CHAPITRE II

THÉORÈMES DU GRAPHE FERMÉ DANS LES ESPACES A RÉSEAU

On développe dans ce chapitre les améliorations que la notion de réseau de type $\mathscr{C}$ permet d'apporter au théorème du graphe fermé et aux théorèmes analogues (théorème de l'opérateur ouvert, ...). L'introduction des relations linéaires fournit un essai d'unification des divers résultats obtenus. Enfin, on examine quelques variantes de la définition des réseaux et on établit les théorèmes qui leur correspondent.

Théorèmes du graphe fermé

Rappelons quelques définitions et quelques faits élémentaires utilisés plus loin.

Définitions. — Un ensemble $e \subset \mathrm{E}$ est *maigre* dans E s'il est contenu dans une union dénombrable de fermés d'intérieur vide dans E.

Il est immédiat que *toute union dénombrable d'ensembles maigres est maigre.*

Donc, si $\bigcup_{n=1}^{\infty} e_n$ n'est pas maigre, un des e_n n'est pas maigre.

Si e n'est pas maigre, l'intérieur de $\bar{e}$ n'est pas vide.

En effet, e est contenu dans le fermé $\bar{e}$.

L'espace E est *de Baire* si tout ouvert non vide de E est non maigre.

On sait que *tout espace de Fréchet est de Baire.*

L'espace E est *bornologique* si tout ensemble absolument convexe bornivore de E est d'intérieur non vide. Il est *ultrabornologique* s'il est limite inductive d'une famille d'espaces de Banach. Notons que *tout espace bornologique sq-complet est ultrabornologique.*

Soit d'autre part T un opérateur linéaire de E dans F. On a défini p. 19 sa continuité. Il est *ouvert* si, pour tout ouvert ω de E, $\mathrm{T}\omega$ est ouvert dans F. Évidemment, on a alors $\mathrm{TE} = \mathrm{F}$. C'est un *homomorphisme* s'il est à la fois continu et ouvert. Enfin, on désignera par $\mathscr{G}(\mathrm{T})$ le graphe de T.

Passons maintenant aux théorèmes annoncés.

Théorème 1. — *Si* E *est de Fréchet et si* F *admet un réseau de type* $\mathscr{C}$, *tout opérateur linéaire à graphe sq-fermé de* E *dans* F *est continu.*

Corollaire 1. — *Si* E *est ultrabornologique et si* F *admet un réseau de type* $\mathscr{C}$, *tout opérateur linéaire à graphe sq-fermé de* E *dans* F *est continu.*

Le corollaire se déduit facilement du théorème : si E est limite inductive des espaces de Banach E_α, pour que T soit continu de E dans F, il suffit que sa restriction

T_α à chaque E_α soit continue de E_α dans F. Or il est trivial que T_α est à graphe sq-fermé dans $E_\alpha \times F$, donc il vérifie le théorème 1.

COROLLAIRE 2. — *Si* E *est ultrabornologique et si* F *admet un réseau de type* $\mathscr{C}$, *tout opérateur* T *continu de* F *sur* E *est un homomorphisme.*

Soit $N(T) = \{f \in F : Tf = 0\}$ le noyau de T. Il est fermé dans F, donc $F/N(T)$ est séparé et admet un réseau de type $\mathscr{C}$. Si $\widetilde{T}$ est l'opérateur de $F/N(T)$ sur E déduit de T, $\widetilde{T}$ est continu, donc à graphe sq-fermé. Dès lors, $\widetilde{T}^{-1}$ est aussi à graphe sq-fermé et, par le corollaire 1, il est continu.

REMARQUES. — a) Ces deux corollaires constituent, du point de vue des applications, les résultats essentiels de ce chapitre.

b) Une condition usuelle pour que E soit ultrabornologique est qu'il soit bornologique et sq-complet.

Dans ce cas, on peut donner des corollaires une démonstration élémentaire en ce sens qu'elle évite le concept de limite inductive. En effet, si E est bornologique, pour que T soit continu de E dans F, il suffit que, pour toute suite bornée $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, l'ensemble $\{Tf_n : n \in \mathbb{N}\}$ soit borné dans F.

Soient B l'enveloppe absolument convexe fermée de la suite et E_B l'enveloppe linéaire de B normée par la norme associée à B. Comme E est sq-complet, B est sq-complet et E_B est de Banach. Or, si le graphe de T est sq-fermé dans $E \times F$, le graphe de sa restriction à E_B est sq-fermé dans $E_B \times F$. Donc, par le théorème 1, la restriction de T à E_B est continue de E_B dans F et $\{Tf_n : n \in \mathbb{N}\}$ est borné dans F, ce qui prouve le corollaire 1.

La démonstration du corollaire 2 reste inchangée.

Démonstration du théorème 1. — Soit T linéaire et à graphe sq-fermé de E dans F et soit

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

un réseau de type $\mathscr{C}$ de F.

Comme $E = T_{-1}F$, on a visiblement

$$E = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} T_{-1}e_{n_1}.$$

De plus, quels que soient $k > 1$, $n_1, \ldots, n_{k-1} \in \mathbb{N}$,

$$T_{-1}e_{n_1,\ldots,n_{k-1}} = \bigcup_{n_k=1}^{\infty} T_{-1}e_{n_1,\ldots,n_k}.$$

Comme E est de Baire, on peut choisir n_1 tel que $T_{-1}e_{n_1}$ ne soit pas maigre, puis, pour cet n_1, on peut choisir n_2 tel que $T_{-1}e_{n_1,n_2}$ ne soit pas maigre et ainsi de suite.

Soit n_k la suite ainsi déterminée.

Soit β une semi-boule fermée centrée en 0 dans F. Pour tout k,

$$T_{-1}e_{n_1,\ldots,n_k} \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} T_{-1}(e_{n_1,\ldots,n_k} \cap m\beta),$$

donc il existe m_k tel que

$$T_{-1}(e_{n_1,\ldots,n_k} \cap m_k\beta)$$

ne soit pas maigre.

Aux n_k, associons $\lambda_k > 0$ tels que toute série de la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k g_k, \; g_k \in e_{n_1,\ldots,n_k}, \; 0 \leqslant \mu_k \leqslant \lambda_k,$$

converge dans F. Soient alors $\nu_k \in [0, \lambda_k]$ tels que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \nu_k m_k \leqslant \varepsilon,$$

où $\varepsilon > 0$ est fixé arbitrairement.

Les ensembles

$$\mathscr{E}_k = \nu_k \mathrm{T}_{-1}(e_{n_1,\ldots,n_k} \cap m_k\beta) = \mathrm{T}_{-1}\,[(\nu_k e_{n_1,\ldots,n_k}) \cap (\nu_k m_k \beta)]$$

ne sont pas maigres. Leur adhérence contient donc un point intérieur : $\overline{\mathscr{E}}_k \supset f_k + b_k$, où b_k est une semi-boule de E, de centre 0.

On peut sans restriction supposer que $f_k \in \mathscr{E}_k$. De fait, comme $f_k \in \overline{\mathscr{E}}_k$, on a

$$\left(f_k + \frac{1}{2}\, b_k\right) \cap \mathscr{E}_k \neq \varnothing$$

et, si f'_k appartient à cette intersection,

$$f'_k + \frac{1}{2}\, b_k \subset \overline{\mathscr{E}}_k.$$

De plus, si on désigne par p_k, $k \in \mathbb{N}$, les semi-normes de E, on peut supposer que $b_k \subset b_{p_k}(1/k)$ pour tout k, de sorte que, si $g_k \in b_k$ pour tout k, on a $g_k \rightarrow 0$ dans E.

Soit donc

$$\overline{\mathscr{E}}_k \supset f_k + b_k,$$

où $f_k \in \mathscr{E}_k$ et $b_k \subset b_{p_k}(1/k)$ pour tout k.

Démontrons que

$$\overline{\mathrm{T}_{-1}\beta} \subset (1 + 2\varepsilon)\mathrm{T}_{-1}\beta.$$

Comme $\mathrm{E} = \bigcup_{m=1}^{\infty} m\mathrm{T}_{-1}\beta$, $\mathrm{T}_{-1}\beta$ n'est pas maigre et $\overline{\mathrm{T}_{-1}\beta}$ contient une semi-boule b de centre 0 dans E. On aura donc ainsi établi que T est continu.

Soit $f \in \overline{\mathrm{T}_{-1}\beta}$. Il existe $g_1 \in \mathrm{T}_{-1}\beta$, tel que $f - g_1 \in b_1$. On a donc

$$g_1 \in \mathrm{T}_{-1}\beta \;;\; f - g_1 \in b_1 \;;\; f - g_1 + f_1 \in \overline{\mathscr{E}}_1.$$

Il existe alors $g_2 \in \mathscr{E}_1$ tel que $f - g_1 + f_1 - g_2 \in b_2$, d'où

$$g_2 \in \mathscr{E}_1 \;;\; f - g_1 + f_1 - g_2 \in b_2 \;;\; f - g_1 + f_1 - g_2 + f_2 \in \overline{\mathscr{E}}_2.$$

De proche en proche, on détermine ainsi une suite g_k telle que

$$g_k \in \mathscr{E}_{k-1} \;;\; f - \sum_{i=1}^{k} g_i + \sum_{i=1}^{k-1} f_i \in b_k \;;\; f - \sum_{i=1}^{k} g_i + \sum_{i=1}^{k} f_i \in \overline{\mathscr{E}}_k.$$

Par construction, on a

$$\mathrm{T}f_i \in \nu_i e_{n_1,\ldots,n_i}$$

pour tout i, donc

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{T}f_i$$

converge dans F. De même

$$\mathrm{T}g_i \in \nu_{i-1} e_{n_1,\ldots,n_{i-1}},$$

pour tout $i > 1$, d'où

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{T}g_i$$

converge également dans F. Enfin, on a

$$\mathrm{T}g_1 \in \beta \ ; \ \mathrm{T}g_i \in \nu_{i-1} m_{i-1}\beta, \ \forall i > 1 \ ; \ \mathrm{T}f_i \in \nu_i m_i \beta, \ \forall i \geqslant 1,$$

d'où, comme on a supposé β fermé,

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{T}g_i - \sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{T}f_i \rightarrow g \in (1 + 2\varepsilon)\beta.$$

Vu le choix des b_k, $\sum\limits_{i=1}^{k} g_i - \sum\limits_{i=1}^{k-1} f_i$ converge vers f dans E, d'où, comme T est à graphe sq-fermé,

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{i=1}^{k} g_i - \sum\limits_{i=1}^{k-1} f_i \rightarrow f \\ \sum\limits_{i=1}^{k} \mathrm{T}g_i - \sum\limits_{i=1}^{k-1} \mathrm{T}f_i \rightarrow g \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{T}f = g.$$

Il en résulte que $\mathrm{T}f \in (1 + 2\varepsilon)\beta$ et $f \in (1 + 2\varepsilon)\mathrm{T}_{-1}\beta$, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. — Si on suppose que les ensembles qui constituent le réseau de F sont absolument convexes, ce qui est toujours le cas en pratique, la démonstration se simplifie de façon importante et se réduit, à des variantes mineures près, à la démonstration de la proposition 4, p. 44, dans le cas des réseaux de type $\mathcal{S}\mathcal{E}$.

L'hypothèse que E soit de Fréchet a été utilisée de deux manières : on a utilisé le fait qu'il est alors de Baire, puis le fait qu'il est à semi-normes dénombrables.

On peut éviter cette dernière hypothèse et on est conduit au théorème suivant.

Théorème 2. — *Soit* T *un opérateur linéaire défini d'une partie de* E *dans* F, $\mathcal{D}$(T) *son ensemble de définition.*

Si $\mathcal{D}$(T) *n'est pas maigre dans* E *et si* T *est à graphe fermé et* F *à réseau de type* $\mathcal{C}$, *alors* $\mathcal{D}$(T) = E *et* T *est continu.*

Si E *est à semi-normes dénombrables, il suffit même que le graphe de* T *soit sq-fermé au lieu d'être fermé.*

Ainsi, on voit que l'hypothèse sur le graphe de T est lié au caractère dénombrable ou non des semi-normes de E.

On procède comme dans la démonstration précédente.

Ici, si

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

désigne encore un réseau de type $\mathscr{C}$ dans F, on a

$$\mathscr{D}(\mathrm{T}) = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} \mathrm{T}_{-1}e_{n_1},$$

d'où, comme $\mathscr{D}(\mathrm{T})$ n'est pas maigre, un des $\mathrm{T}_{-1}e_{n_1}$ n'est pas maigre. On peut donc de nouveau déterminer une suite de n_k tels que les $\mathrm{T}_{-1}e_{n_1,\ldots,n_k}$ ne soient pas maigres, puis, si β est une semi-boule fermée de centre 0 dans F, des m_k tels que

$$\mathrm{T}_{-1}(e_{n_1,\ldots,n_k} \cap m_k\beta)$$

ne soit maigre pour aucun k.

Si E est à semi-normes dénombrables, la fin de la démonstration est inchangée.

S'il ne l'est pas, on fixe ν_k, $\mathscr{E}_k$, f_k, b_k comme dans la démonstration précédente, à cette différence près que la précision $b_k \subset b_{p_k}(1/k)$ disparaît.

On en arrive ainsi à démontrer que

$$\overline{\mathrm{T}_{-1}\beta} \subset (1 + 2\varepsilon)\mathrm{T}_{-1}\beta.$$

Cela prouve non seulement que T est continu, mais aussi que $\mathscr{D}(\mathrm{T}) = \mathrm{E}$, car, si $\mathrm{T}_{-1}\beta$ est d'intérieur non vide, c'est aussi le cas pour $\mathscr{D}(\mathrm{T})$ d'où, comme il est linéaire, $\mathscr{D}(\mathrm{T}) = \mathrm{E}$.

Soit $f \in \overline{\mathrm{T}_{-1}\beta}$. On détermine de proche en proche g_k tels que

$$g_1 \in \mathrm{T}_{-1}\beta \; ; \; f - g_1 \in b_1 \; ; \; f - g_1 + f_1 \in \overline{\mathscr{E}}_1$$

et

$$g_k \in \mathscr{E}_{k-1} \; ; \; f - \sum_{i=1}^{k} g_i + \sum_{i=1}^{k-1} f_i \in b_k \; ; \; f - \sum_{i=1}^{k} g_i + \sum_{i=1}^{k} f_i \in \overline{\mathscr{E}}_k,$$

pour tout $k > 1$.

La suite

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{T}g_i - \sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{T}f_i$$

converge encore dans F et sa limite g est contenue dans $(1 + 2\varepsilon)\beta$.

Par contre, on ignore si

$$\sum_{i=1}^{k} g_i - \sum_{i=1}^{k-1} f_i$$

converge vers f.

Montrons que néanmoins

$$(f, g) \in \overline{\mathscr{G}(\mathrm{T})} = \mathscr{G}(\mathrm{T}).$$

On en déduira que $\mathrm{T}f = g$ et $f \in (1 + \varepsilon)\mathrm{T}_{-1}\beta$.

Soient b et b' des semi-boules de centre 0 dans E et F respectivement. On a

$$f - \sum_{i=1}^{k} g_i + \sum_{i=1}^{k} f_i \in \overline{\mathscr{E}}_k \subset \mathscr{E}_k + b, \forall k \in \mathbb{N},$$

donc il existe $h_k \in \mathscr{E}_k$, tel que

$$f - \sum_{i=1}^{k} g_i + \sum_{i=1}^{k} f_i - h_k \in b, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Or

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{T}g_i - \sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{T}f_i \to g$$

et

$$\mathrm{T}h_k, \mathrm{T}f_k \to 0$$

dans F si $k \to \infty$ puisque les séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{T}h_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{T}f_k$$

convergent dans F. Donc, pour k assez grand,

$$g - \mathrm{T}\left(\sum_{i=1}^{k} g_i - \sum_{i=1}^{k} f_i + h_k\right) \in b'$$

et

$$[(f, g) + (b, b')] \cap \mathscr{G}(\mathrm{T}) \neq \varnothing.$$

Comme b et b' sont arbitraires, il en résulte que $(f, g) \in \overline{\mathscr{G}(\mathrm{T})}$, d'où la conclusion.

Remarque. — On pourrait formuler ici des corollaires analogues à ceux du théorème 1. Ils trouveront leur place dans les propositions qui suivent.

2. Relations linéaires et variantes des théorèmes du graphe fermé

Les théorèmes du paragraphe précédent généralisent le théorème du graphe fermé dans sa forme habituelle, c'est-à-dire en supposant l'opérateur à graphe fermé ou *sq*-fermé et en imposant aux espaces E et F des conditions convenables.

On a toutefois des résultats plus généraux comme celui-ci : *si* E *est de Fréchet,* T *linéaire de* E *dans* F *et* $\mathscr{G}(\mathrm{T})$ *à réseau de type* $\mathscr{C}$, *alors* T *est borné de* E *dans* F.

Il n'y a plus d'hypothèses sur F mais seulement sur E et $\mathscr{G}(\mathrm{T})$. Ce théorème est plus général que le théorème 1, p. 28. En effet, E, de Fréchet, admet un réseau de type $\mathscr{C}$, donc aussi E $\times$ F et enfin $\mathscr{G}(\mathrm{T})$, s'il est *sq*-fermé dans E $\times$ F.

Toutefois, si on formule l'énoncé correspondant en supposant $\mathscr{D}(\mathrm{T})$ non maigre, on n'obtient pas une généralisation du théorème 2, p. 31, car on ne peut pas affirmer, sous ses hypothèses, que $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ admette un réseau de type $\mathscr{C}$.

L'introduction des relations linéaires va permettre de formuler un énoncé assez général pour contenir l'un et l'autre cas. On verra plus loin qu'il a un intérêt propre, en dehors de ces deux cas particuliers.

Définitions. — Soient E et F deux espaces linéaires à semi-normes. Une *relation linéaire de* E *dans* F est une relation R telle que

$$\{(f, g) \in \mathrm{E} \times \mathrm{F} : f\mathrm{R}g\}$$

soit un sous-espace linéaire de $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$. On note $\mathscr{G}(\mathrm{R})$ ce sous-espace et on l'appelle *graphe* de R.

On pose

$$\mathrm{R}(f) = \{g : f\mathrm{R}g\}, \ \mathrm{R}(e) = \bigcup_{f \in e} \mathrm{R}(f), \ \mathrm{R}^{-1}(g) = \{f : f\mathrm{R}g\}$$

et

$$\mathrm{R}^{-1}(e') = \bigcup_{g \in e'} \mathrm{R}^{-1}(g).$$

La relation R *est linéaire si et seulement si*

$$c_i \in \mathbb{C}, \ f_i\mathrm{R}g_i, \ i = 1, \ldots, n \ \Rightarrow \ (\sum_{i=1}^{n} c_i f_i)\mathrm{R}\,(\sum_{i=1}^{n} c_i g_i).$$

De fait, la condition se traduit par

$$c_i \in \mathbb{C}, \ (f_i, g_i) \in \mathscr{G}(\mathrm{R}), \ i = 1, \ldots, n \ \Rightarrow \ (\sum_{i=1}^{n} c_i f_i, \sum_{i=1}^{n} c_i g_i) \in \mathscr{G}(\mathrm{R}),$$

ce qui signifie que $\mathscr{G}(\mathrm{R})$ est linéaire.

La relation R est *continue* si, pour tout ouvert $\omega \subset \mathrm{F}$, $\mathrm{R}^{-1}(\omega)$ est un ouvert de E.

Elle est *sq-continue* si, pour toute suite $f_n \to f$ dans E, il existe $g_n, g \in \mathrm{F}$ tels que $g_n \to g$ avec $f_n\mathrm{R}g_n$ pour tout n et $f\mathrm{R}g$.

On appelle *relation inverse* de R et on note R^{-1} la relation définie de F dans E par

$$g\mathrm{R}^{-1}f \Leftrightarrow f\mathrm{R}g.$$

Soient R une relation linéaire de E dans F, R' une relation linéaire de F dans G. On appelle *composée* $\mathrm{R}' \circ \mathrm{R}$ de R et R' la relation définie par

$$f\mathrm{R}' \circ \mathrm{R}h \Leftrightarrow f\mathrm{R}g, \ g\mathrm{R}'h \ \text{pour au moins un} \ g \in \mathrm{F}.$$

C'est visiblement une relation linéaire : si on a $f_i\mathrm{R}' \circ \mathrm{R}h_i$, il existe g_i tels qu'on ait $f_i\mathrm{R}g_i$ et $g_i\mathrm{R}'h_i$, d'où

$$(\sum_{i=1}^{n} c_i f_i)\mathrm{R}\,(\sum_{i=1}^{n} c_i g_i) \quad \text{et} \quad (\sum_{i=1}^{n} c_i g_i)\mathrm{R}'\,(\sum_{i=1}^{n} c_i h_i),$$

soit

$$(\sum_{i=1}^{n} c_i f_i) \mathrm{R}' \circ \mathrm{R} (\sum_{i=1}^{n} c_i h_i),$$

quels que soient $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$.

Les opérateurs linéaires définis d'une partie de E dans F ou d'une partie de F dans E sont des relations linéaires particulières :

a) Si T est linéaire de E dans F, la relation $\mathrm{R_T}$ définie par

$$f \mathrm{R_T} g \Leftrightarrow \mathrm{T}f = g$$

est linéaire ; son graphe est celui de T ; elle est continue de E dans F si et seulement si c'est le cas pour T.

b) Si T est linéaire de F dans E, la relation $\mathrm{R_T}$ définie par

$$f \mathrm{R_T} g \Leftrightarrow \mathrm{T}g = f$$

est linéaire ; son graphe est celui de T, à l'ordre des facteurs près. Elle est continue de E dans F si et seulement si T est ouvert.

c) Si R est une relation linéaire de E dans F et T un opérateur linéaire de F dans G, $\mathrm{T} \circ \mathrm{R}$ est un opérateur linéaire de E dans G si $\mathrm{R}(0) \subset \mathrm{T}_{-1}(0)$ et $\mathrm{R}_{-1}(\mathrm{F}) = \mathrm{E}$.

Puisque $\mathrm{R}_{-1}(\mathrm{F}) = \mathrm{E}$, à tout $f \in \mathrm{E}$ correspond au moins un élément h de G. Il reste à vérifier que

$$f \mathrm{T} \circ \mathrm{R} h \text{ et } f \mathrm{T} \circ \mathrm{R} h' \Rightarrow h = h'.$$

Or, on a $0 \mathrm{T} \circ \mathrm{R}(h - h')$, d'où il existe g tel que $0 \mathrm{R} g$ et $\mathrm{T}g = h - h'$, ce qui entraîne $g \in \mathrm{T}_{-1}(0)$, d'où $h - h' = \mathrm{T}g = 0$.

PROPOSITION 1. — *Soient* E, F, G *trois espaces linéaires à semi-normes,* R *une relation linéaire de* G *dans* E, τ *un opérateur linéaire de* G *dans* F.

Supposons vérifiées les hypothèses suivantes, résumées dans le schéma ci-dessous :

— E *est de Fréchet,* G *à réseau de type* $\mathscr{C}$,

— R *est à graphe sq-fermé,* τ *sq-continu,*

— $\mathrm{R(G)} = \mathrm{E}$.

Alors $\tau \circ \mathrm{R}^{-1}$ *est continu de* E *dans* F.

$$\begin{tikzcd}
& \boxed{\begin{array}{c} \mathrm{G} \\ \textit{à réseau de type } \mathscr{C} \end{array}} \arrow[dl, "\mathrm{R(G)} = \mathrm{E}", "\mathscr{G}(\mathrm{R})\ \textit{sq-fermé}"'] \arrow[dr, "\tau\ \textit{sq-continu}"] & \\
\boxed{\begin{array}{c} \mathrm{E} \\ \textit{de Fréchet} \end{array}} & & \boxed{\begin{array}{c} \mathrm{F} \\ \textit{quelconque} \end{array}}
\end{tikzcd}$$

Supposons que G soit muni du réseau

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\ldots,n_k} : k,\, n_1,\, \ldots,\, n_k \in \mathbb{N}\}.$$

Visiblement, comme $R(G) = E$, on a

$$E = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} Re_{n_1}$$

et

$$R(e_{n_1,\ldots,n_{k-1}}) = \bigcup_{n_k=1}^{\infty} R(e_{n_1,\ldots,n_k}),$$

pour tous $k > 1$, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$.

On peut donc fixer une suite de n_k telle que $R(e_{n_1,\ldots,n_k})$ ne soit maigre pour aucun $k \in \mathbb{N}$.

Soit β une semi-boule fermée de centre 0 dans F. Comme $\tau_{-1}F = G$, on a

$$E = R(G) = \bigcup_{m=1}^{\infty} R(\tau_{-1}\beta).$$

Il existe donc m_k tels que $R(e_{n_1,\ldots,n_k} \cap m_k\tau_{-1}\beta)$ ne soit maigre pour aucun $k \in \mathbb{N}$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On détermine $\nu_k > 0$ tels que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \nu_k m_k \leqslant \varepsilon$$

et que toute série de G de la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k g_k, \quad g_k \in e_{n_1,\ldots,n_k}, \quad 0 \leqslant \mu_k \leqslant \nu_k,$$

converge dans G.

Les ensembles

$$\mathscr{E}_k = R\,[(\nu_k e_{n_1,\ldots,n_k}) \cap \tau_{-1}\nu_k m_k\beta]$$

n'étant pas maigres, leur adhérence contient une semi-boule $f_k + b_k$, où on peut supposer que $f_k \in \mathscr{E}_k$ et $b_k \subset b_{p_k}(1/k)$, $\{p_k : k \in \mathbb{N}\}$ désignant le système de semi-normes de E.

Démontrons que

$$\overline{R(\tau_{-1}\beta)} \subset (1 + 2\varepsilon)R(\tau_{-1}\beta).$$

On en déduit immédiatement que $\tau \circ R^{-1}$ est continu.

Soit $f \in \overline{R(\tau_{-1}\beta)}$. Il existe $f'_1 \in R(\tau_{-1}\beta)$ tel que $f - f'_1 \in b_1$, donc tel que $f - f'_1 + f_1 \in \overline{\mathscr{E}}_1$. Il existe alors $f'_2 \in \mathscr{E}_1$ tel que $f - f'_1 + f_1 - f'_2 \in b_2$. De proche en proche, on fixe ainsi une suite f'_k telle que

$$f'_1 \in R(\tau_{-1}\beta)\,;\ f'_{k+1} \in \mathscr{E}_k,\ \forall k > 1,$$

et

$$\sum_{k=1}^{n} f'_k - \sum_{k=1}^{n-1} f_k \to f$$

dans E.

Soient g_k et $g'_k \in \mathrm{G}$ tels que $g_k \mathrm{R} f_k$ et $g'_k \mathrm{R} f'_k$ et que

$$g_k,\ g'_{k+1} \in (\nu_k e_{n_1,\ldots,n_k}) \cap \tau_{-1} \nu_k m_k \beta.$$

Vu le choix des ν_k, la suite

$$\sum_{k=1}^{n} g'_k - \sum_{k=1}^{n-1} g_k$$

converge dans G. Soit g sa limite.

Comme $\mathscr{G}(\mathrm{R})$ est sq-fermé, on a $g\mathrm{R}f$. De plus, comme τ est sq-continu,

$$\sum_{k=1}^{n} \tau g'_k - \sum_{k=1}^{n-1} \tau g_k$$

converge dans F. On voit immédiatement que sa limite τg est dans $(1 + 2\varepsilon)\beta$, d'où $f \in (1 + 2\varepsilon)\mathrm{R}(\tau_{-1}\beta)$.

Voici quelques corollaires de la proposition 1.

Corollaire 1. — *Le théorème* 1, p. 28, *en est un cas particulier.*

De fait, soit T linéaire et à graphe sq-fermé de E de Fréchet dans F à réseau de type $\mathscr{C}$.

Posons $\mathrm{G} = \mathrm{F}$, désignons par τ l'opérateur identité de F dans lui-même et définissons R par

$$g\mathrm{R}f \Leftrightarrow g = \mathrm{T}f.$$

Visiblement, τ est sq-continu, $\mathscr{G}(\mathrm{R}) = \mathscr{G}(\mathrm{T})$ est sq-fermé et $\mathrm{R}(\mathrm{F}) = \mathrm{T}_{-1}\mathrm{F} = \mathrm{E}$. On se trouve donc dans les conditions de la proposition 1 et $\mathrm{T} = \tau \circ \mathrm{R}^{-1}$ est continu.

Corollaire 2. — *Si* E *est de Fréchet et si* T *est un opérateur linéaire de* E *dans* F, *tel que* $\mathscr{G}(\mathrm{T})$ *admette un réseau de type* $\mathscr{C}$, *alors* T *est continu.*

Posons ici $\mathrm{G} = \mathscr{G}(\mathrm{T})$. Soit τ la projection de $\mathscr{G}(\mathrm{T})$ dans F :

$$\tau(f, \mathrm{T}f) = \mathrm{T}f,\ \forall f \in \mathrm{E}.$$

C'est visiblement un opérateur sq-continu. Définissons la relation R par

$$g\mathrm{R}f \Leftrightarrow g = (f, \mathrm{T}f).$$

La relation R (qui est en fait la projection de $\mathscr{G}(\mathrm{T})$ sur E) est telle que $\mathrm{R}(\mathrm{G}) = \mathrm{E}$ et que $\mathscr{G}(\mathrm{R})$ soit sq-fermé. Donc $\mathrm{T} = \tau \circ \mathrm{R}^{-1}$ est continu.

Corollaire 3. — *Soient* E *de Fréchet et* F *muni d'un réseau de type* $\mathscr{C}$. *Si* T *est un opérateur linéaire défini d'une partie de* F *sur* E, *à graphe sq-fermé dans* $\mathrm{F} \times \mathrm{E}$, T *est ouvert.*

Posons $\mathrm{G} = \mathrm{F}$; définissons R de F dans E par

$$g\mathrm{R}f \Leftrightarrow \mathrm{T}g = f.$$

On a $\mathrm{R}(\mathrm{G}) = \mathrm{E}$ et $\mathscr{G}(\mathrm{R}) = \mathscr{G}(\mathrm{T})$ est sq-fermé dans $\mathrm{F} \times \mathrm{E}$.

Enfin, soit τ l'opérateur identité de F dans lui-même. Vu la proposition 1, $\tau \circ \mathrm{R}^{-1}$ est continu, donc T est ouvert.

Corollaire 4. — *Soit* E *de Fréchet et soit* T *un opérateur linéaire défini d'une partie de* F *sur* E, *tel que* $\mathscr{G}(\mathrm{T})$ *admette un réseau de type* $\mathscr{C}$. *L'opérateur* T *est ouvert.*

Posons $\mathrm{G} = \mathscr{G}(\mathrm{T})$ et définissons R de G dans E par

$$g\mathrm{R}f \Leftrightarrow g = (f, \mathrm{T}f).$$

Comme $\mathrm{TF} = \mathrm{E}$, on a $\mathrm{R(G)} = \mathrm{E}$. De plus, $\mathscr{G}(\mathrm{R})$ est *sq*-fermé puisque la projection de $\mathscr{G}(\mathrm{T})$ sur E est continue. Enfin, on désigne par τ la projection de $\mathscr{G}(\mathrm{T})$ sur F, qui est un opérateur continu. Il résulte de la proposition 1 que $\tau \circ \mathrm{R}^{-1}$ est continu, donc que T est ouvert.

Comme dans le théorème 2, on peut améliorer l'hypothèse que E soit de Fréchet. On obtient la

Proposition 2. — *Soient* E, F, G *trois espaces linéaires à semi-normes,* R *une relation linéaire de* G *dans* E, τ *un opérateur linéaire de* G *dans* F.

Supposons vérifiées les conditions suivantes :

— G *est à réseau de type* $\mathscr{C}$,

— R *est à graphe fermé,* τ *sq-continu,*

— R(G) *n'est pas maigre dans* E.

Alors $\tau \circ \mathrm{R}^{-1}$ *est continu de* E *dans* F *et* $\mathrm{R(G)} = \mathrm{E}$.

Si E *est à semi-normes dénombrables, on peut supposer* $\mathscr{G}(\mathrm{R})$ *sq-fermé au lieu de fermé.*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \boxed{\begin{array}{c}\mathrm{G}\\ \textit{à réseau de type } \mathscr{C}\end{array}} \arrow[dl, "\mathscr{G}(\mathrm{R})\ \textit{fermé}"'] \arrow[dr, "\tau\ \textit{sq-continu}"] & \\
\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{E}\ \textit{quelconque}\\ \mathrm{R(G)}\ \textit{non maigre}\end{array}} & & \boxed{\begin{array}{c}\mathrm{F}\\ \textit{quelconque}\end{array}}
\end{tikzcd}$$

La démonstration est analogue à celle de la proposition 1, dont nous conservons les notations.

Ici,

$$\mathrm{R(G)} = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} \mathrm{R}(e_{n_1}).$$

Comme R(G) n'est pas maigre, un des $\mathrm{R}(e_{n_1})$ n'est pas maigre et, de proche en proche, il existe une suite de n_k tels que $\mathrm{R}(e_{n_1,\dots,n_k})$ ne soit maigre pour aucun $k \in \mathbb{N}$.

On poursuit alors comme dans la démonstration de la proposition 1, à cette différence près que la condition $b_k \subset b_{p_k}(1/k)$ disparaît si E n'est pas à semi-normes dénombrables.

A f fixé dans $\overline{\mathrm{R}(\tau_{-1}\beta)}$, on associe ainsi f_k, f'_k tels que

$$f'_1 \in \mathrm{R}(\tau_{-1}\beta)\ ;\ f'_{k+1}, f_k \in \mathrm{R}\,[(\nu_k e_{n_1,\dots,n_k}) \cap \tau_{-1}\nu_k m_k \beta],\ \forall k \geqslant 1,$$

et

$$f - \sum_{i=1}^{k} f'_i + \sum_{i=1}^{k} f_i \in \overline{\mathrm{R}\,[(\nu_k e_{n_1,\dots,n_k}) \cap \tau_{-1}\nu_k m_k \beta]}.$$

Si g_k, g'_k sont tels que l'on ait $g_k \mathrm{R} f_k$, $g'_k \mathrm{R} f'_k$ et

$$g'_{k+1},\ g_k \in (\nu_k e_{n_1,\dots,n_k}) \cap \tau_{-1}\nu_k m_k \beta,$$

il existe g tel que

$$\sum_{i=1}^{k} g'_i - \sum_{i=1}^{k-1} g_i \to g$$

et on voit que $g \in (1 + 2\varepsilon)\tau_{-1}\beta$, vu la continuité de τ.

Soient alors b et b' des voisinages de 0 dans E et G respectivement. Quel que soit k, il existe $f''_k \in \mathrm{R}(\nu_k e_{n_1,\dots,n_k})$ tel que

$$f - \sum_{i=1}^{k} f'_i + \sum_{i=1}^{k} f_i - f''_k \in b,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Soit $g''_k \in \nu_k e_{n_1,\dots,n_k}$, tel que $g''_k \mathrm{R} f''_k$. Comme les séries $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ et $\sum_{k=1}^{\infty} g'_k$ convergent, g_k et g''_k tendent vers 0 dans G, donc

$$g - \sum_{i=1}^{k} g'_i + \sum_{i=1}^{k} g_i - g''_k \in b'$$

dès que k est assez grand.

Donc, quels que soient b et b',

$$[(g, f) + (b', b)] \cap \mathscr{G}(\mathrm{R}) \neq \varnothing,$$

d'où, comme $\mathscr{G}(\mathrm{R})$ est fermé, $(g, f) \in \mathscr{G}(\mathrm{R})$, soit $f \in \mathrm{R}(g) \subset (1 + 2\varepsilon)\mathrm{R}(\tau_{-1}\beta)$.

Énonçons encore les principaux corollaires de la proposition 2.

COROLLAIRE 1. — *Si* F *admet un réseau de type* $\mathscr{C}$,

— *si* T *est linéaire de* $\mathscr{D}(\mathrm{T}) \subset \mathrm{E}$ *dans* F *et si* $\mathscr{D}(\mathrm{T})$ *est non maigre dans* E *et* $\mathscr{G}(\mathrm{T})$ *fermé dans* $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$, *on a* $\mathscr{D}(\mathrm{T}) = \mathrm{E}$ *et* T *est continu.*

— *si* T *est linéaire d'une partie de* F *dans* E, *tel que* TF *soit non maigre dans* E *et* $\mathscr{G}(\mathrm{T})$ *fermé dans* $\mathrm{F} \times \mathrm{E}$, *on a* $\mathrm{TF} = \mathrm{E}$ *et* T *est ouvert.*

Si E *est à semi-normes dénombrables, dans les deux cas, on peut supposer* $\mathscr{G}(\mathrm{T})$ *sq-fermé au lieu de le supposer fermé.*

COROLLAIRE 2. — *Quels que soient* E *et* F,

— *si* T *est linéaire de* $\mathscr{D}(\mathrm{T}) \subset \mathrm{E}$ *dans* F, $\mathscr{D}(\mathrm{T})$ *non maigre dans* E *et* $\mathscr{G}(\mathrm{T})$ *à réseau de type* $\mathscr{C}$, *on a* $\mathscr{D}(\mathrm{T}) = \mathrm{E}$ *et* T *est continu.*

— *si* T *est linéaire d'une partie de* F *dans* E, TF *non maigre dans* E *et* $\mathscr{G}(\mathrm{T})$ *à réseau de type* $\mathscr{C}$, *on a* $\mathrm{TF} = \mathrm{E}$ *et* T *est ouvert.*

Les démonstrations sont analogues à celles des corollaires de la proposition 1.

REMARQUES. — Dans le corollaire 2, il n'intervient plus d'hypothèse sur E et F. Cette généralité est un peu illusoire, au moins en ce qui concerne E, car si $\mathscr{D}(T)$ y est non maigre, E n'est pas maigre dans lui-même, donc il est de Baire.

On notera d'ailleurs qu'un espace peut être de Baire et à semi-normes dénombrables sans être de Fréchet.

(Z) Ainsi, soit E de Fréchet et soit f_α, $\alpha \in \mathscr{I}$, une base de Hamel dans E. Fixons une suite $\alpha_i \in \mathscr{I}$ et posons

$$E_i = \rangle f_\alpha : \alpha \neq \alpha_i \langle$$

(c'est-à-dire l'enveloppe linéaire des f_α autres que f_{α_i}).

On a évidemment

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i,$$

donc, comme E n'est pas maigre, un des E_i n'est pas maigre dans E.

Cet E_i est dense dans E.

En effet, son adhérence contient un point intérieur donc, comme c'est un espace linéaire, elle est identique à E.

Comme E_i diffère de E, il n'est donc pas fermé et par conséquent il n'est pas de Fréchet.

Enfin, il est de Baire.

De fait, soit

$$E_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

où les F_n sont fermés dans E_i. On a alors, $\overline{F}_n^E$ désignant l'adhérence de F_n dans E,

$$E_i \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{F}_n^E,$$

donc un $\overline{F}_n^E$ est d'intérieur non vide. Supposons qu'il contienne b, semi-boule ouverte de E. On peut sans restriction supposer b centré dans E_i, puisque E_i est dense dans E. Il vient alors

$$F_n = \overline{F}_n^E \cap E_i \supset b \cap E_i$$

où $b \cap E_i$ est une semi-boule de E_i, d'où F_n est d'intérieur non vide dans E_i, ce qu'il fallait démontrer.

3. Nouveaux types de réseaux et applications à des théorèmes du graphe fermé

On peut améliorer les théorèmes précédents en affaiblissant les conditions imposées aux réseaux.

DÉFINITIONS. — Un ensemble $e \subset E$ est *extractable* si, de toute suite d'éléments de e, on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de e. Il est *relativement extractable* si, de toute suite d'éléments de e, on peut extraire une sous-suite qui converge dans E, mais pas nécessairement vers un élément de e. Évidemment, tout ensemble sq-fermé et relativement extractable est extractable.

Un ensemble e est *compact* si chaque fois qu'il est contenu dans une union d'ouverts, il est contenu dans l'union d'un nombre fini de ces ouverts. Il est *relativement compact* si son adhérence est compacte ou, ce qui revient au même, s'il est contenu dans un compact.

Introduisons une première variante de la condition ($\mathscr{C}$) pour les réseaux.

Un réseau

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

est *de type* $\mathscr{K}$ (resp. *de type* $\mathscr{E}$) dans E s'il vérifie la condition suivante.

Pour toute suite n_k, $k \in \mathbb{N}$, il existe une suite de nombres $\lambda_k > 0$ tels que, si $f_k \in e_{n_1,\ldots,n_k}$ et $\mu_k \in [0, \lambda_k]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\{\sum_{k=1}^{N} \mu_k f_k : N \in \mathbb{N}\}$$

est relativement compact (resp. relativement extractable) dans E.

Il est immédiat que *tout réseau de type* $\mathscr{C}$ *de* E *est de type* $\mathscr{K}$ *et* $\mathscr{E}$.

La proposition 1 se généralise comme suit.

Proposition 3. — *Soient* E, F, G *trois espaces linéaires à semi-normes,* R *une relation linéaire de* G *dans* E, τ *un opérateur linéaire de* G *dans* F.

Supposons vérifiées les conditions suivantes :

— E *est de Fréchet,* G *à réseau de type* $\mathscr{K}$ (resp. $\mathscr{E}$),

— R *est à graphe fermé* (resp. *sq-fermé*), τ *est continu* (resp. *sq-continu*),

— $R(G) = E$.

Alors $\tau \circ R^{-1}$ *est continu de* E *dans* F.

C'est encore vrai si on remplace les hypothèses « E *de Fréchet et* $R(G) = E$ » *par* « E *à semi-normes dénombrables et* R(G) *non maigre dans* E ». *On a alors en outre* $R(G) = E$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \boxed{\begin{array}{c}G\\ \textit{à réseau}\\ \textit{de type } \mathscr{K} \text{ (resp. } \mathscr{E})\end{array}} \arrow[dl, "\begin{array}{c}\mathscr{G}(R)\\ \textit{fermé}\\ \text{(resp. } \textit{sq-fermé})\end{array}"'] \arrow[dr, "\begin{array}{c}\tau\\ \textit{continu}\\ \text{(resp. } \textit{sq-continu})\end{array}"] & \\ \boxed{\begin{array}{c}E \textit{ de Fréchet}\\ R(G) = E\end{array}} & & \boxed{\begin{array}{c}F\\ \textit{quelconque}\end{array}} \end{tikzcd}$$

On reprend point par point la démonstration de la proposition 1 jusqu'à associer à $f \in \overline{R(\tau_{-1}\beta)}$,

$$f'_1 \in R(\tau_{-1}\beta),\ f_k, f'_{k+1} \in \mathscr{E}_k,$$

tels que

$$\sum_{i=1}^{k} f_i' - \sum_{i=1}^{k-1} f_i$$

tende vers f dans E.

On fixe alors g_k, $g_k' \in$ G vérifiant $g_k \mathrm{R} f_k$, $g_k' \mathrm{R} f_k'$ et

$$g_k,\ g_{k+1}' \in (\nu_k e_{n_1,\ldots,n_k}) \cap \tau_{-1} \nu_k m_k \beta.$$

Vu l'hypothèse sur le réseau de G, les ensembles $\{\sum_{i=1}^{k} g_i : k \in \mathbb{N}\}$ et $\{\sum_{i=1}^{k} g_i' : k \in \mathbb{N}\}$ sont relativement compacts (resp. relativement extractables). Leur différence l'est aussi. Or elle contient la suite

$$\sum_{i=1}^{k} g_i' - \sum_{i=1}^{k-1} g_i,\ k \in \mathbb{N}.$$

Dans le cas de l'extractabilité, on peut extraire de cette suite une sous-suite convergente : il vient, pour cette sous-suite,

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{k_n} f_i' - \sum_{i=1}^{k_n-1} f_i \to f \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{k_n} g_i' - \sum_{i=1}^{k_n-1} g_i \to g \end{array}\right\} \Rightarrow g\mathrm{R}f.$$

Or, comme τ est sq-continu,

$$\sum_{i=1}^{k_n} \tau g_i' - \sum_{i=1}^{k_n-1} \tau g_i \to \tau g,$$

d'où $\tau g \in (1 + 2\varepsilon)\beta$ et $f \in (1 + 2\varepsilon)\mathrm{R}(\tau_{-1}\beta)$.

Dans le cas de la compacité, la suite

$$\sum_{i=1}^{k} g_i' - \sum_{i=1}^{k-1} g_i$$

admet un élément *adhérent* (c'est-à-dire un élément tel que toute semi-boule centrée sur lui contienne une infinité d'éléments de la suite). Soit g cet élément adhérent. On voit immédiatement que (f, g) est alors adhérent à la suite

$$\left(\sum_{i=1}^{k} f_i' - \sum_{i=1}^{k-1} f_i,\ \sum_{i=1}^{k} g_i' - \sum_{i=1}^{k-1} g_i\right)$$

donc il appartient à l'adhérence du graphe de R et, comme ce dernier est fermé, on a $g\mathrm{R}f$.

De plus, comme τ est continu, τg est adhérent à la suite

$$\sum_{i=1}^{k} \tau g'_i - \sum_{i=1}^{k-1} \tau g_i,$$

d'où, comme β est fermé, $\tau g \in (1 + 2\varepsilon)\beta$ et $f \in (1 + 2\varepsilon)R(\tau_{-1}\beta)$.

Signalons quelques corollaires de la proposition 3.

COROLLAIRE 1. — *Si* E *est de Fréchet et* F *à réseau de type* $\mathscr{K}$ (resp. $\mathscr{E}$),

— *tout opérateur linéaire à graphe fermé* (resp. *sq-fermé*) *de* E *dans* F *est continu.*

— *tout opérateur linéaire défini d'une partie de* F *sur* E, *à graphe fermé* (resp. *sq-fermé*) *dans* $F \times E$ *est ouvert.*

COROLLAIRE 2. — *Si* E *est de Fréchet,*

— *tout opérateur* T *linéaire de* E *dans* F *et tel que* $\mathscr{G}(T)$ *admette un réseau de type* $\mathscr{K}$ *ou* $\mathscr{E}$ *est continu.*

— *tout opérateur* T *linéaire défini d'une partie de* F *sur* E *et tel que* $\mathscr{G}(T)$ *admette un réseau de type* $\mathscr{K}$ *ou* $\mathscr{E}$ *est ouvert.*

On obtient des variantes de ces corollaires en supposant E à semi-normes dénombrables et $\mathscr{D}(T)$ ou TF non maigre dans E.

Les démonstrations de ces résultats sont analogues à celles des corollaires de la proposition 1.

REMARQUE. — On pourrait se proposer d'étendre encore la proposition 3 au cas où E n'est pas à semi-normes dénombrables, comme on l'a fait dans le cas des réseaux de type $\mathscr{C}$. Dans ce dernier cas, (cf. théorème 2, p. 31), l'extension repose sur le fait que, si $f_k \in e_{n_1,\ldots,n_k}$, pour un choix convenable des λ_k, $\lambda_k f_k$ tend vers 0 comme terme général d'une série convergente. Cette propriété se perd pour les réseaux de type $\mathscr{K}$ ou $\mathscr{E}$ et l'extension ne paraît pas possible.

On peut encore chercher à affaiblir la condition imposée aux réseaux de type $\mathscr{K}$ ou $\mathscr{E}$ en supposant, par exemple, que les suites de sommes partielles

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k f_k$$

admettent un élément adhérent ou une sous-suite convergente.

On rencontre alors la difficulté que la différence de deux telles suites n'a pas nécessairement la propriété correspondante.

On obtient toutefois un résultat satisfaisant en adoptant la définition suivante.

DÉFINITION. — Un réseau

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

est *de type* $\mathscr{S}\mathscr{K}$ (resp. *de type* $\mathscr{S}\mathscr{E}$) dans E si, pour toute suite n_k fixée, il existe $\lambda_k > 0$ tels que, quels que soient f_k dans l'enveloppe absolument convexe $\langle e_{n_1,\ldots,n_k} \rangle$ de $e_{n_1,\ldots,n_k}$ et $\mu_k \in [0, \lambda_k]$, la suite des sommes partielles

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k f_k$$

admette un élément adhérent (resp. une sous-suite convergente) dans E.

Pour de tels espaces, le théorème du graphe fermé s'énonce de la manière suivante.

PROPOSITION 4. — *Si* E *est de Fréchet et si* F *admet un réseau de type* $\mathscr{S}\mathscr{K}$ (resp. $\mathscr{S}\mathscr{E}$), *tout opérateur linéaire de* E *dans* F, *à graphe fermé* (resp. *sq-fermé*) *est continu.*

La démonstration est analogue à celle du théorème 1, p. 28, mais l'intervention des enveloppes absolument convexes des ensembles du réseau de F y apporte des simplifications importantes. C'est pour bien les mettre en évidence que nous donnons cette démonstration avant de passer à des cas plus généraux.

Soit

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

le réseau de F et soit T l'opérateur.

On détermine d'abord une suite de n_k telle que $T_{-1}e_{n_1,\ldots,n_k}$ ne soit maigre pour aucun $k \in \mathbb{N}$.

Si β est une semi-boule fermée de centre 0 dans F, on détermine ensuite m_k tels que les

$$T_{-1}(e_{n_1,\ldots,n_k} \cap m_k\beta)$$

ne soient pas maigres.

Enfin, on fixe $\nu_k > 0$ tels que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \nu_k m_k \leqslant \varepsilon,$$

où $\varepsilon > 0$ est fixé arbitrairement, et que toute série de la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k g_k,$$

où $g_k \in \langle e_{n_1,\ldots,n_k}\rangle$ et $\mu_k \in [0, \lambda_k]$, admette un élément adhérent (resp. une sous-suite convergente) dans F.

Posons

$$\mathscr{E}_k = T_{-1}\,[(\nu_k\langle e_{n_1,\ldots,n_k}\rangle) \cap m_k\nu_k\beta].$$

Les $\mathscr{E}_k$ ne sont pas maigres, donc leur adhérence contient un point intérieur. De plus, ils sont absolument convexes, donc leur adhérence contient une semi-boule de centre 0. Soit b_k cette semi-boule. On peut sans restriction supposer que $b_k \subset b_{p_k}(1/k)$, où p_k désignent les semi-normes dénombrables de F.

Soit alors $f \in \overline{T_{-1}\beta}$. On lui associe successivement

— f_0 tel que

$$f_0 \in T_{-1}\beta\ ;\ f - f_0 \in b_1 \subset \overline{\mathscr{E}}_1,$$

— f_1 tel que

$$f_1 \in \mathscr{E}_1\ ;\ f - f_0 - f_1 \in b_2 \subset \overline{\mathscr{E}}_2,$$

et ainsi de suite. La suite f_k ainsi déterminée est telle que

$$\sum_{k=0}^{N} f_k \to f$$

dans E.

De plus, si $\mathscr{R}$ est de type $\mathscr{S}\mathscr{K}$, comme $Tf_k \in \nu_k\langle e_{n_1,\ldots,n_k}\rangle$,

$$\sum_{k=0}^{N} Tf_k$$

admet un élément adhérent g. On voit immédiatement que $g \in (1 + 2\varepsilon)\beta$. Or (f, g) est adhérent à

$$\left(\sum_{k=0}^{N} f_k, \sum_{k=0}^{N} Tf_k\right),$$

donc il appartient à l'adhérence de $\mathscr{G}(T)$ et, si ce dernier est fermé, $Tf = g$, ce qui entraîne que $f \in (1 + \varepsilon)T_{-1}\beta$.

Si $\mathscr{R}$ est de type $\mathscr{S}\mathscr{E}$, la suite

$$\sum_{k=0}^{N} Tf_k$$

admet une sous-suite convergeant vers $g \in F$. Ce g appartient encore à $(1 + \varepsilon)\beta$ et, si $\mathscr{G}(T)$ est *sq*-fermé, $Tf = g$, d'où la conclusion.

On peut encore généraliser la proposition 4 comme suit.

PROPOSITION 5. — *Soient* E, F, G *trois espaces linéaires à semi-normes,* R *une relation linéaire de* G *dans* E, τ *un opérateur linéaire de* G *dans* F.

Supposons vérifiées les conditions suivantes :

— E *est de Fréchet,* G *à réseau de type* $\mathscr{S}\mathscr{K}$ (resp. $\mathscr{S}\mathscr{E}$),

— R *est à graphe fermé* (resp. *sq-fermé*), τ *est continu* (resp. *sq-continu*),

— R(G) = E.

Alors $\tau \circ R^{-1}$ *est continu de* E *dans* F.

C'est encore vrai si on remplace les hypothèses « E *de Fréchet,* R(G) = E » *par* « E *à semi-normes dénombrables et* R(G) *non maigre dans* E ». *On a alors en outre* R(G) = E.

La démonstration est analogue à la précédente.

Parmi les corollaires de la proposition 5, citons les suivants :

COROLLAIRE 1. — *Si* E *est de Fréchet,* F *à réseau de type* $\mathscr{S}\mathscr{K}$ (resp. $\mathscr{S}\mathscr{E}$), *tout opérateur* T *linéaire défini d'une partie de* F *sur* E, *à graphe fermé* (resp. *sq-fermé*) *dans* F × E, *est ouvert.*

COROLLAIRE 2. — *Si* E *est de Fréchet,*

— T *linéaire de* E *dans* F, *tel que* $\mathscr{G}(T)$ *admette un réseau de type* $\mathscr{S}\mathscr{K}$ *ou* $\mathscr{S}\mathscr{E}$ *est continu.*

— T *linéaire défini d'une partie de* F *sur* E *et tel que* $\mathscr{G}$(T) *admette un réseau de type* $\mathscr{S}\mathscr{K}$ *ou* $\mathscr{S}\mathscr{E}$ *est ouvert.*

Remarque. — Notons enfin que la proposition 5 ne s'étend pas au cas où E n'est pas à semi-normes dénombrables, parce qu'on ne peut affirmer que, si une série admet un élément adhérent ou une sous-suite convergente, le terme général de la série tend vers 0.

4. Relations entre les différents types de réseaux

Pour être complet, examinons encore brièvement les relations entre les différents types de réseaux introduits et leurs propriétés de permanence.

Proposition 6. — a) *Tout réseau de type* $\mathscr{C}$ *est de type* $\mathscr{K}$ *et* $\mathscr{E}$.

b) *Tout réseau absolument convexe de type* $\mathscr{K}$ (resp. $\mathscr{E}$) *est de type* $\mathscr{S}\mathscr{K}$ (resp. $\mathscr{S}\mathscr{E}$).

c) *Si* E *est sq-complet, tout réseau de* E *de type* $\mathscr{K}$ *ou* $\mathscr{E}$ *est de type* $\mathscr{C}$.

Pour c), on applique la proposition 1, p. 15, en notant que tout ensemble relativement extractable ou relativement compact est borné.

Proposition 7. — a) *Si* E *admet un réseau de type* $\mathscr{K}$ *ou* $\mathscr{S}\mathscr{K}$ (resp. $\mathscr{E}$ ou $\mathscr{S}\mathscr{E}$) *et si* T *est un opérateur linéaire continu* (resp. *sq-continu*) *de* E *dans* F, TE *admet un réseau de même type.*

De même, tout sous-espace linéaire fermé (resp. *sq-fermé*) *de* E *admet un réseau de même type.*

b) *Si* E *est union d'une suite d'espaces* E_n *admettant un réseau de type* $\mathscr{K}$ (resp. $\mathscr{E}$, $\mathscr{S}\mathscr{K}$ *ou* $\mathscr{S}\mathscr{E}$), *il admet un réseau de même type.*

c) *Soit* E_n *une suite d'espaces emboîtés en décroissant et tels que, pour tout* n, *l'opérateur identité de* E_{n+1} *dans* E_n *soit sq-continu et soit* E *leur limite projective.*

Si les E_n *admettent un réseau de type* $\mathscr{E}$, *il en est de même pour* E.

d) *Tout produit dénombrable d'espaces à réseau de type* $\mathscr{E}$ *admet un réseau de type* $\mathscr{E}$.

Tout produit fini d'espaces à réseau de type $\mathscr{K}$ *admet un réseau de type* $\mathscr{K}$.

(Z) *Tout produit dénombrable d'espaces à réseau de type* $\mathscr{K}$ *admet un réseau de type* $\mathscr{K}$.

Pour le dernier point de d), il faut savoir qu'un produit dénombrable de compacts est compact, ce qui, à notre connaissance, exige qu'on fasse usage de l'axiome de Zorn.

Corollaires. — a) *Tout quotient séparé d'un espace à réseau de type* $\mathscr{K}$, $\mathscr{S}\mathscr{K}$, $\mathscr{E}$ *ou* $\mathscr{S}\mathscr{E}$ *admet un réseau de même type.*

b) *Toute somme directe dénombrable d'espaces à réseau de type* $\mathscr{K}$ (resp. $\mathscr{E}$) *admet un réseau de type* $\mathscr{K}$ (resp. $\mathscr{E}$).

Les démonstrations sont analogues à celles des propriétés correspondantes du chapitre I.

5. Extension à des limites inductives

A l'exception du théorème 1 et de ses corollaires dont on a donné d'emblée la meilleure forme utilisable, on s'est limité, dans ce chapitre, à supposer E de Fréchet ou de Baire.

On peut étendre les propositions 1 à 5 au cas où E est limite inductive de tels espaces, à partir des quelques remarques suivantes.

Supposons E limite inductive d'espaces E_α.

Soit T linéaire de E dans F et soit T_α sa restriction à E_α. Alors,

— T est continu de E dans F si et seulement si chaque T_α est continu de E_α dans F,

— si T est à graphe fermé (resp. *sq*-fermé) dans $E \times F$, chaque T_α est à graphe fermé (resp. *sq*-fermé) dans $E_\alpha \times F$.

Par contre, il ne suffit pas que $\mathscr{D}(T)$ ne soit pas maigre dans E pour que son intersection avec E_α ne soit pas maigre dans E_α.

De même, si T′ est linéaire de F sur E et si T'_α est la restriction de T′ à $T'_{-1}E_\alpha$,

— T′ est ouvert de F dans E si et seulement si chaque T'_α est ouvert de F dans E_α,

— si T′ est à graphe fermé (resp. *sq*-fermé) dans $F \times E$, chaque T'_α est à graphe fermé (resp. *sq*-fermé) dans $F \times E_\alpha$.

Ce qui précède est encore vrai quand on remplace T et T′ par des relations linéaires R et R′, si on dit que R′ est ouvert quand R'^{-1} est continu.

Formulons les résultats qu'on obtient dans le cas des opérateurs, pour E ultrabornologique.

Proposition 8. — *Si* E *est ultrabornologique, chacune des conditions* α, β, γ *suivantes est suffisante pour que* T, *linéaire de* E *dans* F, *soit continu* :

α. $\mathscr{G}(T)$ *est sq-fermé,* F *admet un réseau de type* $\mathscr{C}$, $\mathscr{E}$ *ou* $\mathscr{S}\mathscr{E}$,

β. $\mathscr{G}(T)$ *est fermé,* F *admet un réseau de type* $\mathscr{K}$ *ou* $\mathscr{S}\mathscr{K}$,

γ. $\mathscr{G}(T)$ *admet un réseau de type* $\mathscr{C}$, $\mathscr{K}$, $\mathscr{S}\mathscr{K}$, $\mathscr{E}$ *ou* $\mathscr{S}\mathscr{E}$.

Si T *est linéaire et défini d'une partie de* F *sur* E, *sous les mêmes hypothèses, il est ouvert.*