CHAPITRE III

THÉORÈMES DE LOCALISATION ET DE RELÈVEMENT

Dans les théorèmes du type du graphe fermé développés au chapitre II, les réseaux n'ont servi que d'auxiliaires dans les démonstrations. En leur faisant jouer un rôle plus explicite, on obtient ici des théorèmes de localisation pour lesquels l'introduction dun' nouveau type de réseaux, les réseaux stricts, s'avère très utile. On étudie ensuite les notions de suites très convergentes et d'ensembles très compacts et on démontre un théorème de relèvement pour ces ensembles.

1. Un théorème général

THÉORÈME 1. — *Soient* E *un espace de Fréchet,* F *un espace muni d'un réseau de type* $\mathscr{C}$

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\},$$

R *une relation linéaire de* E *dans* F, *à graphe sq-fermé et telle que* $\mathrm{R}^{-1}(\mathrm{F}) = \mathrm{E}$.

a) *Il existe* $n_1 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\mathrm{R}^{-1}(e_{n_1})$ *ne soit pas maigre. Pour cet* n_1, *il existe une semi-boule* b_1 *de* E *telle que*

$$b_1 \subset \mathrm{R}^{-1}(\overline{\langle e_{n_1}\rangle}).$$

b) *Si* $\mathrm{R}^{-1}(e_{n_1,\ldots,n_k})$ *n'est pas maigre, il existe* $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ *tel que* $\mathrm{R}^{-1}(e_{n_1,\ldots,n_{k+1}})$ *ne soit pas maigre. Pour cet* n_{k+1}, *il existe alors une semi-boule* b_{k+1} *de* E *telle que*

$$b_{k+1} \subset \mathrm{R}^{-1}(\overline{\langle e_{n_1,\ldots,n_{k+1}}\rangle}).$$

Le fait que $\mathrm{R}^{-1}e_{n_1}$ ne soit pas maigre pour au moins un n_1 résulte de la relation

$$\mathrm{E} = \mathrm{R}^{-1}(\mathrm{F}) = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} \mathrm{R}^{-1}(e_{n_1}).$$

De même, on a

$$\mathrm{R}^{-1}(e_{n_1,\ldots,n_k}) = \bigcup_{n_{k+1}=1}^{\infty} \mathrm{R}^{-1}(e_{n_1,\ldots,n_{k+1}})$$

où, si le premier membre n'est pas maigre, un des ensembles du second membre n'est pas maigre.

Il reste à établir que, si $\mathrm{R}^{-1}(e_{n_1,\ldots,n_{k_0}})$ n'est pas maigre, il existe une semi-boule b_{k_0} telle que

$$b_{k_0} \subset \mathrm{R}^{-1}(\overline{\langle e_{n_1,\ldots,n_{k_0}}\rangle}).$$

On commence par déterminer n_k, $k > k_0$, tels que les ensembles $\mathrm{R}^{-1}(e_{n_1,\ldots,n_k})$ ne soient pas maigres.

Il existe alors $\lambda_k > 0$ tels que

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \lambda_k \leqslant \varepsilon,$$

où $\varepsilon > 0$ est fixé arbitrairement, et tels que toute série de la forme

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \mu_k g_k,$$

avec $\mu_k \in [0, \lambda_k]$ et $g_k \in e_{n_1,\ldots,n_k}$, converge dans F.

Les ensembles

$$\mathscr{E}_k = \lambda_k \overline{\mathrm{R}^{-1}(e_{n_1,\ldots,n_k})}$$

sont d'intérieur non vide et contiennent une semi-boule $f_k + b_k$, où on peut supposer que $f_k \in \lambda_k \mathrm{R}^{-1}(e_{n_1,\ldots,n_k})$ et que $b_k \subset b_{p_k}(1/k)$, si p_k, $k \in \mathbb{N}$, sont les semi-normes dénombrables de E.

Démontrons à présent que

$$\overline{\mathrm{R}^{-1}(\langle e_{n_1,\ldots,n_{k_0}}\rangle)} \subset (1 + 2\varepsilon)\mathrm{R}^{-1}(\overline{\langle e_{n_1,\ldots,n_{k_0}}\rangle}).$$

On conclura immédiatement en notant que le premier membre contient une semi-boule b_{k_0} de centre 0 dans E.

Si f appartient au premier membre, on lui associe une suite f'_k telle que

$$f'_{k_0} \in \mathrm{R}^{-1}(\langle e_{n_1,\ldots,n_{k_0}}\rangle)\ ;\ f'_k \in \mathscr{E}_k,\ \forall k > k_0,$$

et

$$f - \sum_{i=k_0}^{k} f'_i + \sum_{i=k_0+1}^{k} f_i \in b_{k+1},\ \forall k > k_0.$$

A f_k, f'_k correspondent respectivement g_k, g'_k tels que $f_k \mathrm{R} g_k$, $f'_k \mathrm{R} g'_k$,

$$g'_{k_0} \in \langle e_{n_1,\ldots,n_{k_0}}\rangle\ ;\ g'_k,\ g_k \in \lambda_k e_{n_1,\ldots,n_k},\ \forall k > k_0.$$

La suite

$$\sum_{i=k_0}^{k} g'_i - \sum_{i=k_0+1}^{k} g_i$$

converge dans F et sa limite g appartient à $(1 + 2\varepsilon)\overline{\langle e_{n_1,\ldots,n_{k_0}}\rangle}$ puisque c'est le cas pour

$$\sum_{i=k_0}^{k} g'_i - \sum_{i=k_0+1}^{k} g_i$$

quel que soit $k > k_0$.

Or, comme $\mathscr{G}(\mathrm{R})$ est fermé pour les suites, on a $f \mathrm{R} g$, d'où la conclusion.

Variante. — *Le théorème* 1 *est encore vrai si on remplace les hypothèses sur* E, $\mathscr{R}$ *et* R *par l'une quelconque des conditions* a), b) c) *suivantes* :

a) E *est de Fréchet*, $\mathscr{R}$ *de type* $\mathscr{K}$ *ou* $\mathscr{S}\mathscr{K}$, R *à graphe fermé*, $E = R^{-1}(F)$,

b) E *est de Fréchet*, $\mathscr{R}$ *de type* $\mathscr{E}$ *ou* $\mathscr{S}\mathscr{E}$, R *à graphe sq-fermé*, $E = R^{-1}(F)$,

c) $\mathscr{R}$ *est de type* $\mathscr{C}$, R *à graphe sq-fermé*, $R^{-1}(F)$ *non maigre dans* E.

Les démonstrations sont analogues à celles des variantes correspondantes du théorème du graphe fermé.

2. Réseaux stricts

L'introduction d'un nouveau type de réseau plus particulier que le type $\mathscr{C}$ permet de donner une forme achevée au théorème 1.

A l'encontre des réseaux de type $\mathscr{K}$, $\mathscr{E}$, $\mathscr{S}\mathscr{K}$ ou $\mathscr{S}\mathscr{E}$, qui sont des généralisations de caractère théorique, ce nouveau type est très répandu et joue dans les applications un rôle important.

Définition. — Un réseau de E

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\dots,n_k} : k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

est *strict* si les $e_{n_1,\dots,n_k}$ sont absolument convexes et si, pour toute suite n_k fixée, il existe $\lambda_k > 0$ tels que toute série de la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k,$$

avec $\mu_k \in [0, \lambda_k]$ et $f_k \in e_{n_1,\dots,n_k}$, converge dans E et que la limite de la série vérifie la relation

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \mu_k f_k \in e_{n_1,\dots,n_{k_0}}, \ \forall k_0 \in \mathbb{N}.$$

Pour des espaces à réseau strict, le théorème du paragraphe précédent se perfectionne comme suit.

Théorème 2. — *Soient* E *de Fréchet*, F *muni d'un réseau strict*

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\dots,n_k} : k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

et R *une relation linéaire de* E *dans* F, *à graphe sq-fermé et telle que* $R^{-1}(F) = E$.

a) *Il existe* b_1 *et* n_1 *tels que*

$$b_1 \subset R^{-1}(e_{n_1}).$$

b) *Si* b_k *et* $n_1, \dots, n_k$ *sont tels que*

$$b_k \subset R^{-1}(e_{n_1,\dots,n_k}),$$

il existe b_{k+1} et n_{k+1} *tels que*

$$b_{k+1} \subset R^{-1}(e_{n_1,\dots,n_{k+1}}).$$

Même énoncé pour E *quelconque, si* R *est à graphe fermé et si* $R^{-1}(F)$ *n'est pas maigre dans* E.

On remarque que les inclusions impliquent que les seconds membres soient des ensembles non maigres.

La démonstration se déduit de celle du théorème 1 en y remplaçant $\underline{\langle e_{n_1,\ldots,n_k}\rangle}$ et $\overline{\langle e_{n_1,\ldots,n_k}\rangle}$ par $e_{n_1,\ldots,n_k}$ et les λ_k par ceux qui interviennent dans la définition des réseaux stricts. On obtient alors

$$\lambda_{k_0}\overline{R^{-1}(e_{n_1,\ldots,n_{k_0}})} \subset R^{-1}(e_{n_1,\ldots,n_{k_0}}).$$

Avant d'appliquer le théorème précédent, examinons rapidement les exemples et les propriétés de permancence des espaces à réseau strict.

Exemples. — *Tout réseau de type* $\mathscr{C}$ *formé d'ensembles absolument convexes et fermés est strict.*

En particulier, les espaces suivants admettent un réseau strict :

— E *s'il est de Fréchet,*

— $E^*_{\mathscr{F}}$ *si* E *est à semi-normes dénombrables ou limite inductive d'une suite de tels espaces,*

— $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}(E, F)$ *si* E *est à semi-normes dénombrables,* F *de Fréchet.*

Supposons que les $e_{n_1,\ldots,n_k}$ qui constituent un réseau $\mathscr{R}$ de type $\mathscr{C}$ soient absolument convexes.

Pour un choix convenable des λ_k, toute série de la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k,$$

avec $f_k \in e_{n_1,\ldots,n_k}$ et $0 \leqslant \mu_k \leqslant \lambda_k$, converge dans E. Si on impose en outre que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \leqslant 1,$$

on a

$$\sum_{k=k_0}^{N} \mu_k f_k \in e_{n_1,\ldots,n_{k_0}}, \ \forall N \in \mathbb{N},$$

d'où, si les $e_{n_1,\ldots,n_k}$ sont fermés,

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \mu_k f_k \in e_{n_1,\ldots,n_{k_0}}, \ \forall k_0 \in \mathbb{N}.$$

Pour les cas particuliers, il suffit de noter que les réseaux décrits dans les exemples 1 à 3, chap. I, p. 19 et 20, sont formés d'ensembles absolument convexes et fermés.

Proposition 1. — *Si* E *admet un réseau strict*

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\},$$

a) *si* L *est un sous-espace linéaire sq-fermé de* E,

$$\mathscr{R}_{\mathrm{L}} = \{e_{n_1,\dots,n_k} \cap \mathrm{L} : k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

est strict dans L *muni du système de semi-normes induit par* E.

b) *si* T *est linéaire et sq-continu de* E *dans* F,

$$\mathrm{T}\mathscr{R} = \{\mathrm{T}e_{n_1,\dots,n_k} : k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

est strict dans TE *muni du système de semi-normes induit par* F.

c) $\mathscr{R}$ *est strict dans* E_b^-.

d) *quels que soient* $k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, *l'enveloppe linéaire de* $e_{n_1,\dots,n_k}$ *est à réseau strict.*

Corollaires. — *Si* E *est à réseau strict, tout quotient séparé de* E *est à réseau strict.*

— *Si* E_a *est à réseau strict [et à semi-normes représentables],* E *est à réseau strict.*

— *Si* E *est tonnelé, quel que soit* $\mathscr{F}$, *tout réseau strict dans* E_s^* *est strict dans* $\mathrm{E}_{\mathscr{F}}^*$ *et tout réseau strict dans* $\mathscr{L}_s(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *est strict dans* $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

Il suffit d'appliquer le théorème 1, chap. I, p. 23 et de vérifier le caractère strict des réseaux obtenus. Pour c), on a vu que, si $\mathscr{R}$ est de type $\mathscr{C}$ dans E, il est de type $\mathscr{C}$ dans E_b^- et que, si les séries de la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k,$$

avec $f_k \in e_{n_1,\dots,n_k}$ et $\mu_k \in [0, \lambda_k]$, convergent dans E, les séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k,$$

avec $f_k \in e_{n_1,\dots,n_k}$ et $\mu_k \in [0, 2^{-k}\lambda_k]$, convergent dans E_b^-.

Si, en outre,

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \mu_k f_k \in e_{n_1,\dots,n_{k_0}}, \ \forall k_0 \in \mathbb{N},$$

pour $f_k \in e_{n_1,\dots,n_k}$ et $\mu_k \in [0, \lambda_k]$, c'est vrai a fortiori si $\mu_k \in [0, 2^{-k}\lambda_k]$.

Le point d) est spécifique aux réseaux stricts.

Fixons $n_1, \dots, n_{k_0}$. On a

$$\rangle e_{n_1,\dots,n_{k_0}} \langle = \bigcup_{m=1}^{\infty} m e_{n_1,\dots,n_{k_0}},$$

puisque $e_{n_1,\dots,n_{k_0}}$ est absolument convexe.

Les ensembles

$$\mathscr{E}_{m_1,\dots,m_k} = m_1 e_{n_1,\dots,n_{k_0},m_2,\dots,m_k}$$

constituent donc un réseau de $\rangle e_{n_1,\dots,n_{k_0}} \langle$.

C'est un réseau de type $\mathscr{C}$.

Soit m_k une suite fixée. On lui associe λ_{k+k_0-1}, où λ_k est la suite associée à $n_1, \ldots, n_{k_0}, m_2, m_3, \ldots$ dans $\mathscr{R}$. Les séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k,$$

où $f_k \in m_1 e_{n_1,\ldots,n_{k_0},m_2,\ldots,m_k}$ et $\mu_k \in [0, \lambda_k]$ convergent alors dans E et, comme $\mathscr{R}$ est strict, leur limite appartient à $2m_1 e_{n_1,\ldots,n_{k_0}} \subset \rangle e_{n_1,\ldots,n_{k_0}} \langle$, donc elles convergent dans $\rangle e_{n_1,\ldots,n_{k_0}} \langle$.

Enfin, il est immédiat que c'est un réseau strict.

Proposition 2. — a) *Si* E *est l'union d'une suite d'espaces images par des opérateurs sq-continus d'espaces à réseau strict, il est à réseau strict.*

b) *Soient* E_n *une suite d'espaces emboîtés en décroissant, tels que, pour tout* n, *l'opérateur identité de* E_{n+1} *dans* E_n *soit sq-continu. Si les* E_n *sont à réseau strict, leur limite projective est à réseau strict.*

c) *Tout produit dénombrable d'espaces à réseau strict est à réseau strict.*

Corollaires. — a) *Toute limite inductive dénombrable d'espaces à réseau strict est à réseau strict.*

b) *Toute somme directe dénombrable d'espaces à réseau strict est à réseau strict.*

Les démonstrations sont analogues à celles des théorèmes 2, 3 et 4, chap. I, p. 24 à 26.

3. Théorèmes de localisation

Si R est la relation associée à un opérateur linéaire de E dans F, le théorème 2 fournit des propriétés de « localisation », qui situent l'image par T d'ensembles de E par rapport aux ensembles du réseau de F.

Théorème 3. — *Soient* E *de Fréchet et* F *muni d'un réseau strict*

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}.$$

Si T *est un opérateur linéaire à graphe sq-fermé de* E *dans* F, *il existe une semi-boule* b_1 *de* E *et un indice* $n_1 \in \mathbb{N}$ *tels que*

$$\mathrm{T}b_1 \subset e_{n_1}.$$

De plus, si, pour b_k *et* $n_1, \ldots, n_k$ *donnés, on a*

$$\mathrm{T}b_k \subset e_{n_1,\ldots,n_k},$$

il existe b_{k+1} *et* n_{k+1} *tels que*

$$\mathrm{T}b_{k+1} \subset e_{n_1,\ldots,n_{k+1}}.$$

En particulier, il existe une suite d'indices n_k *et une suite de semi-boules* b_k *de* E *tels que*

$$\mathrm{T}b_k \subset e_{n_1,\ldots,n_k}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Pour ces n_k,

$$\mathrm{TE} \subset \rangle e_{n_1,\ldots,n_k} \langle, \ \forall k \in \mathbb{N},$$

et, pour tout borné B *de* E, *il existe* $C_k > 0$ *tels que*

$$TB \subset C_k e_{n_1,\ldots,n_k}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Même énoncé pour E *quelconque, si* $\mathscr{D}(T)$ *est non maigre dans* E *et* $\mathscr{G}(T)$ *fermé.*

Il suffit d'appliquer le théorème 2 en prenant pour R la relation linéaire associée à T.

Corollaire 1. — *Si* E *est de Fréchet,* F *limite inductive d'une suite d'espaces de Fréchet* F_n *et* T *linéaire et à graphe sq-fermé de* E *dans* F,

— $TE \subset F_n$ *pour au moins un* n,

— T *est continu de* E *dans cet* F_n.

Il suffit, pour le voir, de munir F du réseau décrit dans le théorème 2, chap. I, p. 24, chaque F_n étant muni du réseau de l'exemple 1, chap. I, p. 19.

C'est le théorème du graphe fermé dans les espaces $\mathscr{LF}$ (cf. Grothendieck [19]), dû à J. Dieudonné et L. Schwartz dans le cas des limites inductives strictes, à G. Köthe dans le cas des $\mathscr{LF}$ quelconques.

Corollaire 2. — *Soient* E *quelconque,* F *muni d'un réseau strict*

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\ldots,n_k} : k \in \mathbb{N}\}$$

et T *linéaire et à graphe sq-fermé de* E *dans* F. *Pour tout* B, *borné absolument convexe et sq-complet de* E,

— *il existe* $n_1 \in \mathbb{N}$ *et* $C_1 > 0$ *tels que*

$$TB \subset C_1 e_{n_1},$$

— *si*

$$TB \subset C_k e_{n_1,\ldots,n_k}, \quad (*)$$

il existe $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ *et* $C_{k+1} > 0$ *tels que*

$$TB \subset C_{k+1} e_{n_1\ldots,n_{k+1}}.$$

En particulier, il existe $n_k \in \mathbb{N}$ *et* $C_k > 0$ *tels que* (*) *ait lieu pour tout* $k \in \mathbb{N}$.

Cela s'applique notamment aux bornés absolument convexes et *sq*-complets de F lui-même, en prenant $T = I$.

Pour établir le corollaire 2, on note que l'espace E_B, enveloppe linéaire de B muni de la norme associée à B, est de Banach et que la restriction de T à E_B est à graphe *sq*-fermé dans $E_B \times F$.

Il suffit alors d'appliquer le théorème 3 pour conclure.

Remarque. — *Si on modifie le réseau* $\mathscr{R}$ *comme il est indiqué dans la proposition* 3, chap. I, p. 16, *on peut supposer que les constantes* C_k *sont toutes égales à* 1.

Corollaire 3. — *Si* E *est de Baire et admet un réseau strict, il est de Fréchet.*

Cet énoncé généralise le fait classique que *la limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Fréchet* E_n *ne peut être de Baire sans que les* E_n *soient identiques à partir d'un certain rang.*

Comme l'opérateur identité de E dans lui-même est continu, il existe une suite de semi-boules b_k de E et une suite d'indices $n_k \in \mathbb{N}$, tels que

$$b_k \subset e_{n_1,\ldots,n_k}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Or, quelle que soit la semi-boule b de centre 0 dans E, si λ_k est la suite associée aux n_k dans la définition du réseau strict, on a

$$\lambda_k e_{n_1,\dots,n_k} \subset b$$

dès que k est assez grand. Cela résulte de la proposition 4, chap. I, p. 17.

Il en résulte que E est à semi-normes dénombrables.

Il est aussi sq-complet.

De fait, soit f_n une suite de Cauchy dans E. On peut en extraire une sous-suite f_{n_k} telle que

$$f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \in \lambda_k b_k \subset \lambda_k e_{n_1,\dots,n_k}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Alors

$$f_{n_N} = f_{n_1} + \sum_{k=1}^{N-1} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$$

converge dans E et la suite f_n converge vers la même limite.

Variante. — *Si* E *est de Baire et admet un réseau de type* $\mathscr{C}$, *il est à semi-normes dénombrables.*

La démonstration est analogue à celle du corollaire 3, en partant cette fois du théorème 1. On ne peut toutefois plus démontrer que E est sq-complet.

D'autres applications du théorème 3 fournissent encore des critères d'existence de réseaux et des propriétés des bornés dans les espaces d'opérateurs. Vu la longueur des développements qu'elles entraînent, elles sont reportées aux chapitres IV et V.

4. Suites très convergentes et ensembles très compacts

Avant de passer aux propriétés de relèvement, introduisons deux notions utiles.

Définitions. — Une suite f_n de E est *très convergente vers* 0 s'il existe un opérateur linéaire continu T d'un espace de Fréchet E_0 dans E et une suite $g_n \to 0$ dans E_0 tels que $Tg_n = f_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Une suite f_n est très *convergente vers* f si la suite $f_n - f$ est très convergente vers 0.

Un ensemble K de E est *très compact* s'il existe un opérateur linéaire continu T d'un espace de Fréchet E_0 dans E et un compact K_0 de E_0 tels que $K = TK_0$.

Proposition 3. — *Toute suite très convergente est convergente.*

Tout ensemble très compact est compact et extractable.

C'est immédiat.

Proposition 4. — *Tout sous-ensemble sq-fermé d'un ensemble très compact est très compact.*

En effet, soient E_0 de Fréchet, T continu de E_0 dans E et K_0 compact dans E_0. Si F est sq-fermé et est contenu dans TK_0, $T_{-1}F$ est sq-fermé donc fermé dans E_0, donc $K_0 \cap T_{-1}F$ est compact dans E_0 et

$$F = T(K_0 \cap T_{-1}F)$$

est très compact.

Proposition 5. — *Si la suite f_n est très convergente vers 0, il existe $\lambda_n \to \infty$ tels que la suite $\lambda_n f_n$ tende vers 0 et même soit très convergente vers 0 dans* E.

De fait, si g_n tend vers 0 dans l'espace de Fréchet E_0, on sait qu'il existe des λ_n tels que $\lambda_n \to \infty$ et $\lambda_n g_n \to 0$ dans E_0 : si p_i sont les semi-normes dénombrables de E_0 et si n_i sont tels que

$$p_i(g_n) \leqslant 2^{-2i}, \forall n \geqslant n_i,$$

on prend $\lambda_n = 2^i$ pour $n_i \leqslant n < n_{i+1}$.

Si la suite f_n, très convergente vers 0, s'écrit Tg_n, avec T continu de E_0 dans E, la suite $\lambda_n f_n$ est encore très convergente vers 0, d'où la conclusion.

Proposition 6. — *Si la suite f_n est très convergente vers 0 dans* E, *on a*

$$\overline{\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n \rangle} = \{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n : \sum_{n=1}^{\infty} | c_n | \leqslant 1 \}.$$

De plus, cet ensemble est compact et même très compact dans E.

Supposons que $f_n = Tg_n$, où $g_n \to 0$ dans l'espace de Fréchet E_0 et où T est linéaire et continu de E_0 dans E.

On sait que

$$\mathscr{K} = \{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n : \sum_{n=1}^{\infty} | c_n | \leqslant 1 \}$$

est défini et compact dans E_0 (on se référera par exemple à [17], paragr. 21, p.101, ou au lemme préparatoire au théorème de relèvement, p. 60). Dès lors, les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n T g_n$$

convergent dans E et

$$\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n : \sum_{n=1}^{\infty} | c_n | \leqslant 1 \} = T\mathscr{K}$$

est compact et même très compact dans E. Or il est trivial que

$$\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n \rangle \subset T\mathscr{K} \subset \overline{\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n \rangle},$$

d'où $T\mathscr{K} = \overline{\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n \rangle}$, ce qui établit la proposition.

Proposition 7. — *Tout ensemble très compact de* E *est contenu dans l'enveloppe absolument convexe fermée d'une suite très convergente vers* 0 *dans* E.

En particulier, l'enveloppe absolument convexe fermée d'un ensemble très compact est aussi très compacte.

Soit $K = TK_0$, où K_0 est compact dans l'espace de Fréchet E_0 et T linéaire et continu de E_0 dans E.

Il existe une suite g_n tendant vers 0 dans E_0, telle que

$$K_0 \subset \overline{\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} g_n \rangle} = \{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n : \sum_{n=1}^{\infty} | c_n | \leqslant 1 \}$$

(cf. [17], b), p. 82). Alors

$$K = TK_0 \subset \{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n Tg_n : \sum_{n=1}^{\infty} | c_n | \leqslant 1 \} = \overline{\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} Tg_n \rangle},$$

d'où la conclusion.

Pour le cas particulier, on note que l'enveloppe absolument convexe fermée de K est fermée dans

$$\overline{\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} Tg_n \rangle},$$

qui est très compact, vu la proposition 6, et on conclut en appliquant la proposition 4.

On peut particulariser le choix de l'espace de Fréchet E_0 qui intervient dans la définition des suites très convergentes et des ensembles très compacts.

Proposition 8. — *Pour qu'une suite f_n soit très convergente vers f* (resp. *pour que* K *soit très compact*), *il faut et il suffit qu'il existe un compact absolument convexe* K_0 *de* E, *contenant la suite f_n* (resp. *l'ensemble* K) *et tel que f_n converge vers f dans* E_{K_0} (resp. *que* K *soit compact dans* E_{K_0}).

La condition est évidemment suffisante, puisque l'opérateur identité de E_{K_0} dans E est continu et que E_{K_0} est de Banach.

Démontrons qu'elle est nécessaire.

Soient E_0 de Fréchet, T linéaire et continu de E_0 dans E et $f_n = Tg_n$, où g_n converge vers 0 dans E_0.

Il existe $\lambda_n \to \infty$ tels que $\lambda_n g_n$ tende encore vers 0 dans E_0. L'ensemble

$$\mathscr{K} = \overline{\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} \lambda_n g_n \rangle}$$

est donc compact et absolument convexe dans E_0 et son image $T\mathscr{K}$ est compacte et absolument convexe dans E.

De plus, f_n tend vers 0 dans $E_{T\mathscr{K}}$, car

$$\lambda_n f_n \in T\mathscr{K} \Rightarrow \| f_n \|_{E_{T\mathscr{K}}} \leqslant 1/\lambda_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

De même, si $K = TK_0$, où K_0 est compact dans E_0, il existe g_n tendant vers 0 dans E_0, tels que

$$K_0 \subset \overline{\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} g_n \rangle} = \{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n : \sum_{n=1}^{\infty} | c_n | \leqslant 1 \}.$$

Alors

$$K = TK_0 \subset \{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n Tg_n : \sum_{n=1}^{\infty} | c_n | \leqslant 1 \}.$$

Ce dernier ensemble est compact dans $E_{T\mathscr{K}}$ puisque Tg_n tend vers 0 dans $E_{T\mathscr{K}}$. Or K, fermé dans E, est fermé dans $E_{T\mathscr{K}}$, donc il y est compact.

Proposition 9. — *Si f_n est une suite très convergente* (resp. K *un ensemble très compact*) *de* E *et si* T *est un opérateur linéaire de* E *dans* F *tel que l'image par* T *de tout borné de* E *soit bornée dans* F, *alors la suite* Tf_n *est très convergente* (resp. TK *est très compact*) *dans* F.

Corollaire. — [*Si* E *est à semi-normes représentables*], *toute suite très convergente dans* E_a *est très convergente dans* E *et tout ensemble très compact dans* E_a *est très compact dans* E.

En effet, soient E_0 de Fréchet, T_0 linéaire et continu de E_0 dans E, $g_n \to 0$ et K_0 compact dans E_0.

L'opérateur TT_0 est linéaire de E_0 dans F et transforme les bornés de E_0 en bornés de F. Donc il est continu de E_0 dans F et $T(T_0g_n)$ et $T(T_0K_0)$ sont respectivement une suite très convergente et un ensemble très compact de F.

Pour le corollaire, on note qu'en vertu du théorème de Mackey, tout borné de E_a est borné dans E.

Voici encore quelques exemples de suites très convergentes et d'ensembles très compacts.

Exemple 1. — *Si* E *est sq-complet, si la suite f_n est bornée et si $\lambda_n \in \mathbb{C}$ tend vers* 0, *la suite $\lambda_n f_n$ est très convergente vers* 0.

Appelons B l'enveloppe absolument convexe fermée de la suite f_n. C'est un borné absolument convexe et *sq*-complet, donc l'espace E_B associé est de Banach.

Or $\lambda_n f_n$ tend vers 0 dans E_B, puisque

$$\| f_n \|_{E_B} \leqslant 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'où la conclusion.

Exemple 2. — *Si* E *admet un réseau de type* $\mathscr{C}$,

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\},$$

pour toute suite n_k fixée, si f_k appartient à $e_{n_1,\ldots,n_k}$ et si les λ_k sont assez petits, la suite $\lambda_k f_k$ est très convergente vers 0 *dans* E.

Aux n_k, associons $\nu_k > 0$ tels que les séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k g_k,$$

où $g_k \in e_{n_1,\ldots,n_k}$ et $\mu_k \in [0, \nu_k]$, convergent dans E.

Pour $f_k \in e_{n_1,\ldots,n_k}$ donnés, l'ensemble

$$\mathscr{K} = \{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k : \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k/\nu_k \leqslant 1\}$$

est compact et absolument convexe, en vertu du lemme, p. 60. Donc $E_{\mathscr{K}}$ est de Banach. Dès lors, quelle que soit la suite ε_k tendant vers 0, la suite $\varepsilon_k \nu_k f_k$ est très convergente vers 0 dans E.

DÉFINITIONS. — On appelle espace *de Schwartz* un espace E où, pour tout $p \in \{p\}$, il existe $p' \in \{p\}$ tel que $b_{p'}(1)$ soit précompact pour la semi-norme p.

On appelle *co-Schwartz* un espace où, pour tout borné B, il existe un borné absolument convexe B′ tel que B soit précompact dans $E_{B'}$, enveloppe linéaire de B′ munie de la norme associée à B′.

L'espace E *est co-Schwartz si et seulement si* E_b^* *est de Schwartz.*

EXEMPLE 3. — *Si* E *est de Schwartz, tout ensemble équicontinu et fermé dans* E_b^* *y est très compact.*

Si, en outre, E *est évaluable, c'est le cas pour tout borné fermé de* E_b^*.

Il suffit de démontrer que, pour toute semi-boule b de E, le polaire b^Δ de b est très compact dans E_b^*.

En effet, tout ensemble équicontinu est contenu dans un tel b^Δ et, si E est évaluable, tout borné de E_b^* est équicontinu.

Comme E est de Schwartz, à b correspond $b' \subset b$ tel que b' soit précompact pour la semi-norme correspondant à b.

Par le théorème de précompacité réciproque (cf. [17], p. 200), b^Δ est contenu dans b'^Δ et est précompact pour la norme

$$\| \mathcal{T} \| = \sup_{f \in b'} | \mathcal{T}(f) |.$$

Or l'enveloppe linéaire de b'^Δ muni de cette norme est un espace de Banach. Comme b^Δ y est fermé, il y est donc compact, d'où la conclusion.

EXEMPLE 4. — *Si* E *est co-Schwartz et sq-complet, tout borné absolument convexe et fermé de* E *est très compact.*

Soit B un tel ensemble. Il lui correspond B′ borné et absolument convexe tel que B soit précompact dans l'espace normé $E_{B'}$. On peut évidemment supposer B′ fermé, quitte à lui substituer son adhérence. La boule fermée de centre 0 et de rayon 1 de $E_{B'}$ est alors égale à B′, donc elle est fermée dans E. De là, E_B est de Banach. Comme B est fermé et précompact dans $E_{B'}$, il y est compact, d'où la conclusion.

Les notions d'ensemble très compact et de suite très convergente permettent de formuler des propriétés de localisation pour des opérateurs sans que ces opérateurs soient nécessairement continus.

PROPOSITION 10. — *Soient* E *quelconque et* F *muni d'un réseau de type* $\mathscr{C}$.

Si T *est linéaire et à graphe sq-fermé de* E *dans* F,

— *l'image par* T *de tout borné absolument convexe et sq-complet de* E *est bornée dans* F,

— *l'image par* T *de toute suite très convergente de* E *est très convergente dans* F,

— *l'image par* T *de tout ensemble très compact de* E *est très compacte dans* F.

Si B est absolument convexe, borné et *sq*-complet, l'espace E_B est de Banach. La restriction de T à E_B est un opérateur à graphe *sq*-fermé de E_B dans F, donc elle est continue. De là, TB est borné.

Si f_n est une suite très convergente dans E, il existe un espace de Fréchet E_0, un opérateur linéaire continu T_0 de E_0 dans E et une suite convergente g_n de E_0 tels que $f_n = T_0 g_n$.

L'opérateur TT_0 est à graphe *sq*-fermé de E_0 dans F, donc il est continu. Dès lors $Tf_n = TT_0 g_n$ est une suite très convergente de F.

Raisonnement analogue pour les ensembles très compacts.

VARIANTES. — 1. *Même énoncé si* F *admet un réseau de type* $\mathscr{E}$ *ou* $\mathscr{S}\mathscr{E}$.

2. *Même énoncé si* F *admet un réseau de type* $\mathscr{K}$ *ou* $\mathscr{S}\mathscr{K}$ *et si* $\mathscr{G}(\mathrm{T})$ *est fermé.*

5. Théorème de relèvement

Avant d'aborder le théorème de relèvement, démontrons un

LEMME. — *Soit* E *un espace linéaire à semi-normes. Si la suite* f_n *tend vers* 0 *dans* E *et si les séries considérées dans sa définition convergent,*

a) *l'ensemble*

$$\mathrm{K} = \{ \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k : \sum_{k=1}^{\infty} | c_k | \leqslant 1 \}$$

est compact et extractable dans E.

b) *toute partie fermée ou sq-fermée de* K *est encore compacte et extractable dans* E.

Considérons l'application τ définie par

$$\tau\vec{c} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$$

de

$$\mathrm{B} = \{\vec{c} : \sum_{k=1}^{\infty} | c_k | \leqslant 1\}$$

dans E.

L'application τ est continue si on munit B de la topologie induite par l_1^{loc}.

En effet, quels que soient $\vec{c} \in \mathrm{B}$, p et $\varepsilon > 0$ donnés,

$$\begin{aligned} p(\tau\vec{c} - \tau\vec{c}') &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} | c_k - c_k' | \, p(f_k) \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} | c_k - c_k' | \sup_k p(f_k) + \sum_{k=\mathrm{N}+1}^{\infty} | c_k - c_k' | \sup_{k > \mathrm{N}} p(f_k). \end{aligned}$$

Or, si $\vec{c}' \in \mathrm{B}$, on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} | c_k - c_k' | \leqslant 2$$

et, si N est assez grand, comme $f_k \rightarrow 0$ dans E,

$$\sup_{k > \mathrm{N}} p(f_k) \leqslant \varepsilon/4.$$

Il vient donc, pour cet N fixé,

$$\vec{c}' \in \mathrm{B}, \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} | c_k - c_k' | \leqslant \varepsilon/[2 \sup_k p(f_k)] \Rightarrow p(\tau\vec{c}' - \tau\vec{c}) \leqslant \varepsilon.$$

De plus, B est compact et extractable dans l_1^{loc}.

Donc TB est compact et extractable dans E, ce qui démontre a).

Soit $F \subset K$ fermé ou *sq*-fermé dans E.

Son image inverse par τ, $\tau_{-1}F$, est aussi fermée ou *sq*-fermée dans B. Or, comme l_1^{loc} est un espace à semi-normes dénombrables, les deux notions y sont équivalentes. Donc $\tau_{-1}F$ est compact et extractable dans l_1^{loc} et, comme il appartient à B, son image par τ est compacte et extractable dans E, d'où b).

Théorème de relèvement. — *Soit* T *un opérateur linéaire défini d'une partie de* E *sur* F.

Si E *admet un réseau strict et si* T *est à graphe sq-fermé,*

a) *pour toute suite très convergente* g_n *de* F, *il existe une suite très convergente* f_n *de* E *telle que*

$$Tf_n = g_n,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

b) *pour tout ensemble* K *très compact dans* F, *il existe un ensemble* $\mathscr{K}$ *très compact dans* E *tel que*

$$T\mathscr{K} = K.$$

a) On peut sans restriction supposer que g_n soit très convergent vers 0.

En effet, si g_n est très convergent vers g, $g_n - g$ est très convergent vers 0. Alors, si f_n est très convergent vers 0 et tel que $Tf_n = g_n - g$ et si f est tel que $Tf = g$, $f_n + f$ est très convergent vers f et $T(f_n + f) = g_n$.

Soit donc g_n une suite très convergente vers 0 dans F.

Il existe F_0 de Fréchet, h_n tendant vers 0 dans F_0 et T_0 linéaire et continu de F_0 dans F tels que $T_0 h_n = g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La relation définie de F_0 dans E par

$$hRf \Leftrightarrow T_0 h = Tf$$

est linéaire et à graphe *sq*-fermé :

$$\left.\begin{array}{l} h_n \to h \\ f_n \to f \\ h_n R f_n \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} Tf_n = T_0 h_n \to T_0 h \\ f_n \to f \end{array}\right\} \Rightarrow T_0 h = Tf \Rightarrow hRf.$$

De plus, $R^{-1}(E) = F_0$.

De là, si

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\dots,n_k} : k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

est un réseau strict de E, vu le théorème 2, p. 50, il existe une suite de semi-boules b_k de F_0 et une suite d'indices $n_k \in \mathbb{N}$ tels que

$$b_k \subset R^{-1}(e_{n_1,\dots,n_k}),\ \forall k \in \mathbb{N},$$

soit

$$T_0 b_k \subset Te_{n_1,\dots,n_k},\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

On peut même, quitte à changer le rayon des semi-boules, supposer que

$$T_0 b_k \subset \lambda_k Te_{n_1,\dots,n_k},\ \forall k \in \mathbb{N},$$

où λ_k est la suite de nombres associés aux n_k dans la définition du réseau strict.

Déterminons $\nu_k \in \mathbb{N}$ croissants avec k et tels que $h_n \in b_k$ si $\nu_k \leqslant n < \nu_{k+1}$. Pour tout n, choisissons alors f_n tel que $\mathrm{T} f_n = \mathrm{T}_0 h_n$ et que $f_n \in \lambda_k e_{n_1,\dots,n_k}$ si $\nu_k \leqslant n < \nu_{k+1}$.

La suite f_n ainsi déterminée tend vers 0 dans E.

De fait, pour toute semi-boule b de centre 0 dans E,

$$\lambda_k e_{n_1,\dots,n_k} \subset b$$

dès que k est assez grand (cf. prop. 4, chap. I, p. 17).

On montrera en c) ci-dessous qu'on peut même la supposer très convergente.

b) Soit à présent K très compact dans F.

Vu la proposition 7, p. 56, il existe une suite g_n très convergente vers 0 dans F, telle que

$$\mathrm{K} \subset \overline{\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} g_n \rangle} = \{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n : \sum_{n=1}^{\infty} | c_n | \leqslant 1 \}.$$

Pour cette suite g_n, adoptons les notations de a).

Les f_n associés aux g_n sont tels que les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$$

convergent dans E si

$$\sum_{n=1}^{\infty} | c_n | \leqslant 1.$$

En effet, si $\nu_k \leqslant \mathrm{N} < \nu_{k+1}$, on a

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} c_n f_n = (\sum_{n=1}^{\nu_1 - 1} + \sum_{n=\nu_1}^{\nu_2 - 1} + \dots + \sum_{n=\nu_{k-1}}^{\nu_k - 1} + \sum_{n=\nu_k}^{\mathrm{N}}) c_n f_n.$$

Or, d'une part, la série de terme général

$$\sum_{n=\nu_k}^{\nu_{k+1}-1} c_n f_n$$

converge dans E, puisque

$$\sum_{n=\nu_k}^{\nu_{k+1}-1} c_n f_n \in (\sum_{n=1}^{\infty} | c_n |) \lambda_k e_{n_1,\dots,n_k}, \forall k \in \mathbb{N},$$

et, d'autre part,

$$\sum_{n=\nu_k}^{\mathrm{N}} c_n f_n \in \lambda_k e_{n_1,\dots,n_k}$$

où le second membre est contenu dans une semi-boule arbitraire de centre 0 dès que k est assez grand.

Cela étant, vu le lemme précédent, l'ensemble

$$K' = \{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n : \sum_{n=1}^{\infty} | c_n | \leqslant 1 \}$$

est compact et extractable dans E.

On a

$$TK' \supset K. \ (*)$$

En effet, si $g \in K$, pour un choix convenable de c_n, comme $\mathscr{G}(T)$ est sq-fermé, on a

$$\left. \begin{array}{l} g = \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} c_n T f_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} c_n f_n \end{array} \right\} \Rightarrow g = T \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n \right) \in TK'.$$

De (*), on déduit que

$$K = T(K' \cap T_{-1}K).$$

L'ensemble $T_{-1}K$ est fermé pour les suites : si $f'_m \in T_{-1}K$ fend vers f, on peut extraire des Tf'_m une sous-suite qui converge vers $g \in K$. Alors

$$\left. \begin{array}{l} f'_{m_k} \to f \\ Tf'_{m_k} \to g \end{array} \right\} \Rightarrow Tf = g \in K.$$

De là, vu le lemme, $K' \cap T_{-1}K$ est compact dans E.

c) Montrons enfin qu'on peut supposer la suite f_n très convergente et le compact $\mathscr{K}$ très compact.

Si g_n est une suite très convergente vers 0 dans F, il existe $\lambda_n \to \infty$ tels que la suite $\lambda_n g_n$ soit encore très convergente vers 0.

Compte tenu de ce qu'on a démontré en a) et b), il existe $f_n \in E$ tels que $Tf_n = \lambda_n g_n$, que f_n tende vers 0 dans E et que

$$K' = \{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n : \sum_{n=1}^{\infty} | c_n | \leqslant 1 \}$$

soit compact dans E.

L'espace $E_{K'}$ est de Banach et $(1/\lambda_n)f_n$ tend vers 0 dans $E_{K'}$, puisque

$$\| f_n \|_{E_{K'}} \leqslant 1, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donc la suite $(1/\lambda_n)f_n$ est très convergente et telle que

$$T[(1/\lambda_n)f_n] = g_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si K est très compact dans F, il appartient à l'enveloppe absolument convexe fermée d'une suite g_n très convergente vers 0 dans F.

Avec les notations précédentes, K est l'image par T de

$$\mathscr{K} = \{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n} f_n : \sum_{n=1}^{\infty} | c_n | \leqslant 1 \} \cap \mathrm{T}_{-1}\mathrm{K}.$$

Cet ensemble est *sq*-fermé dans E, donc dans $\mathrm{E}_{\mathrm{K}'}$. De plus, il est contenu dans

$$\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n} f_n : \sum_{n=1}^{\infty} | c_n | \leqslant 1 \},$$

compact de $\mathrm{E}_{\mathrm{K}'}$. Donc il est compact dans $\mathrm{E}_{\mathrm{K}'}$ et très compact dans E.