CHAPITRE I

RÉSEAUX DANS LES ESPACES LINÉAIRES A SEMI-NORMES

On introduit dans ce chapitre les réseaux de type $\mathscr{C}$. On en donne quelques exemples simples et on examine leurs propriétés de permanence.

1. Espaces linéaires à semi-normes

Dans l'ensemble du travail, nous nous plaçons dans le cadre des *espaces linéaires à semi-normes,* ou *espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés.* L'étude autonome de ces espaces à partir de leur système de semi-normes peut être trouvée dans [17]. Le lecteur qui adopte le point de vue des espaces topologiques généraux trouvera dans les définitions qui suivent le raccord avec les notions topologiques usuelles.

DÉFINITIONS. — Nous appelons *espace linéaire à semi-normes* un espace vectoriel topologique localement convexe séparé. Nous caractérisons sa topologie par un *système de semi-normes,* c'est-à-dire un ensemble filtrant et séparant de semi-normes.

Chaque fois que nous considérons un espace linéaire à semi-normes, nous le supposons muni d'un tel système.

La comparaison des topologies d'un espace s'exprime simplement en termes d'inégalités, au moyen des systèmes de semi-normes associés : si $\mathfrak{t}_{\{p\}}$ est la topologie associée à $\{p\}$, on dit que $\{p\}$ est *plus fort que* $\{q\}$ *dans* E et on note $\{p\} \geqslant \{q\}$ si $\mathfrak{t}_{\{p\}}$ est plus fin que $\mathfrak{t}_{\{q\}}$.

On a $\{p\} \geqslant \{q\}$ *si et seulement si, à tout* $q \in \{q\}$, *il correspond* $C > 0$ *et* $p \in \{p\}$ *tels que*

$$q(f) \leqslant C\, p(f), \ \forall f \in E.$$

En outre $\{p\}$ est *plus faible que* $\{q\}$ *dans* E si $\{q\} \geqslant \{p\}$ et $\{p\}$ est *équivalent à* $\{q\}$ *dans* E si $\{p\} \geqslant \{q\} \geqslant \{p\}$.

Si p est une semi-norme dans E, on appelle *semi-boule ouverte* (resp. *fermée*) *de centre* $f \in E$, *de rayon* $r > 0$ *et de semi-norme* p l'ensemble

$$b_p(f, r) = \{g \in E : p(f - g) < (\text{resp.} \leqslant) \, r\}.$$

Quand $f = 0$, on emploie la notation $b_p(r)$ pour $b_p(0, r)$.

Les semi-boules $b_p(0, r)$, $p \in \{p\}$, $r > 0$, constituent une base de voisinages de 0 dans E pour la topologie $\mathfrak{t}_{\{p\}}$.

Quand on parlera de semi-normes ou de semi-boules dans E, *il s'agira, sauf mention explicite, de semi-normes et de semi-boules relatives au système de semi-normes fixé dans* E.

Pour les diverses autres notions dont on fera usage dans ce travail, nous suivons la terminologie généralement admise. Pour prévenir toute confusion, nous les préciserons chaque fois que ce sera utile.

Signalons dès à présent que nous appelons *sq-complet* ou complet pour les suites un ensemble e dont les suites de Cauchy convergent vers un élément de e. Un ensemble est dit *sq-fermé* ou fermé pour les suites s'il contient les limites de ses suites convergentes dans E. Ainsi, tout ensemble *sq*-complet est *sq*-fermé.

2. Réseaux de type $\mathscr{C}$

Définitions. — Soit E un espace linéaire à semi-normes. On appelle *réseau* de E et on désigne par $\mathscr{R}$ une famille d'ensembles de E,

$$e_{n_1, \ldots, n_k}, \quad k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N},$$

caractérisés par un nombre fini variable d'indices entiers positifs, tels que

$$\mathrm{E} = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} e_{n_1}$$

et

$$e_{n_1, \ldots, n_{k-1}} = \bigcup_{n_k=1}^{\infty} e_{n_1, \ldots, n_k},$$

quels que soient $k > 1$ et $n_1, \ldots, n_{k-1} \in \mathbb{N}$.

On dit que le réseau $\mathscr{R}$ est *fermé, absolument convexe*, ..., si les différents ensembles qui le constituent sont fermés, absolument convexes, ...

Il est immédiat que

$$e_{n_1, \ldots, n_{k-1}} \subset e_{n_1, \ldots, n_k}$$

quels que soient $k > 1$, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$.

S'il existe dans E une famille d'ensembles $e'_{n_1, \ldots, n_k}$ tels que

$$\mathrm{E} = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} e'_{n_1}$$

et

$$e'_{n_1, \ldots, n_{k-1}} \subset \bigcup_{n_k=1}^{\infty} e'_{n_1, \ldots, n_k},$$

quels que soient $k > 1$ et $n_1, \ldots, n_{k-1} \in \mathbb{N}$, on en déduit sans peine un réseau, constitué par les ensembles

$$e_{n_1, \ldots, n_k} = e'_{n_1} \cap e'_{n_1, n_2} \cap \ldots \cap e'_{n_1, \ldots, n_k}.$$

Un réseau $\mathscr{R}$ de E est *de type* $\mathscr{C}$ s'il satisfait à la condition suivante.

Pour toute suite d'indices n_k, $k \in \mathbb{N}$, il existe une suite de $\lambda_k > 0$ tels que, quels que soient $f_k \in e_{n_1, \ldots, n_k}$ et $\mu_k \in [0, \lambda_k]$, la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k$$

converge dans E.

Cette condition sera mentionnée plus loin sous le nom de *condition* ($\mathscr{C}$).

La suite λ_k, $k \in \mathbb{N}$, sera appelée « *suite associée aux* n_k *dans* $\mathscr{R}$ ».

Enfin, quand on parlera d'une *suite d'ensembles de* $\mathscr{R}$, on entendra toujours une suite $e_{n_1,\ldots,n_k}$, $k \in \mathbb{N}$.

On peut souvent substituer à la condition $\mathscr{C}$ une condition plus simple à vérifier.

Lemme. — *Si* B *est absolument convexe, borné et sq-complet, pour toute suite* $f_n \in \mathrm{B}$ *et toute suite de nombres* $c_n \in \mathbb{C}$ *tels que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} | c_n | < \infty,$$

la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$$

converge dans E.

La suite des sommes partielles $\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} c_n f_n$ est de Cauchy, car, pour toute semi-norme p,

$$p\,(\sum_{n=r}^{s} c_n f_n) \leqslant \sum_{n=r}^{s} | c_n | \, p(f_n)$$

$$\leqslant \sum_{n=r}^{s} | c_n | \sup_{f \in \mathrm{B}} p(f) \to 0$$

si $\inf (r, s) \to \infty$.

Or, si

$$\sum_{n=1}^{\infty} | c_n | \leqslant c,$$

comme B est absolument convexe, on a

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} c_n f_n \in c\mathrm{B}, \ \forall \mathrm{N},$$

où $c\mathrm{B}$ est sq-complet, d'où la convergence de la série.

Proposition 1. — *Un réseau* $\mathscr{R}$ *de* E *est de type* $\mathscr{C}$ *si, pour toute suite* n_k, $k \in \mathbb{N}$, *il existe* $\lambda_k > 0$ *tels que, quels que soient* $f_k \in e_{n_1,\ldots,n_k}$, *la suite* $\lambda_k f_k$ *soit contenue dans un borné absolument convexe et sq-complet de* E.

En particulier, si E *est sq-complet, il suffit que cette suite soit bornée.*

De fait, si on pose $\lambda'_k = 2^{-k}\lambda_k$, quels que soient $f_k \in e_{n_1,\ldots,n_k}$ et $\mu_k \in [0, \lambda'_k]$, on a

$$\mu_k f_k = c_k \lambda_k f_k,$$

avec

$$\sum_{k=1}^{\infty} | c_k | < \infty,$$

d'où, vu le lemme, la série $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k$ converge.

Si E est *sq*-complet et si la suite $\lambda_k f_k$ est bornée, on note qu'elle est contenue dans son enveloppe absolument convexe fermée, qui est *sq*-complète.

Voici encore quelques résultats utiles.

Proposition 2. — *Si $\mathscr{R}$ est un réseau de type $\mathscr{C}$ dans* E, *on peut lui associer un réseau $\mathscr{R}'$ de type $\mathscr{C}$, formé d'ensembles $e'_{n_1,\dots,n_k}$ radiaux, c'est-à-dire tels que*

$$\lambda e'_{n_1,\dots,n_k} \subset e'_{n_1,\dots,n_k}, \ \forall \lambda \in [0, 1].$$

Il suffit de substituer aux $e_{n_1,\dots,n_k}$ les ensembles

$$e'_{n_1,\dots,n_k} = \bigcup_{0 \leqslant \lambda \leqslant 1} \lambda e_{n_1,\dots,n_k}.$$

En effet, on a

$$\mathrm{E} = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} e_{n_1} = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} e'_{n_1}$$

et

$$\begin{aligned} e'_{n_1,\dots,n_{k-1}} &= \bigcup_{0 \leqslant \lambda \leqslant 1} \ \bigcup_{n_k=1}^{\infty} \lambda e_{n_1,\dots,n_k} \\ &= \bigcup_{n_k=1}^{\infty} e'_{n_1,\dots,n_k}, \end{aligned}$$

quels que soient $k > 1$ et $n_1, \dots, n_{k-1} \in \mathbb{N}$.

De plus, si, quand $f_k \in e_{n_1,\dots,n_k}$ et $0 \leqslant \mu_k \leqslant \lambda_k$, la série $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k$ converge, c'est encore vrai quand on substitue aux $e_{n_1,\dots,n_k}$ les $e'_{n_1,\dots,n_k}$, car $f_k \in e'_{n_1,\dots,n_k}$ s'écrit $\nu_k g_k$, avec $\nu_k \in [0, 1]$ et $g_k \in e_{n_1,\dots,n_k}$, d'où $\mu_k f_k = (\mu_k \nu_k) g_k$, avec $\mu_k \nu_k \in [0, \lambda_k]$ et $g_k \in e_{n_1,\dots,n_k}$.

Proposition 3. — *Si $\mathscr{R}$ est un réseau de type $\mathscr{C}$ dans* E, *on peut lui associer un réseau*

$$\mathscr{R}' = \{e'_{n_1,\dots,n_k} : k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}\},$$

de type $\mathscr{C}$ et tel que tout ensemble e absorbé par une suite d'ensembles de $\mathscr{R}$ soit contenu dans une suite d'ensembles de $\mathscr{R}'$. Autrement dit, s'il existe $\nu_k > 0$ et $n_k \in \mathbb{N}$ tels que

$$e \subset \nu_k e_{n_1,\dots,n_k}, \ \forall k \in \mathbb{N},$$

il existe $n'_k \in \mathbb{N}$ tels que

$$e \subset e'_{n'_1,\dots,n'_k}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Vu la proposition précédente, on peut supposer que $\mathscr{R}$ est formé d'ensembles radiaux.

Le réseau $\mathscr{R}'$ est alors constitué de la façon suivante.

On appelle $e'_{n'_1}$ les ensembles

$$m_1 e_{n_1},\ m_1,\ n_1 \in \mathbb{N},$$

renumérotés avec un seul indice $n'_1 \in \mathbb{N}$.

Les $e'_{n'_1, n'_2}$ s'obtiennent en renumérotant avec un seul indice n'_2 les ensembles

$$m_1 e_{n_1} \cap m_2 e_{n_1, n_2},\ m_2,\ n_2 \in \mathbb{N},$$

où (m_1, n_1) est le couple d'indices associé à n'_1.

De même, quel que soit k, les $e'_{n'_1, \ldots, n'_k}$ sont les ensembles

$$e'_{n'_1, \ldots, n'_{k-1}} \cap m_k e_{n_1, \ldots, n_k},\ m_k,\ n_k \in \mathbb{N},$$

où $n_1, \ldots, n_{k-1}$ sont les indices correspondant à $n'_1, \ldots, n'_{k-1}$.

Les ensembles $e'_{n'_1, \ldots, n'_k}$ constituent visiblement un réseau de E.

Vérifions que ce réseau est de type $\mathscr{C}$.

Fixons une suite n'_k, $k \in \mathbb{N}$ et notons (m_k, n_k) les couples d'indices correspondant aux n'_k.

Comme $\mathscr{R}$ est de type $\mathscr{C}$, aux n_k correspondent λ_k tels que

$$\left.\begin{array}{l} f_k \in e_{n_1, \ldots, n_k} \\ 0 \leqslant \mu_k \leqslant \lambda_k \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k \text{ converge.}$$

On pose alors $\lambda'_k = \lambda_k / m_k$. Comme visiblement

$$e'_{n'_1, \ldots, n'_k} \subset m_k e_{n_1, \ldots, n_k},\ \forall k \in \mathbb{N},$$

on a

$$\left.\begin{array}{l} f_k \in e'_{n'_1, \ldots, n'_k} \\ 0 \leqslant \mu_k \leqslant \lambda'_k \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k \text{ converge.}$$

Enfin, soit e tel que

$$e \subset \nu_k e_{n_1, \ldots, n_k},\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Fixons $m_k \in \mathbb{N}$ tel que $\nu_k \leqslant m_k$. Comme les $e_{n_1, \ldots, n_k}$ sont radiaux, on a alors

$$e \subset \bigcap_{i=1}^{k} m_i e_{n_1, \ldots, n_i},\ \forall k \in \mathbb{N},$$

où les ensembles du second membre forment une suite $e'_{n'_1, \ldots, n'_k}$ de $\mathscr{R}'$.

Proposition 4. — *Supposons $\mathscr{R}$ de type $\mathscr{C}$. Pour toute suite n_k fixée, il existe une suite de nombres λ_k tels que, quels que soient $p \in \{p\}$ et $\varepsilon > 0$,*

$$\lambda_k e_{n_1, \ldots, n_k} \subset b_p(\varepsilon)$$

pour k assez grand.

Prenons pour λ_k la suite associée aux n_k dans $\mathscr{R}$. Elle répond à la question.

En effet, si ce n'est pas le cas pour p et ε, il existe une suite f_{k_i}, avec $k_i \uparrow \infty$, telle que

$$f_{k_i} \in e_{n_1, \ldots, n_{k_i}} \text{ et } \lambda_{k_i} f_{k_i} \notin b_p(\varepsilon).$$

Si $k \neq k_i$ quel que soit i, choisissons f_k arbitrairement dans $e_{n_1, \ldots, n_k}$ et posons $\mu_k = 0$. Pour $k = k_i$, posons $\mu_{k_i} = \lambda_{k_i}$.

Vu la définition du réseau, la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k$$

converge dans E, donc son terme général tend vers 0 et, en particulier, $\lambda_{k_i} f_{k_i} \in b_p(\varepsilon)$ dès que i est assez grand, ce qui est absurde.

3. Exemples

Les espaces usuels de l'analyse fonctionnelle admettent un réseau de type $\mathscr{C}$. Avant d'en donner des exemples, précisons quelques définitions.

Définitions. — Si le système de semi-normes de E est dénombrable, on dit que E est *à semi-normes dénombrables.* Il revient au même de dire qu'il est *métrisable.* On peut alors supposer que ses semi-normes sont croissantes :

$$p_1(f) \leqslant p_2(f) \leqslant \ldots, \forall f \in \mathrm{E}.$$

Les semi-boules $b_{p_n}(1/n)$ forment alors une suite fondamentale de voisinages de 0.

Un espace à semi-normes dénombrables et *sq*-complet est un espace *de Fréchet.*

Soit $\mathcal{T}$ une fonctionnelle linéaire dans E. Elle est *continue* s'il existe $p \in \{p\}$ et $\mathrm{C} > 0$ tels que

$$| \mathcal{T}(f) | \leqslant \mathrm{C}\, p(f), \forall f \in \mathrm{E}.$$

Cela revient à dire qu'elle est continue par rapport à la topologie $\mathfrak{t}_{\{p\}}$. Elle est *sq-continue* si $\mathcal{T}(f_m) \rightarrow \mathcal{T}(f)$ quand $f_m \rightarrow f$ dans E.

Un ensemble $\mathscr{A}$ de fonctionnelles linéaires dans E est *équicontinu* s'il existe $p \in \{p\}$ et $\mathrm{C} > 0$ tels que

$$\sup_{\mathcal{T} \in \mathscr{A}} | \mathcal{T}(f) | \leqslant \mathrm{C}\, p(f), \forall f \in \mathrm{E}.$$

Le *dual* de E est l'ensemble des fonctionnelles linéaires continues dans E. On le note E*. On y définit des systèmes de semi-normes de la manière suivante.

Soit $\mathscr{F}$ un ensemble de bornés de E tel que

— quels que soient $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_\mathrm{N} \in \mathscr{F}$, il existe $\mathrm{B} \in \mathscr{F}$ et $\mathrm{C} > 0$ tels que

$$\mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_\mathrm{N} \subset \mathrm{CB}.$$

— $\mathrm{E} = \bigcup_{\mathrm{B} \in \mathscr{F}} \mathrm{B}.$

Les expressions

$$\sup_{f \in \mathrm{B}} | \mathcal{T}(f) |, \mathrm{B} \in \mathscr{F},$$

constituent un système de semi-normes de E^*. On note $E^*_{\mathscr{F}}$ l'espace E^* muni de ce système de semi-normes. Voici les exemples usuels d'ensembles $\mathscr{F}$ et les notations correspondantes pour $E^*_{\mathscr{F}}$:

— E^*_s : $\mathscr{F} = \{$ensembles finis de E$\}$.
— E^*_b : $\mathscr{F} = \{$bornés de E$\}$.
— E^*_{pc} : $\mathscr{F} = \{$précompacts de E$\}$.
— E^*_c : $\mathscr{F} = \{$compacts de E$\}$.
— E^*_{ca} : $\mathscr{F} = \{$compacts absolument convexes de E$\}$.
— E^*_τ : $\mathscr{F} = \{$compacts faibles absolument convexes de E$\}$.

Soient E et F deux espaces linéaires munis respectivement des systèmes de semi-normes $\{p\}$ et $\{q\}$ et soit T un opérateur linéaire de E dans F.

L'opérateur T est *continu* si, à toute semi-norme q de F, il correspond une semi-norme p de E et une constante positive C telles que

$$q(Tf) \leqslant C\, p(f),\ \forall f \in E.$$

Il est *sq-continu* si $Tf_m \to Tf$ dans F quand $f_m \to f$ dans E.

Un ensemble $\mathscr{B}$ d'opérateurs linéaires de E dans F est *équicontinu* si, pour tout $q \in \{q\}$, il existe $p \in \{p\}$ et $C > 0$ tels que

$$\sup_{T \in \mathscr{B}} q(Tf) \leqslant C\, p(f),\ \forall f \in E.$$

L'ensemble des opérateurs linéaires continus de E dans F est un espace linéaire, noté $\mathscr{L}(E, F)$. On y définit des systèmes de semi-normes de la même manière que dans E^* : soit $\mathscr{F}$ la famille de bornés de E considérée ci-dessus. Les expressions

$$\sup_{f \in B} q(Tf),$$

où B parcourt $\mathscr{F}$ et q l'ensemble $\{q\}$ des semi-normes de F, constituent un système de semi-normes de $\mathscr{L}(E, F)$. Muni de ces semi-normes, il est noté $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}(E, F)$.

Par analogie avec les conventions relatives à $E^*_{\mathscr{F}}$, à $\mathscr{F}$, ensemble des ensembles finis de E, correspond $\mathscr{L}_s(E, F)$; à $\mathscr{F}$, ensemble des bornés de E, correspond $\mathscr{L}_b(E, F)$; etc.

Exemple 1. — *Tout espace de Fréchet admet un réseau de type* $\mathscr{C}$.

Soit $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$, le système de semi-normes de E. Considérons les ensembles

$$e_{n_1,\ldots,n_k} = b_{p_1}(n_1) \cap \ldots \cap b_{p_k}(n_k),\ k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}.$$

Ils constituent visiblement un réseau de E. De plus, pour toute suite n_k fixée, si $0 \leqslant \mu_k \leqslant 1/(2^k n_k)$ et si $f_k \in e_{n_1,\ldots,n_k}$, la série $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k$ est absolument convergente, donc convergente dans E.

Exemple 2. — *Si* E *est à semi-normes dénombrables et* $\mathscr{F}$ *de Fréchet,* $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}(E, F)$ *admet un réseau de type* $\mathscr{C}$ *quel que soit* $\mathscr{F}$.

On en déduit immédiatement le

Corollaire. — *Si* E *est à semi-normes dénombrables,* $E^*_{\mathscr{F}}$ *admet un réseau de type* $\mathscr{C}$ *quel que soit* $\mathscr{F}$.

Soient E et F munis respectivement des systèmes de semi-normes $\{p_i : i \in \mathbb{N}\}$ et $\{q_j : j \in \mathbb{N}\}$, où l'on peut supposer que $p_i(f) \leqslant p_{i+1}(f)$ pour tout i et tout $f \in \mathrm{E}$. Posons

$$e_n^{(k)} = \{\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F}) : q_k(\mathrm{T}f) \leqslant n\, p_n(f),\ \forall f \in \mathrm{E}\}.$$

Les ensembles

$$e_{n_1, \ldots, n_k} = e_{n_1}^{(1)} \cap \ldots \cap e_{n_k}^{(k)},\ k,\ n_1,\ \ldots,\ n_k \in \mathbb{N},$$

constituent un réseau de $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ car, si T est continu de E dans F, pour tout k, il existe n_k tel que $\mathrm{T} \in e_{n_k}^{(k)}$.

Soit n_k, $k \in \mathbb{N}$, une suite fixée arbitrairement.

Si $\mathrm{T}_k \in e_{n_1, \ldots, n_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite T_k est équicontinue.

En effet, soit k_0 fixé. On a, pour tout $k \geqslant k_0$,

$$q_{k_0}(\mathrm{T}_k f) \leqslant n_{k_0} p_{n_{k_0}}(f),\ \forall f \in \mathrm{E}.$$

De plus, pour $k < k_0$, il existe $\mathrm{C}_k > 0$ et $\nu_k \in \mathbb{N}$ tels que

$$q_{k_0}(\mathrm{T}_k f) \leqslant \mathrm{C}_k p_{\nu_k}(f),\ \forall f \in \mathrm{E}.$$

Il existe alors C et p tels que

$$\mathrm{C}_1 p_{\nu_1}(f),\ \ldots,\ \mathrm{C}_{k_0-1} p_{\nu_{k_0-1}}(f),\ n_{k_0} p_{k_0}(f) \leqslant \mathrm{C}\, p(f),\ \forall f \in \mathrm{E},$$

donc tels que

$$q_{k_0}(\mathrm{T}_k f) \leqslant \mathrm{C}\, p(f),\ \forall f \in \mathrm{E},\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Or tout ensemble équicontinu de la forme

$$\{\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F}) : q_i(\mathrm{T}f) \leqslant \mathrm{C}_i\, p_{k_i}(f),\ \forall f \in \mathrm{E},\ \forall i\}$$

est absolument convexe et sq-complet dans $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, d'où la conclusion, par la proposition 1, p. 15.

Remarque. — Dans le corollaire, pour obtenir la forme explicite du réseau de $\mathrm{E}^*_{\mathscr{F}}$, il suffit, dans ce qui précède, de remplacer $q_k(\mathrm{T}f)$ par $|\, \mathcal{T}(f)\, |$. En fait, le résultat obtenu est inutilement compliqué et le réseau suivant est de type $\mathscr{C}$ dans $\mathrm{E}^*_{\mathscr{F}}$:

$$e_{n_1} = \{\mathcal{T} \in \mathrm{E}^*_{\mathscr{F}} : |\, \mathcal{T}(f)\, | \leqslant n_1 p_{n_1}(f),\ \forall f \in \mathrm{E}\},\ n_1 \in \mathbb{N},$$

$$e_{n_1, \ldots, n_k} = e_{n_1},\ k > 1,\ n_1,\ \ldots,\ n_k \in \mathbb{N}.$$

Exemple 3. — *Si* E *est limite inductive d'une suite d'espaces à semi-normes dénombrables* E_i, $\mathrm{E}^*_{\mathscr{F}}$ *admet un réseau de type* $\mathscr{C}$ *quel que soit* $\mathscr{F}$.

Soit $\{p_n^{(i)} : n \in \mathbb{N}\}$ le système de semi-normes de chaque E_i. Posons

$$e_n^{(i)} = \{\mathcal{T} \in \mathrm{E}^* : |\, \mathcal{T}(f)\, | \leqslant n\, p_n^{(i)}(f),\ \forall f \in \mathrm{E}_i\}.$$

Les ensembles

$$e_{n_1, \ldots, n_k} = e_{n_1}^{(1)} \cap \ldots \cap e_{n_k}^{(k)},\ k,\ n_1,\ \ldots,\ n_k \in \mathbb{N},$$

constituent visiblement un réseau de $\mathrm{E}^*_{\mathscr{F}}$.

Montrons que ce réseau est de type $\mathscr{C}$. Il suffit pour cela de prouver que, pour toute suite n_k, $k \in \mathbb{N}$, fixée, si $\mathcal{T}_k \in e_{n_1, \ldots, n_k}$, la suite $\mathcal{T}_k$ est équicontinue. En effet, son enveloppe absolument convexe est alors *sq*-complète dans $E^*_{\mathscr{F}}$ et on conclut par la proposition 1, p. 15.

Pour que l'ensemble des $\mathcal{T}_k$ soit équicontinu dans E, il suffit qu'il le soit dans chaque E_i. Or, pour $k \geqslant i$, les $\mathcal{T}_k$ sont équicontinus dans E_i. De même, $\{\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_{i-1}\}$, ensemble fini, y est équicontinu. D'où la conclusion.

Exemple 4. — *Si* E *est sq-complet et s'il est souslinien ou* K-*souslinien, il admet un réseau de type* $\mathscr{C}$.

Supposons d'abord E souslinien (cf. p. 100). Il admet alors un réseau

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1, \ldots, n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\},$$

tel que, pour toute suite n_k fixée, si $f_k \in e_{n_1, \ldots, n_k}$, f_k converge vers une limite qui ne dépend que des n_k. Cette suite f_k est donc bornée et on conclut par la proposition 1, p. 15.

Supposons à présent E K-souslinien.

Cela signifie (cf. Martineau [32] ou [33]), qu'il existe un espace E_0 souslinien (qui n'est pas nécessairement un espace vectoriel topologique) et une application φ définie de E_0 dans l'ensemble des compacts de E, tels que

$$E = \bigcup_{f \in E_0} \varphi(f)$$

et que, pour tout $f_0 \in E_0$, tout $p \in \{p\}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de f_0 tel que

$$f \in V \Rightarrow \varphi(f) \subset \varphi(f_0) + b_p(\varepsilon).$$

On vérifie aisément que l'image par φ d'une suite convergente de E_0 est bornée dans E.

En effet, soit $f_n \to f_0$. Pour n assez grand, soit $n > n_0$, on a $f_n \in V$, d'où

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi(f_n) \subset \bigcup_{n=1}^{n_0} \varphi(f_n) \cup [\varphi(f_0) + b_p(\varepsilon)] \subset b_p(r)$$

pour r assez grand.

Soit

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1, \ldots, n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

le crible de E_0 (cf. p. 100).

Les ensembles $\varphi(e_{n_1, \ldots, n_k})$ forment un réseau de E, puisque

$$E = \varphi(E_0) = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} \varphi(e_{n_1}).$$

De plus, pour toute suite n_k fixée, si $g_k \in \varphi(e_{n_1, \ldots, n_k})$, il existe $f_k \in e_{n_1, \ldots, n_k}$ tel que $g_k \in \varphi(f_k)$. La suite f_k converge dans E_0, donc son image par φ est bornée. De là, la suite g_k est bornée et on conclut par la proposition 1, p. 15.

Remarque. — La liste d'exemples donnée ici est loin d'être exhaustive et vise seulement à illustrer, dans quelques cas essentiels, la notion de réseau. Les propriétés de permanence permettent d'en déduire un certain nombre d'autres. En outre, le cas des espaces d'opérateurs et des produits tensoriels est étudié en détails au chapitre IV.

UN CONTRE-EXEMPLE. — En utilisant l'axiome de Zorn et en recourant anticipativement au théorème du graphe fermé, on peut donner un exemple d'espace à semi-normes dénombrables qui n'admet pas de réseau de type $\mathscr{C}$.

Soit E un espace de Fréchet et soit $\mathcal{T}$ une fonctionnelle linéaire *non continue* dans E. On peut affirmer l'existence d'une telle fonctionnelle *en s'appuyant sur l'axiome de Zorn.*

En effet, on sait alors qu'il existe une base de Hamel f_α, $\alpha \in \mathscr{I}$, de E. Si $\{p_i : i \in \mathbb{N}\}$ désigne le système de semi-normes de E, on définit $\mathcal{T}$ par

$$\mathcal{T}(f_{\alpha_i}) = i\,[1 + p_i(f_{\alpha_i})],$$

pour une suite fixée α_i d'indices α, et

$$\mathcal{T}(f_\alpha) = 0$$

si $\alpha \neq \alpha_i$, pour tout i.

Considérons les expressions

$$p'_k(f) = \sup\,(p_k(f), \mid \mathcal{T}(f) \mid), \, k \in \mathbb{N}.$$

Il est immédiat que ce sont des semi-normes. Elles sont filtrantes : si les semi-normes p_k sont croissantes, les p'_k le sont aussi. Enfin,

$$\{p'_k : k \in \mathbb{N}\} \geqslant \{p_k : k \in \mathbb{N}\}.$$

L'opérateur identité J de $E_{\{p_k\}}$ dans $E_{\{p'_k\}}$ est à graphe fermé, puisque son inverse est continu.

Si $E_{\{p'_k\}}$ admettait un réseau de type $\mathscr{C}$, comme $E_{\{p_k\}}$ est de Fréchet, vu le théorème 1, p. 28, J serait continu et, dès lors, $\mathcal{T}$ serait continu dans $E_{\{p_k\}}$, ce qui est absurde.

4. Propriétés de permanence

La propriété d'avoir un réseau de type $\mathscr{C}$ est stable pour les opérations usuelles entre espaces.

Examinons d'abord les opérations sur un seul espace.

DÉFINITIONS. — Nous désignons par E_b^- l'espace E muni du système de semi-normes associé à ses ensembles absolument convexes fermés et bornivores.

L'espace E est *évaluable* si les systèmes de semi-normes de E et de E_b^- sont équivalents, donc si tout tonneau bornivore de E est d'intérieur non vide.

L'espace E_a désigne E muni du système de *semi-normes affaiblies*

$$\sup_{i \leqslant N} \mid \mathcal{T}_i(f) \mid,$$

où $N \in \mathbb{N}$, $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_N \in E^*$.

L'espace E est à *semi-normes représentables* si toute semi-boule fermée $b_p(r)$, $p \in \{p\}$, $r > 0$, est fermée dans E_a. Si on utilise l'axiome de Zorn, on sait qu'il en est toujours ainsi. Si on le rejette, on doit le vérifier, ce qui, dans les espaces usuels, ne présente aucune difficulté.

L'espace E est *séparable par semi-norme* si, pour tout $p \in \{p\}$, il contient un ensemble dénombrable D tel que, pour tout $f \in E$, il existe $f_m \in D$ tel que $p(f - f_m) \to 0$.

L'espace E_a est toujours séparable par semi-norme.

En outre, [si E est séparable par semi-norme], tout ensemble fermé et absolument convexe dans E est fermé dans E_a et, en particulier, E est à semi-normes représentables.

Ainsi, [si E est séparable par semi-norme], on a $E_b^- = (E_a)_b^-$.

En effet, par le théorème de Mackey, tout ensemble borné dans E_a est borné dans E, donc dans E_b^-.

Théorème 1. — *Supposons que* E *admette un réseau de type* $\mathscr{C}$,

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}.$$

a) *Si* L *est un sous-espace linéaire sq-fermé de* E,

$$\mathscr{R}_L = \{e_{n_1,\ldots,n_k} \cap L : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

est de type $\mathscr{C}$ *dans* L *muni du système de semi-normes induit par* E.

b) *Si* T *est sq-continu de* E *dans* F,

$$T\mathscr{R} = \{Te_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

est de type $\mathscr{C}$ *dans* TE *muni du système de semi-normes induit par* F.

c) $\mathscr{R}$ *est de type* $\mathscr{C}$ *dans* E_b^-.

Signalons immédiatement les principaux corollaires.

Corollaire 1. — *Si* $\{p\} \leqslant \{q\}$ *dans* E, *tout réseau de type* $\mathscr{C}$ *dans* $E_{\{q\}}$ *est de type* $\mathscr{C}$ *dans* $E_{\{p\}}$.

Corollaire 2. — *Si* E *admet un réseau de type* $\mathscr{C}$, *tout quotient séparé de* E *admet un réseau de type* $\mathscr{C}$.

Corollaire 3. — *Tout réseau de type* $\mathscr{C}$ *dans* E_a *est de type* $\mathscr{C}$

— *dans* E [*si* E *est à semi-normes représentables*],

— *dans* E_b^- [*si* E *est à semi-normes représentables*].

Corollaire 4. — *Si* E *est tonnelé, quel que soit* $\mathscr{F}$,

— *tout réseau de type* $\mathscr{C}$ *dans* E_s^* *est de type* $\mathscr{C}$ *dans* $E_{\mathscr{F}}^*$,

— *tout réseau de type* $\mathscr{C}$ *dans* $\mathscr{L}_s(E, F)$ *est de type* $\mathscr{C}$ *dans* $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}(E, F)$.

En effet, tout ensemble borné dans E_s^* (resp. dans $\mathscr{L}_s(E, F)$) est équicontinu, donc borné dans $E_{\mathscr{F}}^*$ (resp. dans $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}(E, F)$) et les semi-boules fermées relatives aux semi-normes

$$\sup_{f \in B} |\mathcal{C}(f)| \text{ (resp. } \sup_{f \in B} q(Tf))$$

sont visiblement fermées dans E_s^* (resp. $\mathscr{L}_s(E, F)$).

Démonstration du théorème 1. — Les points a) et b) sont immédiats.

Passons à c).

Soit n_k, $k \in \mathbb{N}$, une suite fixée et soit λ_k la suite qui lui correspond dans $\mathscr{R}$.

Si $\lambda'_k = 2^{-k}\lambda_k$, prouvons que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k$ converge dans E_b^-, quels que soient $\mu_k \in [0, \lambda'_k]$ et $f_k \in e_{n_1,\dots,n_k}$.

On sait que cette série converge dans E. Soit f sa limite.

La série converge aussi vers f dans E_b^-. De fait, comme

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \mu_k f_k$$

converge dans E, la suite $2^k \mu_k f_k$ est bornée dans E. Elle est alors bornée dans E_b^-.

De là, pour toute semi-norme π de E_b^-,

$$\pi\left(\sum_{k=r}^{s} \mu_k f_k\right) \leqslant \sum_{k=r}^{s} 2^{-k} \sup_m \pi(2^m \mu_m f_m) \leqslant \varepsilon$$

pour $r, s \geqslant N(\varepsilon)$. Comme $b_\pi(\varepsilon) = \{f : \pi(f) \leqslant \varepsilon\}$ est fermé dans E, en passant à la limite sur s, il vient

$$\pi\left(\sum_{k=1}^{r-1} \mu_k f_k - f\right) = \pi\left(\sum_{k=r}^{\infty} \mu_k f_k\right) \leqslant \varepsilon,$$

d'où $\sum_{k=1}^{N} \mu_k f_k$ converge vers f dans E_b^-.

Passons aux opérations portant sur une suite d'espaces.

Théorème 2. — *Si* E *est l'union d'une suite d'espaces, images par des opérateurs sq-continus d'espaces à réseau de type* $\mathscr{C}$, E *admet un réseau de type* $\mathscr{C}$.

Soit $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Vu le théorème 1, b), chaque E_n est muni d'un réseau de type $\mathscr{C}$,

$$\mathscr{R}_n = \{e^{(n)}_{n_1,\dots,n_k} : k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}\}.$$

L'espace E admet lui-même un réseau $\mathscr{R}$, formé des ensembles

$$e_{n_1} = E_{n_1},\ n_1 \in \mathbb{N},$$

et

$$e_{n_1,\dots,n_k} = e^{(n_1)}_{n_2,\dots,n_k},\ k > 1,\ n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}.$$

Ce réseau est visiblement de type $\mathscr{C}$, puisque les séries considérées dans $\mathscr{R}$ ne diffèrent de celles considérées dans les $\mathscr{R}_n$ que par addition d'un élément.

Corollaire. — *Toute limite inductive dénombrable d'espaces à réseau de type* $\mathscr{C}$ *admet un réseau de type* $\mathscr{C}$.

Théorème 3. — *Soient* E_n *une suite d'espaces emboîtés en décroissant et tels que, pour tout* n, *l'opérateur identité de* E_{n+1} *dans* E_n *soit sq-continu.*

Si chaque E_n *admet un réseau de type* $\mathscr{C}$, *la limite projective des* E_n *admet un réseau de type* $\mathscr{C}$.

Rappelons que, si chaque E_n est muni d'un système de semi-normes $\mathscr{P}_n$, on définit un système de semi-normes de la limite projective E des E_n en restreignant à E les semi-normes des différents $\mathscr{P}_n$ et en filtrant les semi-normes obtenues. On voit immédiatement qu'une suite f_n tend vers f dans E si elle tend vers f dans chaque E_n.

Soit

$$\mathscr{R}_n = \{e^{(n)}_{n_1, \ldots, n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

un réseau de type $\mathscr{C}$ dans chaque E_n.

Considérons les ensembles

$$\mathscr{E}_{n_1} = e^{(1)}_{n_1} \cap \mathrm{E},\ n_1 \in \mathbb{N},$$

puis les ensembles

$$\mathscr{E}_{n_1, (n_2, n'_1)} = e^{(1)}_{n_1, n_2} \cap e^{(2)}_{n'_1} \cap \mathrm{E},\ n_1, n_2, n'_1 \in \mathbb{N},$$

où on renumérote les couples (n_2, n'_1) avec un seul indice parcourant $\mathbb{N}$, puis

$$\mathscr{E}_{n_1, (n_2, n'_1), (n_3, n'_2, n''_1)} = e^{(1)}_{n_1, n_2, n_3} \cap e^{(2)}_{n'_1, n'_2} \cap e^{(3)}_{n''_1},\ n_1, n_2, n_3, n'_1, n'_2, n''_1 \in \mathbb{N},$$

où on numérote (n_3, n'_2, n''_1) avec un seul indice parcourant $\mathbb{N}$, et ainsi de suite.

Ces ensembles constituent visiblement un réseau $\mathscr{R}$ de E.

Démontrons que $\mathscr{R}$ est de type $\mathscr{C}$ dans E.

Soient $n_1, (n_2, n'_1), (n_3, n'_2, n''_1), \ldots$ fixés. Aux n_k correspondent $\lambda_k > 0$ tels que, si $f_k \in e^{(1)}_{n_1, \ldots, n_k}$ et $0 \leqslant \mu_k \leqslant \lambda_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\mathrm{N}} \mu_k f_k$ converge dans E_1. De même, aux n'_k correspondent $\lambda'_k > 0$ tels que, si $f_k \in e^{(2)}_{n'_1, \ldots, n'_k}$ et $0 \leqslant \mu_k \leqslant \lambda'_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\mathrm{N}} \mu_k f_k$ converge dans E_2, et ainsi de suite.

Posons alors

$$\nu_1 = \lambda_1,\ \nu_2 = \inf(\lambda_2, \lambda'_1),\ \nu_3 = \inf(\lambda_3, \lambda'_2, \lambda''_1), \ldots .$$

Si $f_1 \in \mathscr{E}_{n_1}$, $f_2 \in \mathscr{E}_{n_1, (n_2, n'_1)}$, ... et si $0 \leqslant \mu_k \leqslant \nu_k$, la suite $\sum\limits_{k=1}^{\mathrm{N}} \mu_k f_k$ converge dans E_n quel que soit n, car $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \mu_k f_k \in \mathrm{E} \subset \mathrm{E}_n$ et $\sum\limits_{k=n}^{\mathrm{N}} \mu_k f_k$ converge dans E_n.

Soit $f^{(n)}$ sa limite dans chaque E_n. Comme l'opérateur identité de E_{n+1} dans E_n est *sq*-continu, pour tout n, $\sum\limits_{k=1}^{\mathrm{N}} \mu_k f_k$ converge dans E_n à la fois vers $f^{(n)}$ et $f^{(n+1)}$, d'où $f^{(n)} = f^{(n+1)}$. Si f est la valeur commune des $f^{(n)}$, on a

$$f \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}_n = \mathrm{E}$$

et $\sum\limits_{k=1}^{\mathrm{N}} \mu_k f_k$ tend vers f dans E, d'où la conclusion.

Remarque. — On notera qu'au lieu de supposer que l'opérateur identité de E_{n+1} dans E_n soit *sq*-continu, il suffit de le supposer à graphe *sq*-fermé.

En effet, cela suffit pour que

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \mu_k f_k \to f^{(n)} \text{ dans } E_n \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \mu_k f_k \to f^{(n+1)} \text{ dans } E_{n+1} \end{array}\right\} \Rightarrow f^{(n)} = f^{(n+1)}.$$

Théorème 4. — *Tout produit dénombrable d'espaces à réseau de type $\mathscr{C}$ admet un réseau de type $\mathscr{C}$.*

Soient E_n les espaces et

$$\mathscr{R}_n = \{e^{(n)}_{n_1, \ldots, n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

un réseau de type $\mathscr{C}$ dans chacun d'eux.

Les ensembles

$$\mathscr{E}_{n_1} = e^{(1)}_{n_1} \times E_2 \times E_3 \times \ldots, \; n_1 \in \mathbb{N},$$

$$\mathscr{E}_{n_1,(n_2,n_1')} = e^{(1)}_{n_1,n_2} \times e^{(2)}_{n_1'} \times E_3 \times \ldots, \; n_1, n_2, n_1' \in \mathbb{N},$$

où (n_2, n_1') sont numérotés par un seul indice parcourant $\mathbb{N}$,

$$\mathscr{E}_{n_1,(n_2,n_1'),(n_3,n_2',n_1'')} = e^{(1)}_{n_1,n_2,n_3} \times e^{(2)}_{n_1',n_2'} \times e^{(3)}_{n_1''} \times E_4 \times \ldots, \; n_1, n_2, n_3, n_1', n_2', n_1'' \in \mathbb{N},$$

où (n_3, n_2', n_1'') sont numérotés par un seul indice parcourant $\mathbb{N}$, et ainsi de suite, constituent visiblement un réseau $\mathscr{R}$ de

$$E = \prod_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Démontrons que $\mathscr{R}$ est de type $\mathscr{C}$.

Soient n_1, (n_2, n_1'), (n_3, n_2', n_1''), ... fixés. Il existe $\lambda_k > 0$ tels que, si $0 \leqslant \mu_k \leqslant \lambda_k$ et $f_k^{(1)} \in e^{(1)}_{n_1,\ldots,n_k}$, la série $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k^{(1)}$ converge dans E_1. Il existe aussi $\lambda_k' > 0$ tels que si $0 \leqslant \mu_k \leqslant \lambda_k'$ et si $f_k^{(2)} \in e^{(2)}_{n_1',\ldots,n_k'}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k^{(2)}$ converge dans E_2, et ainsi de suite.

Soient alors

$$\nu_1 = \lambda_1, \; \nu_2 = \inf(\lambda_2, \lambda_1'), \; \nu_3 = \inf(\lambda_3, \lambda_2', \lambda_1''), \; \ldots .$$

Si $0 \leqslant \mu_k \leqslant \nu_k$ et si

$$f_k = (f_k^{(1)}, f_k^{(2)}, \ldots) \in \mathscr{E}_{n_1,(n_2,n_1'),\ldots,(n_k,n'_{-1},\ldots)},$$

la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k$$

converge dans E puisque chaque série $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k^{(i)}$ converge dans E_i.

Corollaire. — *Toute somme directe dénombrable d'espaces à réseau de type $\mathscr{C}$ admet un réseau de type $\mathscr{C}$.*

Il suffit de noter que c'est la limite inductive des produits finis $\prod_{i=1}^{n} E_i$, $n \in \mathbb{N}$, des espaces E_i considérés et d'appliquer le théorème 4 et le corollaire du théorème 2, p. 24.