mal conditionné. Ces termes sont généralement utilisés, lors de la résolution d'un système linéaire, pour caractériser la matrice des coefficients. Elle est dite mal conditionnée dans le cas où par suite des erreurs d'arrondi les calculs conduisent à un résultat notablement différent de la solution exacte. La méthode de calcul utilisée influe évidemment sur l'erreur finale. Mais dans les cas de mauvais conditionnement, aucune méthode ne permet de réduire l'erreur à des valeurs acceptables. Ceci arrive notamment lorsqu'une des valeurs propres de la matrice est voisine de zéro et est beaucoup plus petite que les autres (matrice « presque singulière »). Dans ce cas, une petite variation du second membre entraîne une variation notable de la solution. Nous ferons usage des termes bien et mal conditionné à propos de notre problème dans un sens analogue. Nous dirons qu'il est bien conditionné si une petite variation des conditions aux limites entraîne une petite variation de la solution. Il sera dit mal conditionné dans le cas contraire où des variations légères des conditions aux limites entraînent des variations de la solution d'un ordre de grandeur incomparablement plus grand. Cette définition est plutôt intuitive et manque de rigueur, mais elle est suffisante pour le développement qui va suivre. Dans la pratique, ainsi que nous le montrons ci-dessous, on se rend très vite compte lorsqu'on intègre numériquement un problème mal conditionné.

Montrons qu'il est impossible d'intégrer numériquement un problème mal conditionné. En effet, au cours du calcul, à chaque pas on commet une erreur de troncature et une erreur d'arrondi de sorte qu'au moment d'effectuer le pas suivant, les conditions initiales pour ce pas sont légèrement différentes des conditions initiales exactes. Le problème étant supposé mal conditionné, on obtiendra après un certain nombre de pas une solution qui s'écarte très fort de la solution exacte (voir [1], chapitre 2, § 1.2). Remarquons que cette situation n'est pas fort gênante car il n'y a aucun intérêt à résoudre numériquement un problème mal conditionné. En supposant même qu'on puisse obtenir numériquement la solution exacte d'un problème mal conditionné, celle-ci ne présenterait pas beaucoup d'intérêt. En effet, dans la réalité, les conditions aux extrémités ne sont souvent connues qu'à une certaine approximation, or en les changeant légèrement (dans les limites de l'incertitude qui les affecte) on obtient une solution toute différente.

Illustrons ces notions à l'aide de l'exemple suivant.

L'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 10,1 \frac{dy}{dx} + y = 0 \quad (2.3)$$

dans l'intervalle $[0, 10]$ possède la solution générale

$$y = Ae^{x/10} + Be^{10x} \quad (2.4)$$

Parmi toutes ces solutions, une seule (à un facteur près) croît comme $e^{x/10}$ alors que toutes les autres croissent beaucoup plus vite comme e^{10x} (le terme en $e^{x/10}$ devient négligeable devant le terme en e^{10x} lorsque x devient suffisamment grand) et c'est à cette particularité qu'il faut attribuer le fait que si on adjoint des conditions initiales à cette équation, on obtient un problème mal conditionné. Par contre, si on y adjoint des conditions limites, on obtient un problème bien con-

ditionné (voir ci-dessous). On comprend dès lors que la méthode de fitting, qui remplace le problème bien conditionné par un autre problème mal conditionné échoue dans des cas semblables.

Considérons les conditions

$$y = a \text{ en } x = 0 \quad \text{et} \quad y = b \text{ en } x = 10 \quad (2.5)$$

La solution qui y satisfait est

$$y = \frac{a - be^{-100}}{1 - e^{-99}} e^{x/10} - e^{-100} \frac{ae - b}{1 - e^{-99}} e^{10x} \quad (2.6)$$

Si on donne à a et b de légères variations δa et δb la solution subit la variation

$$\delta y = \frac{e^{x/10} - e^{10x-99}}{1 - e^{-99}} \delta a + \frac{e^{10x-100} - e^{x/10-100}}{1 - e^{-99}} \delta b \quad (2.7)$$

Dans tout l'intervalle $[1, 10]$, on a

$$|\delta y| \leq |\delta a| + |\delta b| \quad (2.8)$$

Le problème est donc bien conditionné. Pour le résoudre par la méthode de fitting, on choisira une condition initiale supplémentaire, par exemple

$$\frac{dy}{dx} = c \quad \text{en} \quad x = 0 \quad (2.9)$$

La solution de ce problème s'écrit

$$y = \frac{10}{99} (10a - c) e^{x/10} + \frac{10c - a}{99} e^{10x} \quad (2.10)$$

Si on calcule maintenant la variation de la solution avec les conditions initiales (2.5), on obtient

$$\delta y = \frac{1}{99} (100e^{x/10} - e^{10x}) \delta a + \frac{10}{99} (e^{10x} - e^{x/10}) \delta c \quad (2.11)$$

où les coefficients de δa et de δc sont énormes : en $x = 10$ on a

$$\delta y(10) = -2,715.10^{41} \delta a + 2,715.10^{42} \delta c \quad (2.12)$$

Le problème est manifestement mal conditionné et son intégration numérique est impossible. Dans l'exemple choisi, l'équation est linéaire et on pourrait penser que la difficulté signalée peut être surmontée si on calcule deux solutions linéairement indépendantes et si on détermine ensuite les coefficients de la combinaison linéaire qui satisfait aux conditions limites. Cette façon de procéder donne des résultats aussi catastrophiques comme nous allons le montrer.

Soient y_1 et y_2 les solutions définies par les conditions en $x = 0$

$$\begin{cases} y_1 = 1 & \frac{dy_1}{dx} = 0 \\ y_2 = 0 & \frac{dy_2}{dx} = 1 \end{cases} \quad (2.13)$$

On obtient

$$\begin{cases} y_1(x) = \frac{100}{99} e^{x/10} - 99 e^{10x} \\ y_2(x) = -\frac{10}{99} e^{x/10} + \frac{10}{99} e^{10x} \end{cases} \quad (2.14)$$

Supposons que le calcul numérique nous ait fourni ces solutions exactement. Écrivons la solution du problème sous forme d'une combinaison linéaire de ces deux solutions indépendantes.

$$y = Cy_1 + Dy_2 \quad (2.15)$$

où les coefficients C et D sont déterminés par les conditions

$$\begin{cases} Cy_1(0) + Dy_2(0) = a \\ Cy_1(10) + Dy_2(10) = b \end{cases} \quad (2.16)$$

On obtient

$$\begin{cases} C = a \\ D = \frac{a}{10} \cdot \frac{1 - 100e^{-99}}{1 - e^{-99}} + \frac{99b}{10} \cdot \frac{e^{-100}}{1 - e^{-99}} \end{cases} \quad (2.17)$$

b est affecté d'un coefficient si petit comparativement aux autres termes et le nombre de chiffres gardés au cours des calculs étant limité, on voit que les coefficients C et D ne dépendent que de a et par conséquent la solution (2.15) où les coefficients ont été calculés numériquement ne peut pas satisfaire la condition en $x = 10$.

Pour être plus précis, désignons par δC et δD les erreurs d'arrondi commises sur C et D. L'erreur δy commise sur y s'écrira

$$\delta y = y_1 \delta C + y_2 \delta D \quad (2.16)$$

Dans cette expression, ne retenons que les termes en e^{10x} qui sont de loin les plus grands, il vient

$$\delta y = (10\delta D - \delta C) \frac{e^{10x}}{99} \quad (2.17)$$

en $x = 10$, on a

$$\delta y(10) = 2,7 \times 10^{41} (10\delta D - \delta C) \quad (2.18)$$

même en gardant quinze chiffres significatifs, on aurait encore

$$\delta y(10) \simeq 10^{26} \quad (2.19)$$

Bellman et Kalaba [2] ont effectivement intégré numériquement un exemple du même genre et montrent les résultats déplorables qu'on peut attendre de ce genre de méthodes.

G. Järnefelt [3] a également observé que si on intègre numériquement les équations de la structure stellaire par une méthode de fitting, il faudrait garder environ 20 chiffres significatifs dans les calculs.

Concluons ce paragraphe en insistant sur le danger de remplacer un problème bien conditionné par un problème mal conditionné, lorsqu'on le transforme en un problème aux conditions initiales. Il faudra employer pour ce type de problème une méthode d'intégration qui tient compte simultanément des conditions aux deux extrémités de l'intervalle.

3. UNE MÉTHODE DE DIFFÉRENCES FINIES

Divisons l'intervalle d'intégration $[a, b]$ en N sous-intervalles (non nécessairement égaux)

$$a = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_m < \dots < x_N < x_{N+1} = b \quad (3.1)$$

Nous noterons y_{jm} la valeur de y_j calculée au point x_m .

L'équation différentielle est remplacée par une suite d'équations algébriques faisant intervenir les $y_{i,m}$ et les λ_s pour un certain nombre de valeurs de m consécutives.

Si nous voulons garder à la méthode d'intégration la même souplesse qu'on obtient avec une méthode de type de Runge-Kutta, il faudra éviter de faire intervenir dans la même équation les valeurs des y_j en plus de deux points voisins (si on fait intervenir plus de deux points, il faut partitionner l'intervalle d'intégration en sous-intervalles égaux; de plus, le schéma d'intégration doit être modifié au voisinage des extrémités). Faisons remarquer que cette condition ne limite pas le choix de la méthode d'intégration aux seules méthodes d'ordre 2. Nous avons développé dans l'appendice une méthode d'ordre 4 qui satisfait à la condition.

Pour l'instant, nous raisonnerons à partir d'une méthode d'ordre 2 bien connue

$$f_i \left(\frac{x_m + x_{m+1}}{2}, \frac{y_{jm} + y_{j,m+1}}{2}, \frac{y_{k,m+1} - y_{k,m}}{x_{m+1} - x_m}, \lambda_s \right) = 0 \quad (3.2)$$

que nous noterons

$$g_{im}(y_{jm}, y_{j,m+1}, \lambda_s) = 0 \quad (3.3)$$

On a donc le système

$$\begin{cases} \varphi_\alpha(y_{j1}, \lambda_s) = 0 \\ g_{im}(y_{jm}, y_{j,m+1}, \lambda_s) = 0 \quad (m = 1, \dots, N) \\ \psi_\beta(y_{j,N+1}, \lambda_s) = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

où l'on a $n(N + 1) + r$ inconnues et le même nombre d'équations.

Il nous reste à résoudre ce système, non linéaire en général. Supposons qu'on connaisse une solution approchée λ_s^0, y_{jm}^0 . Nous noterons $\varphi_\alpha^0, g_{im}^0, \psi_\beta^0$ les valeurs des premiers membres des équations lorsqu'on y substitue la solution approchée.

Écrivons la solution cherchée sous la forme

$$\begin{cases} \lambda_s = \lambda_s^0 + \Delta\lambda_s \\ y_{jm} = y_{jm}^0 + \Delta y_{jm} \end{cases} \quad (3.5)$$

et développons les premiers membres en série de Taylor jusqu'au premier ordre en les $\Delta\lambda_s$ et Δy_{jm} , il vient

$$\begin{cases} \varphi'_\alpha \equiv \varphi_\alpha^0 + \left(\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y_{j1}} \right)^0 \Delta y_{j1} + \left(\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \lambda_s} \right)^0 \Delta \lambda_s = 0 \\ g_{im}^0 \equiv g_{im}^0 + \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial y_{jm}} \right)^0 \Delta y_{jm} + \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial y_{j,m+1}} \right)^0 \Delta y_{j,m+1} + \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial \lambda_s} \right)^0 \Delta \lambda_s = 0 \\ \psi'_\beta \equiv \psi_\beta^0 + \left(\frac{\partial \psi_\beta}{\partial y_{j,N+1}} \right)^0 \Delta y_{j,N+1} + \left(\frac{\partial \psi_\beta}{\partial \lambda_s} \right)^0 \Delta \lambda_s = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

On calcule la solution $\Delta\lambda_s, \Delta y_{jm}$ de ce système linéaire. On applique les corrections à la solution approchée et on recommence le même calcul avec la solution ainsi obtenue. On terminera le calcul lorsque les corrections obtenues seront jugées suffisamment petites.

Il faut être extrêmement prudent dans la résolution du système linéaire car certaines méthodes de résolution peuvent conduire aux mêmes écueils que ceux que nous avons mis en évidence au paragraphe précédent. Nous avons utilisé la méthode suivante, qui semble donner satisfaction.

Considérons les $n + p$ équations

$$\begin{cases} \varphi'_\alpha = 0 \\ g'_{i1} = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

et exprimons les Δy_{j1} en fonction des Δy_{j2} et $\Delta \lambda_s$.

Il nous restera p équations linéaires en les Δy_{j2} , $\Delta \lambda_s$ que nous noterons $\varphi'_{\alpha 2} = 0$. Nous recommencerons le même calcul avec les équations

$$\begin{cases} \varphi'_{\alpha 2} = 0 \\ g'_{i2} = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

exprimant les Δy_{j2} en fonction des Δy_{j3} , $\Delta \lambda_s$.

Ainsi de proche en proche, nous obtiendrons finalement p équations

$$\varphi'_{\alpha N+1} = 0 \quad (3.9)$$

qui jointes aux q équations

$$\psi'_\beta = 0 \quad (3.10)$$

forment un système linéaire à $p + q = n + r$ équations et à $n + r$ inconnues. On en tirera les $\Delta \lambda_s$, Δy_{jN+1} . On pourra alors calculer successivement les

$$\Delta y_{jN}, \Delta y_{jN-1}, \dots, \Delta y_{j1}.$$

Nous avons appliqué la méthode d'ordre 4 exposée dans l'appendice à la résolution de l'exemple traité dans le paragraphe précédent. Nous avons pris les conditions limites $y = 1$ en $x = 0$ et en $x = 10$. Les calculs ont été effectués avec un pas de 0,01 en double précision sur un ordinateur 360/65. Nous avons pris comme première approximation $y = 1$ dans tout l'intervalle. Nous avons comparé la solution obtenue à la solution analytique. L'erreur maximum était de $-5,39 \times 10^{-7}$. Le tableau I donne pour diverses valeurs de x la différence entre la solution calculée et la solution analytique. La comparaison de l'ordre de grandeur de l'erreur et de la valeur du pas adopté montre que notre méthode est effectivement d'ordre 4.

TABLEAU I

x	erreur
0	0
1	$-1,67.10^{-8}$
2	$-3,68.10^{-8}$
3	$-6,11.10^{-8}$
4	$-9,00.10^{-8}$
5	$-1,24.10^{-7}$
6	$-1,65.10^{-7}$
7	$-2,13.10^{-7}$
8	$-2,69.10^{-7}$
9	$-3,34.10^{-7}$
10	0

4. DISCUSSION

Nous avons vu qu'avec une méthode aux différences finies, on pouvait éviter les écueils des méthodes de fitting tout en gardant la même souplesse (possibilité d'utiliser un pas variable) et la même précision (ordre 4). Il faut cependant attirer l'attention sur les inconvénients de ce type de méthodes.

Elles nécessitent un nombre de mémoires de l'ordre de $Nn(n + r + 1)$. Pour des systèmes d'ordre un peu élevé, lorsqu'on désire une précision nécessitant un pas très petit, ce nombre est très élevé. Par contre les méthodes de fitting n'exigent qu'un nombre très réduit de mémoires. Comme on construit des calculateurs ayant des mémoires de plus en plus étendues, cette exigence devient de moins en moins difficile à satisfaire.

Elles exigent la connaissance d'une approximation de la solution à calculer. Or, il n'existe aucune méthode générale pour obtenir de telles approximations. Cependant, lorsqu'on traite un problème particulier, il est bien rare qu'on ne possède aucune information sur la solution du problème. D'autre part, l'expérience nous a montré que dans beaucoup de cas, une approximation fort grossière suffisait.

5. REMERCIEMENTS

Je remercie Monsieur le Professeur P. Ledoux pour ses conseils et pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail. Je remercie également le Fonds National de la Recherche Scientifique pour le mandat qu'il m'a accordé.

APPENDICE

Montrons comment on peut obtenir une méthode de différences finies d'ordre 4 ne faisant intervenir que deux points consécutifs. Nous noterons x_1 et x_2 ces deux points. Affectons de l'indice 0 les grandeurs relatives au point milieu de l'intervalle et posons $h = x_2 - x_1$.

En supposant les y_j dérivables autant de fois qu'il sera nécessaire, on peut écrire

$$y_{j2} = y_{j0} + \frac{h}{2} y'_{j0} + \frac{h^2}{8} y''_{j0} + \frac{h^3}{48} y'''_{j0} + \frac{h^4}{384} y^{IV}_{j0} + 0(h^5) \quad (\text{A.1})$$

$$y_{j1} = y_{j0} - \frac{h}{2} y'_{j0} + \frac{h^2}{8} y''_{j0} - \frac{h^3}{48} y'''_{j0} + \frac{h^4}{384} y^{IV}_{j0} + 0(h^5) \quad (\text{A.2})$$

$$y'_{j2} = y'_{j0} + \frac{h}{2} y''_{j0} + \frac{h^2}{8} y'''_{j0} + \frac{h^3}{48} y^{IV}_{j0} + \frac{h^4}{384} y^V_{j0} + 0(h^5) \quad (\text{A.3})$$

$$y'_{j1} = y'_{j0} - \frac{h}{2} y''_{j0} + \frac{h^2}{8} y'''_{j0} - \frac{h^3}{48} y^{IV}_{j0} + \frac{h^4}{384} y^V_{j0} + 0(h^5) \quad (\text{A.4})$$

De (A.1) et (A.2), on tire

$$\frac{y_{j1} + y_{j2}}{2} = y_{j0} + \frac{h^2}{8} y''_{j0} + 0(h^4) \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{y_{j2} - y_{j1}}{h} = y'_{j0} + \frac{h^2}{24} y'''_{j0} + 0(h^4) \quad (\text{A.6})$$

De (A.3) et (A.4) on tire

$$\frac{y'_{j1} + y'_{j2}}{2} = y'_{j0} + \frac{h^2}{8} y''_{j0} + 0(h^4) \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{y'_{j2} - y'_{j1}}{h} = y''_{j0} + \frac{h^2}{24} y''''_{j0} + 0(h^4) \quad (\text{A.8})$$

En éliminant $y'_{j'}$ entre (A.5) et (A.8) on obtient

$$y_{j0} = \frac{y_{j1} + y_{j2}}{2} - \frac{h}{8} (y'_{j2} - y'_{j1}) + 0(h^4) \quad (\text{A.9})$$

En éliminant $y'_{j''}$ entre (A.6) et (A.7), il vient

$$y'_{j0} = \frac{3}{2} \frac{y_{j2} - y_{j1}}{h} - \frac{y'_{j1} + y'_{j2}}{h} + 0(h^4) \quad (\text{A.10})$$

On écrira l'équation différentielle au point x_0 en prenant pour y_{j0} et y'_{j0} les approximations d'ordre 4 ci-dessus.

Désignons par

$$g_{i1}(y_{j1}, y'_{j1}, y_{j2}, y'_{j2}, \lambda_s) = 0 \quad (\text{A.11})$$

l'expression ainsi obtenue.

Nous avons introduit les inconnues supplémentaires y'_{jm} .

Nous avons donc au total $2n(N + 1) + r$ inconnues. Nous avons les équations

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi_\alpha(y_{j1}, \lambda_s) = 0 & \alpha = 1, \dots, p \\ f_{im}(y_{jm}, y'_{jm}, \lambda_s) = 0 & i = 1, \dots, n; m = 1, \dots, N + 1 \\ g_{im}(y_{jm}, y'_{im}, y_{jm+1}, y'_{jm+1}, \lambda_s) = 0 & m = 1, \dots, N \\ \psi_\beta(y_{jN+1}, \lambda_s) = 0 & \beta = 1, \dots, q \end{array} \right. \quad (\text{A.12})$$

Soit au total $n(2N + 1) + p + q = 2n(N + 1) + r$ équations, c'est-à-dire autant que d'inconnues. Remarquons que nous pouvons utiliser des conditions limites un peu plus générales de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_\alpha(y'_{j1}, y_{j1}, \lambda_s) = 0 \\ \psi_\beta(y_{jN+1}, y'_{jN+1}, \lambda_s) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.13})$$

Ce système d'équations se met aisément sous la même forme que celui qui provient d'une méthode d'ordre 2. Il suffit de poser

$$\left\{ \begin{array}{ll} z_{jm} = y_{jm}, z_{n+j,m} = y'_{jm} & (j = 1, \dots, n) \\ h_{jm} = f_{im}, h_{n+i,m} = g_{im} & (i = 1, \dots, n) \\ \psi'_\beta = f_{\beta, N+1} (\beta = 1, n); \psi'_{n+\beta} = \psi_\beta & (\beta = 1, q) \end{array} \right. \quad (\text{A.14})$$

et il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_\alpha(z_{j1}, \lambda_s) = 0 \\ h_{im}(z_{jm}, z_{jm+1}, \lambda_s) = 0 \\ \psi'_\beta(z_{jN+1}, \lambda_s) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.15})$$

où i et j varient de 1 à $2n$, les indices s, α, β varient respectivement de 1 à r , de 1 à p et de 1 à $n + q$.

REFERENCES

- [1] COLLATZ, L., 1966, *The Numerical Treatment of differential equations*, 3rd edition, Springer Verlag.
- [2] BELLMAN, R. E. and KALABA, R. E., 1965, *Quazilinearization and non linear boundary-value problems*, American Elsevier Publishing Company Inc., chapitre IV, § 21.
- [3] JÄRNEFELT, 1950, *Reflections on the integration of stellar models. Soc. Scient. Fenn., Comm. Phys.-Math., XV, 18.*