CHAPITRE IV

RÉSEAUX DANS LES ESPACES D'OPÉRATEURS

Les propriétés de localisation du chapitre précédent permettent d'apporter d'importants compléments aux propriétés de permanence des espaces à réseaux.

On démontre ici l'existence de réseaux dans divers espaces d'opérateurs et dans des produits tensoriels de type ε.

1. Espaces d'opérateurs

Théorème 1. — *Si* E *est de Banach ou limite inductive d'une suite d'espaces de Banach et* F *à réseau strict,* $\mathscr{L}_b(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *admet un réseau strict.*

a) Supposons d'abord E de Banach.

Soit B la boule unité de E et soit

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

un réseau strict dans F.

Si T est continu de E dans F, en vertu du théorème 3, chap. III, p. 53, il existe m_1 et $n_1 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\mathrm{TB} \subset m_1 e_{n_1}.$$

De plus, si

$$\mathrm{TB} \subset m_k e_{n_1,\ldots,n_k},$$

il existe m_{k+1} et $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ tels que

$$\mathrm{TB} \subset m_{k+1} e_{n_1,\ldots,n_{k+1}}.$$

En appliquant la proposition 3, chap. I, p. 16, on voit qu'on peut supposer que m_1, m_k, m_{k+1} sont égaux à 1, quitte à modifier le réseau.

Posons

$$\mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_k} = \{\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F}) : \mathrm{TB} \subset e_{n_1,\ldots,n_k}\},$$

quels que soient $k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$.

Les $\mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_k}$ constituent un réseau $\mathscr{R}'$ de $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, puisque tout $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ appartient à un $\mathscr{E}_{n_1}$ et que, s'il appartient à $\mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_k}$, il appartient à un $\mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_{k+1}}$.

Le réseau $\mathscr{R}'$ est de type $\mathscr{C}$.

Soit n_k une suite fixée et soient λ_k les constantes associées aux n_k dans $\mathscr{R}$. Posons $\lambda'_k = 2^{-k}\lambda_k$.

Démontrons que, si

$$\mathrm{T}_k \in \mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_k} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \mu_k \leqslant \lambda'_k,$$

la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \mathrm{T}_k \quad (*)$$

converge dans $\mathscr{L}_b(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

La suite $\lambda_k \mathrm{T}_k$ est équicontinue. De fait, si $\{q\}$ désigne le système de semi-normes de F, pour tout $q \in \{q\}$,

$$\lambda_k \mathrm{T}_k \mathrm{B} \subset \lambda_k e_{n_1, \ldots, n_k} \subset b_q(1)$$

dès que k est assez grand, soit $k > k_0$. Cela résulte de la proposition 4, chap. I, p. 17. Or l'ensemble fini $\{\lambda_1 \mathrm{T}_1, \ldots, \lambda_{k_0} \mathrm{T}_{k_0}\}$ est équicontinu, donc il existe C tel que

$$q(\lambda_k \mathrm{T}_k f) \leqslant \mathrm{C} \, \| f \|, \ \forall f \in \mathrm{E}, \ \forall k \leqslant k_0,$$

et, au total,

$$q(\lambda_k \mathrm{T}_k f) \leqslant \sup(1, \mathrm{C}) \, \| f \|, \ \forall f \in \mathrm{E}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Cela étant, la série (*) est de Cauchy dans $\mathscr{L}_b(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et y est équicontinue, car elle s'écrit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu'_k \lambda_k \mathrm{T}_k,$$

où la suite $\lambda_k \mathrm{T}_k$ est équicontinue et où la série des μ'_k converge, puisque $0 \leqslant \mu'_k \leqslant 2^{-k}$.

La série (*) converge dans $\mathscr{L}_s(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

On voit alors sans peine qu'elle converge dans $\mathscr{L}_b(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ vers la même limite, ou bien on applique le corollaire 4, chap. I, p. 23, le réseau $\mathscr{R}'$ étant de type $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{L}_s(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

Soit f fixé dans E, tel que $\| f \| \leqslant \mathrm{C}$.

La série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \mathrm{T}_k f$$

converge dans F, puisque $\mathrm{T}_k f \in \mathrm{C} \, e_{n_1, \ldots, n_k}$ et $0 \leqslant \mu_k \leqslant \lambda_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Appelons $\mathrm{T}f$ sa limite. On définit ainsi un opérateur de E dans F. Il est immédiat que T est linéaire et il est continu puisque la série (*) est équicontinue. D'où la conclusion.

Il reste enfin à vérifier que $\mathscr{R}'$ est strict.

Or, si $\| f \| \leqslant 1$, on a

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \mu_k \mathrm{T}_k f \in e_{n_1, \ldots, n_{k_0}},$$

d'où

$$\Big(\sum_{k=k_0}^{\infty} \mu_k \mathrm{T}_k\Big) \mathrm{B} \subset e_{n_1, \ldots, n_{k_0}}$$

et

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \mu_k T_k \in \mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_{k_0}},$$

quel que soit $k_0 \in \mathbb{N}$.

b) Soit à présent E limite inductive d'une suite d'espaces de Banach E_i. L'espace $\mathscr{L}_s(E, F)$ peut être assimilé au sous-espace de

$$\prod_{i=1}^{\infty} \mathscr{L}_s(E_i, F),$$

formé des

$$(T_1, T_2, \ldots)$$

tels que

$$T_i f = T_{i+1} f, \ \forall f \in E_i, \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

C'est visiblement un sous-espace fermé du produit et le système de semi-normes de $\mathscr{L}_s(E, F)$ est équivalent au système de semi-normes induit dans le sous-espace par le produit. En vertu de a) et des propriétés de permanence (prop. 1, a) et 2, c), chap. III, p. 51 et 53), $\mathscr{L}_s(E, F)$ admet un réseau strict. On passe alors à $\mathscr{L}_b(E, F)$ en appliquant le troisième corollaire de la proposition 1, chap. III, p. 52.

Variante de b). — Voici une autre démonstration, plus technique, qui consiste à exhiber directement le réseau de $\mathscr{L}_b(E, F)$.

Soit B_i la boule unité de chaque E_i et soit $\mathscr{R}$ le réseau strict de F considéré en a).

Posons

$$\mathscr{E}^{(i)}_{n_1,\ldots,n_k} = \{T \in \mathscr{L}(E, F) : TB_i \subset e_{n_1,\ldots,n_k}\}.$$

Les ensembles

$$\mathscr{E}_{n_1} = \mathscr{E}^{(1)}_{n_1},$$

$$\mathscr{E}_{n_1,(n_2,n_1')} = \mathscr{E}^{(1)}_{n_1,n_2} \cap \mathscr{E}^{(2)}_{n_1'},$$

$$\mathscr{E}_{n_1,(n_2,n_1'),(n_3,n_2',n_1'')} = \mathscr{E}^{(1)}_{n_1,n_2,n_3} \cap \mathscr{E}^{(2)}_{n_1',n_2'} \cap \mathscr{E}^{(3)}_{n_1''},$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

où les indices groupés entre parenthèses sont renumérotés par un seul indice parcourant $\mathbb{N}$, constituent un réseau $\mathscr{R}'$ de E.

Fixons une suite $n_1, (n_2, n_1'), (n_3, n_2', n_1''), \ldots$. Soient $\lambda_k, \lambda_k', \lambda_k'', \ldots$ les suites associées respectivement aux $n_k, n_k', n_k'', \ldots$ dans la définition de $\mathscr{R}$.

Posons

$$\nu_1 = \lambda_1, \nu_2 = \inf(\lambda_2, \lambda_1'), \nu_3 = \inf(\lambda_3, \lambda_2', \lambda_1''), \ldots .$$

Si

$$T_1 \in \mathscr{E}_{n_1}, T_2 \in \mathscr{E}_{n_1,(n_2,n_1')}, T_3 \in \mathscr{E}_{n_1,(n_2,n_1'),(n_3,n_2',n_1'')}, \ldots,$$

la suite $\nu_k T_k$ est équicontinue.

En effet, on a vu en a) qu'elle est équicontinue de chaque E_i dans F.

Alors, en procédant comme en a), on voit, si $0 \leqslant \mu_k \leqslant 2^{-k}\lambda_k$, la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k T_k$$

est de Cauchy dans $\mathscr{L}_b(E, F)$ et converge dans $\mathscr{L}_s(E, F)$, donc converge dans $\mathscr{L}_b(E,F)$, ce qui établit que $\mathscr{R}'$ est un réseau de type $\mathscr{C}$.

On prouve comme en a) qu'il est strict.

THÉORÈME 2. — *Si les conditions suivantes sont vérifiées,* $\mathscr{L}_b(E, F)$ *admet un réseau de type* $\mathscr{C}$:

(a) E *est de Fréchet ou limite inductive d'une suite d'espaces de Fréchet,*

(b) F *est sq-complet et à réseau de type* $\mathscr{C}$, *ou* F *est limite inductive d'une suite d'espaces* F_j *sq-complets et à réseau strict.*

En outre, *si le réseau de* F (resp. *des* F_j) *peut être supposé formé d'ensembles absolument convexes et sq-fermés,* $\mathscr{L}_b(E, F)$ *est à réseau strict.*

a) Supposons d'abord E de Fréchet et F *sq*-complet et à réseau de type $\mathscr{C}$.

Désignons par p_i, $i \in \mathbb{N}$, les semi-normes dénombrables de E et par b_i les semi-boules $b_{p_i}(1/i)$.

Soit d'autre part

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

le réseau de type $\mathscr{C}$ de F.

Si T est continu de E dans F, en vertu du théorème 1, chap. III, p. 48,

— il existe n_1 tel que $T_{-1}e_{n_1}$ ne soit pas maigre et i_1 tel que

$$Tb_{i_1} \subset \overline{\langle e_{n_1} \rangle},$$

— si $T_{-1}e_{n_1,\ldots,n_k}$ n'est pas maigre, il existe n_{k+1} tel que $T_{-1}e_{n_1,\ldots,n_{k+1}}$ ne soit pas maigre et i_{k+1} tel que

$$Tb_{i_{k+1}} \subset \overline{\langle e_{n_1,\ldots,n_{k+1}} \rangle}.$$

Appelons $\mathscr{E}_{(i_1,n_1),\ldots,(i_k,n_k)}$ l'ensemble des $T \in \mathscr{L}(E, F)$ tels que $T_{-1}e_{n_1,\ldots,n_k}$ ne soit pas maigre et que

$$Tb_{i_1} \subset \overline{\langle e_{n_1} \rangle}, \ldots, Tb_{i_k} \subset \overline{\langle e_{n_1,\ldots,n_k} \rangle}$$

et renumérotons les couples d'indices entre parenthèses par un seul indice parcourant $\mathbb{N}$.

En vertu de la remarque précédente, ces ensembles forment un réseau $\mathscr{R}'$ de $\mathscr{L}_b(E, F)$.

Démontrons que $\mathscr{R}'$ est de type $\mathscr{C}$.

Fixons une suite (i_k, n_k), $k \in \mathbb{N}$. Associons aux n_k la suite λ_k qui leur correspond dans $\mathscr{R}$. On peut sans restriction supposer les λ_k décroissants.

Si

$$T_k \in \mathscr{E}_{(i_1,n_1),\ldots,(i_k,n_k)}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $\lambda_k T_k$ est équicontinue. De fait, quel que soit q, vu la proposition 4, chap. I, p. 17, on a

$$\lambda_k e_{n_1, \ldots, n_k} \subset b_q(1)$$

dès que k est assez grand, soit $k \geqslant k_0$. Il vient alors

$$\lambda_k T_k b_{i_{k_0}} \subset \lambda_{k_0} \overline{\langle e_{n_1, \ldots, n_{k_0}} \rangle} \subset b_q(1), \ \forall k > k_0,$$

si on prend b_q fermé, soit

$$q(\lambda_k T_k f) \leqslant i_{k_0} p_{i_{k_0}}(f), \ \forall f \in E, \ \forall k > k_0.$$

D'autre part, $\lambda_1 T_1, \ldots, \lambda_{k_0} T_{k_0}$ sont équicontinus et il existe $i_0 \geqslant i_{k_0}$ tel que

$$q(\lambda_k T_k f) \leqslant i_0 p_{i_0}(f), \ \forall f \in E,$$

pour tout $k \leqslant k_0$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Or, comme E est de Fréchet, si F est *sq*-complet, $\mathscr{L}_b(E, F)$ est *sq*-complet. Il résulte donc de la proposition 1, chap. 1, p. 15, que $\mathscr{R}'$ est de type $\mathscr{C}$.

Si les $e_{n_1, \ldots, n_k}$ sont absolument convexes et *sq*-fermés pour les suites, on peut remplacer $\overline{\langle e_{n_1, \ldots, n_k} \rangle}$ par $e_{n_1, \ldots, n_k}$ dans ce qui précède et on voit immédiatement que les ensembles

$$\mathscr{E}_{(i_1, n_1), \ldots, (i_k, n_k)}$$

sont absolument convexes et *sq*-fermés dans $\mathscr{L}_b(E, F)$, d'où $\mathscr{R}'$ est strict.

b) Soient E de Fréchet et F limite inductive d'une suite d'espaces F_j, à réseau strict et *sq*-complets.

On ne sait pas si F est *sq*-complet, donc ce n'est pas un cas particulier de a).

Si

$$\{e^{(j)}_{n_1, \ldots, n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

est un réseau strict dans chaque F_j, les ensembles

$$e_{n_1} = F_{n_1}, \ n_1 \in \mathbb{N},$$

$$e_{n_1, \ldots, n_k} = e^{(n_1)}_{n_2, \ldots, n_k}, \ k > 1, \ n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N},$$

forment un réseau strict dans F.

On construit encore les ensembles

$$\mathscr{E}_{(i_1, n_1), \ldots, (i_k, n_k)}$$

considérés ci-dessus en substituant aux $\overline{\langle e_{n_1, \ldots, n_k} \rangle}$ les $e_{n_1, \ldots, n_k}$ eux-mêmes et on reproduit la démonstration de a).

Si T_k et λ_k sont déterminés comme ci-dessus, on voit que les $\lambda_k T_k$ sont des opérateurs linéaires de E dans F_{n_1} et que la suite $\lambda_k T_k$ est équicontinue de E dans cet F_{n_1}. Or $\mathscr{L}_b(E, F_{n_1})$ est *sq*-complet, donc les séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \lambda_k T_k,$$

où $\mu_k \in [0, 2^{-k}]$, convergent dans $\mathscr{L}_b(E, F_{n_1})$ et a fortiori dans $\mathscr{L}_b(E, F)$.

c) Supposons enfin E limite inductive d'une suite d'espaces de Fréchet E_i, F vérifiant l'une ou l'autre forme de (b).

En vertu du corollaire 4 du théorème 1, chap. I, p. 23, il suffit de démontrer que $\mathscr{L}_s(E, F)$ admet un réseau de type $\mathscr{C}$. Or $\mathscr{L}_s(E, F)$ peut être assimilé au sous-espace de

$$\prod_{i=1}^{\infty} \mathscr{L}_s(E_i, F)$$

formé des éléments

$$(T_1, T_2, \ldots)$$

tels que

$$T_i f = T_{i+1} f, \ \forall f \in E_i, \ \forall i \in \mathbb{N},$$

et son système de semi-normes est celui que le produit y induit. Or il est visiblement fermé dans le produit, d'où la conclusion en appliquant a) ou b) et les théorèmes 1, a) et 4, chap. I, p. 23 et 26.

Théorème 3. — *Si* E *est à semi-normes dénombrables* [*et séparable*] *et si* F *admet un réseau strict* (resp. *si* F *est sq-complet et admet un réseau de type* $\mathscr{C}$), *l'espace* $\mathscr{L}_b(E_c^*, F)$ *admet un réseau strict* (resp. *un réseau de type* $\mathscr{C}$).

C'est encore vrai si E *est limite inductive stricte d'une suite d'espaces à semi-normes dénombrables* [*et séparables*], *si en outre* F *est muni d'un système de semi-normes* $\{q\}$ *tel qu'à toute suite* $q_n \in \{q\}$, *il corresponde* $q \in \{q\}$ *et* $C_n > 0$ *tels que*

$$q_n(g) \leqslant C_n \, q(g), \ \forall g \in F, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

On discute dans la proposition 1, p. 74, l'hypothèse supplémentaire sur F.

a) Soit E muni d'un système dénombrable de semi-normes $\{p_m : m \in \mathbb{N}\}$. Posons $b_m = b_{p_m}(1/m)$. Soit d'autre part

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1, \ldots, n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

un réseau de F.

Désignons par b_m^{Δ} le polaire de b_m et par $E_{p_m}^*$ l'enveloppe linéaire de b_m^{Δ}, munie de la norme

$$\| \mathcal{C} \|_{p_m} = \sup_{p_m(f) \leqslant 1} | \mathcal{C}(f) |.$$

C'est un espace de Banach. De là, si T est continu de E_c^* dans F, sa restriction à $E_{p_m}^*$ est à graphe fermé dans $E_{p_m}^* \times F$, donc continue de $E_{p_m}^*$ dans F, d'où

— il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que la restriction de $T_{-1} e_{n_1}$ à $E_{p_m}^*$ ne soit pas maigre dans $E_{p_m}^*$ et $C_1 > 0$ tel que

$$T b_m^{\Delta} \subset C_1 \, \overline{\langle e_{n_1} \rangle},$$

— si $T_{-1} e_{n_1, \ldots, n_k}$, restreint à $E_{p_m}^*$, n'y est pas maigre, il existe $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ tel que ce soit encore vrai pour $T_{-1} e_{n_1, \ldots, n_{k+1}}$ et $C_{k+1} > 0$ tel que

$$T b_m^{\Delta} \subset C_{k+1} \, \overline{\langle e_{n_1, \ldots, n_{k+1}} \rangle}.$$

On peut même, quitte à changer $\mathscr{R}$ (cf. prop. 3, chap. I, p. 16), supposer que les constantes C_k sont toutes égales à 1.

Appelons $\mathscr{E}^{(m)}_{n_1,\ldots,n_k}$ l'ensemble des $T \in \mathscr{L}(E^*_c, F)$ tels que la restriction de $T_{-1}e_{n_1,\ldots,n_k}$ à $E^*_{p_m}$ ne soit pas maigre dans cet espace et que

$$Tb^\Delta_m \subset \overline{\langle e_{n_1,\ldots,n_k}\rangle}.$$

Compte tenu de ce qui précède, les ensembles

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_{n_1} &= \mathscr{E}^{(1)}_{n'_1}, \\ \mathscr{E}_{n_1,(n_2,n'_1)} &= \mathscr{E}^{(1)}_{n_1,n_2} \cap \mathscr{E}^{(2)}_{n'_1}, \\ \mathscr{E}_{n_1,(n_2,n'_1),(n_3,n'_2,n''_1)} &= \mathscr{E}^{(1)}_{n_1,n_2,n_3} \cap \mathscr{E}^{(2)}_{n'_1,n'_2} \cap \mathscr{E}^{(3)}_{n''_1}, \\ \ldots \quad \ldots \quad & \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \end{aligned}$$

constituent un réseau $\mathscr{R}'$ de $\mathscr{L}(E^*_c, F)$, si on y renumérote les indices (n_2, n'_1) (resp. (n_3, n'_2, n'_1), ...) par un seul indice parcourant $\mathbb{N}$.

Notons que si le réseau de F est strict, on peut remplacer les conditions « $T_{-1}e_{n_1,\ldots,n_k}$ non maigre dans $E^*_{p_m}$ et $Tb^\Delta_m \subset \overline{\langle e_{n_1,\ldots,n_k}\rangle}$ » par « $Tb^\Delta_m \subset e_{n_1,\ldots,n_k}$ ».

Démontrons que $\mathscr{R}'$ est de type $\mathscr{C}$.

Supposons d'abord $\mathscr{R}$ strict.

Soient n_1, (n_2, n'_1), (n_3, n'_2, n''_1), ... fixés et soient $\lambda_k, \lambda'_k, \lambda''_k$, ... les suites de nombres associés respectivement à n_k, n'_k, n''_k, ... dans $\mathscr{R}$. Posons

$$\nu_1 = \lambda_1, \nu_2 = \inf(\lambda_2, \lambda'_1), \nu_3 = \inf(\lambda_3, \lambda'_2, \lambda''_1), \ldots.$$

Pour tout $\mathcal{T} \in E^*$, il existe m tel que $\mathcal{T} \in b^\Delta_m$. Dès lors, si

$$T_1 \in \mathscr{E}_{n_1},\ T_2 \in \mathscr{E}_{n_1,(n_2,n'_1)}, \ldots$$

et si $0 \leqslant \mu_k \leqslant 2^{-k}\nu_k$, la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k T_k \mathcal{T} \quad (*)$$

converge dans F. Appelons $T\mathcal{T}$ sa limite. On définit ainsi un opérateur T linéaire de E^*_c dans F.

Vérifions que T est continu. Soit q une semi-norme de F. Pour que $q(T\mathcal{T})$ soit majoré par une semi-norme de E^*_c, il suffit, en vertu du théorème de Banach-Dieudonné, (cf. [17], p. 234), que, pour toute suite équicontinue $\mathcal{T}_i \in E^*$, tendant vers 0 dans E^*_c, $q(T\mathcal{T}_i)$ tende vers 0. Or, si $\mathcal{T}_i \in b^\Delta_{m_0}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et si les T_k sont tels que

$$T_k b^\Delta_{m_0} \subset e_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k},\ \forall k \in \mathbb{N},$$

il existe k_0 tel que

$$\nu_k e_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k} \subset b_q(1)$$

pour tout $k \geqslant k_0$ et, quel que soit $\varepsilon > 0$ fixé,

$$q\,\Big(\sum_{k=k_0}^{\infty} \mu_k T_k \mathcal{T}_i\Big) \leqslant \sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{-k} \leqslant \varepsilon/2$$

pour k_0 assez grand, quel que soit $\mathcal{T}_i$.

D'autre part, comme les T_k sont continus de E^*_c dans F,

$$q\,(\sum_{k=1}^{k_0-1} \mu_k T_k \mathcal{T}_i) \leqslant \varepsilon/2$$

et, de là, $q(T\mathcal{T}_i) \leqslant \varepsilon$, dès que i est assez grand.

Le réseau $\mathscr{R}'$ est donc de type $\mathscr{C}$ et il est immédiat qu'il est strict.

Supposons à présent $\mathscr{R}$ de type $\mathscr{C}$ et F sq-complet.

Adoptons les notations du cas précédent et montrons cette fois que la série (*) est de Cauchy dans F.

Si $\mathcal{T} \in b^\Delta_m$ et si

$$b^\Delta_m \subset \overline{\langle e_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k} \rangle}, \ \forall k \in \mathbb{N},$$

on a

$$\nu_k e_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k} \subset b_q(1)$$

pour k assez grand et, si on prend $b_q(1)$ fermé,

$$\nu_k T_k \mathcal{T} \in \nu_k \, \overline{\langle e_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k} \rangle} \subset b_q(1),$$

d'où

$$q\,(\sum_{k=r}^{s} \mu_k T_k \mathcal{T}) \leqslant \sum_{k=r}^{s} 2^{-k} \to 0$$

si $\inf(r, s) \to \infty$.

Comme F est sq-complet, la série (*) converge donc dans F.

On poursuit alors la démonstration comme dans le cas précédent.

b) Soit à présent E limite inductive stricte des E_n.

On démontre que

$$\mathscr{L}(E^*_c, F) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tau_n \mathscr{L}\,[(E_n)^*_c, F],$$

où les τ_n sont des opérateurs linéaires continus de $\mathscr{L}_b\,[(E_n)^*_c, F]$ dans $\mathscr{L}_b(E^*_c, F)$, quel que soit n.

On conclut alors en appliquant a).

Définissons les τ_n.

Soit $T \in \mathscr{L}\,[(E_n)^*_c, F]$. On appelle $\tau_n T$ l'opérateur qui, à tout $\mathcal{T} \in E^*$, associe l'image par T de sa restriction à E_n, qui est une fonctionnelle linéaire continue dans E_n. L'opérateur $\tau_n T$ est visiblement linéaire et continu et il est immédiat que τ_n est un opérateur linéaire de $\mathscr{L}_b\,[(E_n)^*_c, F]$ dans $\mathscr{L}_b(E, F)$. Montrons qu'il est continu. Tout borné $\mathscr{B}$ de E^*_c est équicontinu, donc l'ensemble $\mathscr{B}_n$ des restrictions à E_n des $\mathcal{T} \in \mathscr{B}$ est équicontinu dans $(E_n)^*$ et a fortiori borné dans $(E_n)^*_c$. De là, pour toute semi-norme q de F,

$$\sup_{\mathcal{T} \in \mathscr{B}} q(\tau_n T \mathcal{T}) = \sup_{\mathcal{T} \in \mathscr{B}_n} q(T\mathcal{T})$$

où le second membre est une semi-norme de $\mathscr{L}_b\,[(E_n)^*_c, F]$.

Il reste à voir que

$$\mathscr{L}(\mathrm{E}_c^*, \mathrm{F}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tau_n \mathscr{L}\,[(\mathrm{E}_n)_c^*, \mathrm{F}].$$

Soit T continu de E_c^* dans F.

Il existe n_0 tel que T s'annule dans le polaire $\mathrm{E}_{n_0}^{\Delta}$ de E_{n_0}.

En effet, si ce n'est pas le cas, il existe, pour tout n, $\mathcal{C}_n \in \mathrm{E}_n$, tel que $\mathrm{T}\mathcal{C}_n \neq 0$. Il existe alors une semi-norme q_n de F telle que $q_n(\mathrm{T}\mathcal{C}_n) \neq 0$. Si q est une semi-norme qui majore la suite q_n ainsi déterminée, on a encore $q(\mathrm{T}\mathcal{C}_n) \neq 0$ pour tout n et, quitte à multiplier les $\mathcal{C}_n$ par des constantes convenables, on peut supposer que $q(\mathrm{T}\mathcal{C}_n) = 1$ pour tout n.

La suite $\mathcal{C}_n$ est équicontinue dans E. En effet, elle est équicontinue dans chaque E_n, puisque seuls $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_{n-1}$ y diffèrent de 0. De plus, elle tend vers 0 dans E_s^* : pour tout f, $\mathcal{C}_n(f) = 0$ dès que E_n contient f. Donc elle tend vers 0 dans E_c^*, ce qui exige que $q(\mathrm{T}\mathcal{C}_n)$ tende vers 0. (*)

Définissons alors T_{n_0} de la façon suivante. Soit $\mathcal{C} \in \mathrm{E}_{n_0}^*$. Il existe une semi-norme p_{n_0} de E_{n_0} qui majore $\mathcal{C}$. Comme la limite inductive est stricte, il existe alors une semi-norme p de E qui majore $\mathcal{C}$ dans E_{n_0}. Donc, en vertu du théorème de Hahn-Banach, on peut prolonger $\mathcal{C}$ par une fonctionnelle $\mathcal{C}' \in \mathrm{E}^*$. On pose

$$\mathrm{T}_{n_0}\mathcal{C} = \mathrm{T}\mathcal{C}'.$$

La définition a un sens, car la valeur de $\mathrm{T}\mathcal{C}'$ ne dépend pas du choix de $\mathcal{C}'$: si $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ prolongent $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}' - \mathcal{C}'' \in \mathrm{E}_{n_0}^{\Delta}$ et $\mathrm{T}\mathcal{C}' = \mathrm{T}\mathcal{C}''$.

L'opérateur T_{n_0} ainsi défini est visiblement linéaire. Il est continu de $(\mathrm{E}_{n_0})_c^*$ dans F. En effet, soit q une semi-norme de F. En vertu du théorème de Banach-Dieudonné, pour que $q(\mathrm{T}_{n_0}\mathcal{C})$ soit majoré par une semi-norme de E_c^*, il suffit que $q(\mathrm{T}_{n_0}\mathcal{C}_i)$ tende vers 0 pour toute suite $\mathcal{C}_i$ équicontinue et convergeant vers 0 dans $(\mathrm{E}_{n_0})_s^*$.

Prolongeons les $\mathcal{C}_i$ par $\mathcal{C}_i'$, équicontinus dans E^*. Si

$$q(\mathrm{T}_{n_0}\mathcal{C}_i) = q(\mathrm{T}\mathcal{C}_i') \nrightarrow 0$$

quand $i \to \infty$, il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite $\mathcal{C}_{i_k}'$ tels que

$$q(\mathrm{T}\mathcal{C}_{i_k}') \geqslant \varepsilon,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Comme les $\mathcal{C}_{i_k}'$ sont équicontinus, on peut en extraire une sous-suite $\mathcal{C}_{i_{k'}}'$ convergente dans E_c^*. Soit $\mathcal{C}'$ sa limite. On a $\mathcal{C}' \in \mathrm{E}_{n_0}^{\Delta}$, car

$$\mathcal{C}'(f) = \lim \mathcal{C}_{i_{k'}}'(f) = \lim \mathcal{C}_{i_{k'}}(f) = 0,\ \forall f \in \mathrm{E}_{n_0}.$$

Or $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathrm{E}_c^*, \mathrm{F})$, d'où

$$q(\mathrm{T}\mathcal{C}_{i_{k'}}') \to q(\mathrm{T}\mathcal{C}') = 0,$$

ce qui est absurde.

On a donc bien $\mathrm{T} = \tau_{n_0}\mathrm{T}_{n_0}$, avec $\mathrm{T}_{n_0} \in \mathscr{L}\,[(\mathrm{E}_{n_0})_c^*, \mathrm{F}]$, d'où la conclusion.

Commentons brièvement l'hypothèse sur F : *à toute suite* $q_n \in \{q\}$, *il correspond* $q \in \{q\}$ *et* $\mathrm{C}_n > 0$ *tels que*

$$q_n(g) \leqslant \mathrm{C}_n\, q(g),\ \forall g \in \mathrm{F},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

(*) Cette partie de la démonstration s'inspire d'un lemme de Grothendieck ([18], lemme 5, p. 85).

Proposition 1. — *Elle est vérifiée*

a) *si* F *est normé,*

b) *si* F *est de type* ($\mathscr{DF}$) *et, en particulier, si* $F = E_b^*$, *où* E *est à semi-normes dénombrables,*

c) *si* $F = E_c^*$, *où* E *est à semi-normes dénombrables ou si* $F = E_\tau^*$, *où* E *est de Fréchet,*

d) *si* F *est limite inductive d'une suite d'espaces qui la vérifient.*

a) C'est trivial.

b) C'est le lemme 2, p. 64, [18], de Grothendieck.

c) Si les K_i sont compacts dans E et si p_i, $i \in \mathbb{N}$, sont les semi-normes dénombrables de E, fixons $\lambda_i > 0$ tels que

$$\lambda_i K_i \subset b_{p_i}(1/i), \; \forall i \in \mathbb{N}.$$

On voit facilement que

$$K = 0 \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i)$$

est compact dans E.

On a alors

$$\sup_{f \in K_i} | \mathcal{C}(f) | \leqslant \frac{1}{\lambda_i} \sup_{f \in K} | \mathcal{C}(f) |, \; \forall i \in \mathbb{N}.$$

Si les K_i sont faiblement compacts, K est faiblement compact. Si, en outre, E est de Fréchet, $\overline{\langle K \rangle}$ est faiblement compact avec K, ce qui règle le deuxième cas.

d) Soit E limite inductive des E_n et soit β_i une suite de semi-boules ouvertes de centre 0 dans E :

$$\beta_i = \langle \bigcup_{n=1}^{\infty} b_i^{(n)} \rangle,$$

où les $b_i^{(n)}$ sont des semi-boules ouvertes de centre 0 dans E_n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une semi-boule $b^{(n)}$ et des $\lambda_i^{(n)} > 0$ tels que

$$b_i^{(n)} \supset \lambda_i^{(n)} b^{(n)}, \; \forall i \in \mathbb{N}.$$

Posons

$$\nu_n = \inf_{i \leqslant n} \lambda_i^{(n)}$$

et soit

$$\beta = \langle \bigcup_{n=1}^{\infty} \nu_n b^{(n)} \rangle.$$

Quel que soit i, β_i absorbe β. De fait, d'une part,

$$b_i^{(n)} \supset \lambda_i^{(n)} b^{(n)} \supset \nu_n b^{(n)}, \; \forall n \geqslant i.$$

D'autre part, il existe $\lambda > 0$ tel que

$$b_i^{(n)} \supset \lambda \nu_n b^{(n)},$$

pour $n = 1, \ldots, i-1$. Donc

$$\beta_i = \langle \bigcup_{n=1}^{\infty} b_i^{(n)} \rangle \supset \inf(1, \lambda) \langle \bigcup_{n=1}^{\infty} \nu_n b^{(n)} \rangle = \inf(1, \lambda)\beta,$$

ce qui démontre la proposition.

Voici encore quelques remarques simples sur les espaces d'opérateurs qui permettent de compléter les résultats précédents.

Définition. — Désignons par F_β l'espace F muni des semi-normes

$$\sup_{\mathcal{Q} \in \mathcal{B}} | \mathcal{Q}(g) |, \quad (*)$$

où $\mathcal{B}$ parcourt l'ensemble des bornés de F_b^*.

On voit facilement que, [si F est séparable par semi-norme], c'est l'espace F_b^- introduit p. 22. De fait, si Θ est absolument convexe, fermé et bornivore, son polaire Θ^Δ est borné dans E_b^* et la semi-norme associée à Θ est l'expression

$$\sup_{\mathcal{T} \in \Theta^\Delta} | \mathcal{T}(f) |.$$

Inversement, (*) est visiblement une semi-norme de E_b^-.

Lemme 1. — *L'opérateur* J, *défini par*

$$JT = T^*,$$

est linéaire et continu

— *de* $\mathcal{L}_s(E, F)$ *dans* $\mathcal{L}_s(F_s^*, E_s^*)$,

— *de* $\mathcal{L}_b(E, F_\beta)$ *dans* $\mathcal{L}_b(F_b^*, E_b^*)$,

— *de* $\mathcal{L}_\tau(E, F)$ *dans* $\mathcal{L}_\Gamma(F_\tau^*, E_\tau^*)$, *si* Γ *est l'ensemble des parties équicontinues de* F^*.

On note d'abord que, si $T \in \mathcal{L}(E, F)$, T^* est continu

— de F_s^* dans E_s^*,

— de F_b^* dans E_b^*,

— de F_τ^* dans E_τ^*.

De plus, $\mathcal{L}(E, F_\beta) \subset \mathcal{L}(E, F)$.

De là, il est immédiat que J est un opérateur linéaire entre les espaces indiqués.

Il reste à s'assurer qu'il est continu.

Soient $\mathcal{Q}_1, \ldots, \mathcal{Q}_m \in F^*$. Il existe une semi-norme q de F et $C > 0$ tels que

$$| \mathcal{Q}_i(g) | \leqslant C\, q(g), \forall g \in F, \forall i \leqslant m.$$

De là, quels que soient $f_1, \ldots, f_n \in E$,

$$\sup_{j=1,\ldots,n} \sup_{i=1,\ldots,m} | (T^*\mathcal{Q}_i)(f_j) | = \sup_{j=1,\ldots,n} \sup_{i=1,\ldots,m} | \mathcal{Q}_i(Tf_j) |$$
$$\leqslant C \sup_{j=1,\ldots,n} q(Tf_j),$$

ce qui règle le premier cas.

Soient $\mathscr{B}$ un borné de F^*_b et B un borné de E. On a

$$\sup_{\mathscr{Q}\in\mathscr{B}} \sup_{f\in B} |(T^*\mathscr{Q})(f)| = \sup_{f\in B} \sup_{\mathscr{Q}\in\mathscr{B}} |\mathscr{Q}(Tf)|,$$

où le second membre est une semi-norme de $\mathscr{L}_b(E, F_\beta)$, d'où le second cas.

Le dernier cas est immédiat.

LEMME 2. — *Si* F *est sq-complet ou s'il est tonnelé, l'opérateur* J *est continu*

— *de* $\mathscr{L}_s(E, F_\beta)$ *dans* $\mathscr{L}_b(F^*_s, E^*_s)$

— *de* $\mathscr{L}_\tau(E, F_\beta)$ *dans* $\mathscr{L}_b(F^*_\tau, E^*_\tau)$.

Il suffit de noter que tout borné $\mathscr{B}$ de F^*_s ou de F^*_τ est alors borné dans F^*_b. Si F est tonnelé, c'est immédiat puisque $\mathscr{B}$ est équicontinu.

Si F est *sq*-complet, on note que

$$\{g \in F : \sup_{\mathscr{Q}\in\mathscr{B}} |\mathscr{Q}(g)| \leqslant 1\}$$

est un tonneau de F. Il absorbe donc les bornés de F et, de là, $\mathscr{B}$ est borné dans F^*_b.

LEMME 3. — *Si* E *est évaluable* [*et* F *à semi-normes représentables*], *on a*

$$\mathscr{L}(F^*_s, E^*_s) = \mathscr{L}(F^*_\tau, E^*_\tau) \quad et \quad \mathscr{L}(E, F) = \mathscr{L}(E, F_\beta)$$

et J *est défini de* $\mathscr{L}(E, F)$ *sur* $\mathscr{L}(F^*_s, E^*_s)$.

Si, en outre, $(F^*_b)^* = F$, *on a aussi*

$$\mathscr{L}(F^*_s, E^*_s) = \mathscr{L}(F^*_b, E^*_b)$$

et J *est défini de* $\mathscr{L}(E, F)$ *sur* $\mathscr{L}(F^*_b, E^*_b)$.

Démontrons d'abord que J est défini de $\mathscr{L}(E, F)$ sur $\mathscr{L}(F^*_s, E^*_s)$. Si $T' \in \mathscr{L}(F^*_s, E^*_s)$, pour tout $f \in E$, la loi qui, à $\mathscr{Q} \in F^*$, associe $(T'\mathscr{Q})(f)$ est une fonctionnelle linéaire continue dans F^*_s, donc elle a la forme $\mathscr{Q}(g_f)$ où g_f est déterminé univoquement dans F. Posons $Tf = g_f$. L'opérateur T est linéaire de E dans F et a pour adjoint $T^* = T'$. Comme E est évaluable et que $T' \in \mathscr{L}(F^*_s, E^*_s)$, T est continu de E dans F. Donc $T' = JT$, avec $T \in \mathscr{L}(E, F)$.

C'est un fait général que $\mathscr{L}(F^*_s, E^*_s) = \mathscr{L}(F^*_\tau, E^*_\tau)$: on a $\mathscr{L}(F^*_\tau, E^*_\tau) \supset \mathscr{L}[(F^*_\tau)_a, (E^*_\tau)_a] = \mathscr{L}(F^*_s, E^*_s)$. Réciproquement, si $T' \in \mathscr{L}(F^*_s, E^*_s)$, il s'écrit $T' = T^*$, avec $T \in \mathscr{L}(E_a, F_a)$. Comme l'image par T de tout compact absolument convexe de E_a est un compact absolument convexe de F_a, on a alors $T' \in \mathscr{L}(F^*_\tau, E^*_\tau)$.

Enfin, on a $\mathscr{L}(E, F) = \mathscr{L}(E, F_\beta)$. De fait, si $T \in \mathscr{L}(E, F)$ et si $\mathscr{B}$ est borné dans F^*_b, l'ensemble

$$\{f : \sup_{\mathscr{Q}\in\mathscr{B}} |\mathscr{Q}(Tf)| \leqslant 1\}$$

est absolument convexe, bornivore et fermé dans E, donc il est d'intérieur non vide et T est continu de E dans F_β.

Supposons à présent que $(F^*_b)^* = F$. Démontrons que J est défini de $\mathscr{L}(E, F_\beta)$ sur $\mathscr{L}(F^*_b, E^*_b)$. Soit $T' \in \mathscr{L}(F^*_b, E^*_b)$. La loi qui, à $\mathscr{Q} \in F$, associe $(T'\mathscr{Q})(f)$ est une fonctionnelle linéaire continue dans F^*_b, donc elle s'écrit $(T'\mathscr{Q})(f) = \mathscr{Q}(g_f)$, où g_f est univoquement déterminé. Posons $Tf = g_f$. Comme E est évaluable, T appartient à $\mathscr{L}(E, F) = \mathscr{L}(E, F_\beta)$, d'où la conclusion.

Ces lemmes permettent de déduire des théorèmes qu'on vient de voir les énoncés suivants.

Proposition 2. — *Soit* E *de Banach ou limite inductive d'une suite de tels espaces* [*et soit* F *à semi-normes représentables*].

a) *Si* F *est à réseau strict,* $\mathscr{L}_s(F_s^*, E_s^*)$ *et* $\mathscr{L}_\Gamma(F_\tau^*, E_\tau^*)$ *sont à réseau strict.*

b) *Si* F *est sq-complet et à réseau strict,* $\mathscr{L}_b(F_s^*, E_s^*)$ *et* $\mathscr{L}_b(F_\tau^*, E_\tau^*)$ *sont à réseau strict.*

c) *Si* F *est à réseau strict et si* $(F_b^*)^* = F$, $\mathscr{L}_b(F_b^*, E_b^*)$ *est à réseau strict.*

En appliquant les lemmes, comme E est évaluable, on voit que chacun des espaces considérés est image par l'opérateur continu J de $\mathscr{L}_b(E, F)$, qui est à réseau strict en vertu du théorème 1, p. 65.

Proposition 3. — *Supposons*

— E *de Fréchet ou limite inductive d'une suite d'espaces de Fréchet,*

— F *sq-complet et à réseau de type* $\mathscr{C}$ *ou tonnelé et limite inductive d'une suite d'espaces sq-complets et à réseau strict* [*et soit, en outre,* F *à semi-normes représentables*].

Alors $\mathscr{L}_b(F_s^*, E_s^*)$ *et* $\mathscr{L}_b(F_\tau^*, E_\tau^*)$ *admettent un réseau de type* $\mathscr{C}$.

Si, en outre, $(F_b^*)^* = F$, $\mathscr{L}_b(F_b^*, E_b^*)$ *admet un réseau de type* $\mathscr{C}$.

Enfin, si F *admet un réseau constitué d'ensembles absolument convexes et sq-fermés, les espaces d'opérateurs considérés sont à réseau strict.*

On part ici du théorème 2 et des lemmes précédents.

2. Produits tensoriels

Les produits tensoriels s'interprètent comme des espaces d'opérateurs linéaires. Ceci fournit une voie d'approche pour y déterminer l'existence des réseaux.

Rappelons d'abord comment $E \otimes_\varepsilon F$ peut être assimilé à un espace d'opérateurs.

Nous ne mentionnons que les résultats essentiels. On se référera par exemple à L. Schwartz [46], exposé n° 8, pour une étude détaillée de la question.

Proposition 4. — *Le produit tensoriel* $E \otimes_\varepsilon F$ *peut être interprété comme un sous-espace de* $\mathscr{L}_\Gamma(E_\tau^*, F)$, *muni du système de semi-normes induit par cet espace,* Γ *désignant l'ensemble des parties équicontinues de* E^*.

Proposition 5. — *L'espace* $\mathscr{L}_\Gamma(E_\tau^*, F)$ *est complet* (resp. *sq-complet*) *si* E *et* F *sont complets* (resp. *sq-complets*) [*et séparables par semi-norme*].

Supposons E et F *sq*-complets et soit T_m une suite de Cauchy dans $\mathscr{L}_\Gamma(E_\tau^*, F)$.

Pour tout $\mathcal{T} \in E^*$, la suite $T_m\mathcal{T}$ est de Cauchy dans F. Appelons $T\mathcal{T}$ sa limite.

L'opérateur T est visiblement linéaire de E_τ^* dans F.

Pour qu'il soit continu, il suffit qu'il soit continu de E_s^* dans F_a. En effet, son adjoint T^* est alors défini et continu de F_s^* dans E_a, donc il transforme les polaires des semi-boules de F, compacts absolument convexes de F_s^*, en compacts absolument convexes de E_a. Il suffit donc d'établir que la fonctionnelle linéaire dans E^*,

$$\mathbb{T}(\mathcal{T}) = \mathscr{Q}(T\mathcal{T}),\ \mathscr{Q} \in F^*,$$

est du type $\mathcal{T}(f)$, avec $f \in E$.

Pour tout m, $f_m = T_m^* \mathscr{Q}$ est tel que

$$\mathscr{Q}(T_m \mathcal{C}) = \mathcal{C}(f_m),\ \forall \mathcal{C} \in E^*.$$

La suite f_m est de Cauchy dans E, car, si $\mathscr{Q} \in C\, b_p^{\Delta}(1)$,

$$p(f_r - f_s) = \sup_{\mathcal{C} \in b_p^{\Delta}} | \mathscr{Q}\, [(T_r - T_s)(\mathcal{C})] | \leqslant C \sup_{\mathcal{C} \in b_p^{\Delta}} q\, [(T_r - T_s)(\mathcal{C})].$$

Soit f sa limite. On a

$$\mathscr{Q}(T\mathcal{C}) = \lim \mathscr{Q}(T_m \mathcal{C}) = \lim \mathcal{C}(f_m) = \mathcal{C}(f),\ \forall \mathcal{C} \in E^*.$$

d'où la conclusion.

Si E et F sont complets, on procède de façon analogue (cf. [46]).

Proposition 6. — [*Soient* E *et* F *séparables par semi-norme*].

L'espace $\mathscr{L}(E_{ca}^*, F)$ *est fermé dans* $\mathscr{L}_\Gamma(E_\tau^*, F)$.

De là, il est complet (resp. *sq-complet*) *si* E *et* F *sont complets* (resp. *sq-complets*).

Soit T appartenant à l'adhérence dans $\mathscr{L}_\Gamma(E_\tau^*, F)$ de $\mathscr{L}(E_{ca}^*, F)$.

Pour qu'il soit dans $\mathscr{L}(E_{ca}^*, F)$, il suffit que T^*, défini de F^* dans E, transforme les polaires des semi-boules de F en compacts de E.

Soient q une semi-norme donnée dans F et b_q^{Δ} le polaire de $b_q(1)$. Pour p et $\varepsilon > 0$ fixés, il existe $T_{\varepsilon,p} \in \mathscr{L}(E_{ca}^*, F)$ tel que

$$\sup_{\mathcal{C} \in b_p^{\Delta}} \sup_{\mathscr{Q} \in b_q^{\Delta}} | \mathscr{Q}\, [(T - T_{\varepsilon,p})\mathcal{C}] | = \sup_{\mathcal{C} \in b_p^{\Delta}} q\, [(T - T_{\varepsilon,p})(\mathcal{C})] \leqslant \varepsilon/2. \quad (*)$$

Pour ce $T_{\varepsilon,p}$, $T_{\varepsilon,p}^*$ est continu de F_{ca}^* dans E. En effet, $T_{\varepsilon,p}$ transforme tout b_p^{Δ}, compact absolument convexe de E_{ca}^*, en compact absolument convexe de F.

Soit

$$p(T_{\varepsilon,p}^* \mathscr{Q}) \leqslant C\, \pi(\mathscr{Q}),\ \forall \mathscr{Q} \in F^*,$$

où π est une semi-norme de F_{ca}^*. Il vient alors

$$\begin{aligned} p(T^* \mathscr{Q}) &\leqslant p\, [(T^* - T_{\varepsilon,p}^*)(\mathscr{Q})] + p(T_{\varepsilon,p}^* \mathscr{Q}) \\ &\leqslant \varepsilon/2 + C\, \pi(\mathscr{Q}) \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

si $\mathscr{Q} \in b_q^{\Delta}$ et $\pi(\mathscr{Q}) \leqslant \varepsilon/(2C)$.

De là, T^* est continu de b_q^{Δ} muni de la topologie induite par F_{ca}^* dans E et, comme b_q^{Δ} est compact dans F_{ca}^*, $T^* b_q^{\Delta}$ est compact dans E.

Proposition 7. — *Si* E *et* F *sont complets* [*et séparables par semi-norme*], *le produit tensoriel complété* $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ *peut être assimilé à un sous-espace linéaire fermé de* $\mathscr{L}_\Gamma(E_{ca}^*, F)$ *et de* $\mathscr{L}_\Gamma(E_\tau^*, F)$.

C'est immédiat puisque ces espaces sont complets.

Remarque. — Si on suppose seulement E et F *sq*-complets, on ne peut plus affirmer que $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ est contenu dans $\mathscr{L}_\Gamma(E_c^*, F)$ ou $\mathscr{L}_\Gamma(E_\tau^*, F)$.

Toutefois, les exemples usuels d'espaces qui admettent un sous-espace dense de type $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ vérifient cette propriété.

Ainsi, si E est *sq*-complet [et séparable par semi-norme], $C_k(\Omega\,; E)$, espace des fonctions k fois continûment dérivables de l'ouvert Ω dans E, est un sous-espace fermé pour les suites de $\mathscr{L}\,[E^*_{ca}, C_k(\Omega)]$.

La propriété analogue pour $D_k(K\,;\,E)$ et $S_k(E_n\,;\,E)$ est également vraie (cf. [12], p. 167 et 168).

A partir des propositions précédentes, on obtient facilement des exemples de produits tensoriels munis de réseaux de type $\mathscr{C}$ ou de réseaux stricts.

THÉORÈME 4. — [*Soient* E *et* F *séparables par semi-norme*].

a) *Si* E *est de Fréchet et si* F *est complet et admet un réseau de type* $\mathscr{C}$ (resp. *strict*), *le produit tensoriel* $E\hat{\otimes}_\varepsilon F$ *admet un réseau de type* $\mathscr{C}$ (resp. *strict*).

b) *C'est encore vrai si* E *est limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Fréchet et si* F *est complet, admet un réseau de type* $\mathscr{C}$ (resp. *strict*) *et est muni d'un système de semi-normes* $\{q\}$ *tel qu'à toute suite* $q_n \in \{q\}$ *correspondent* $q \in \{q\}$ *et* $C_n > 0$ *tels que*

$$q_n(g) \leqslant C_n\, q(g),\ \forall g \in F,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si E est de Fréchet ou limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Fréchet, l'enveloppe absolument convexe fermée d'un compact de E est compacte, donc $E^*_c \equiv E^*_{ca}$.

Or, vu le théorème 3, p. 70, $\mathscr{L}_b(E^*_c, F)$ admet un réseau de type $\mathscr{C}$ (resp. strict), donc c'est vrai aussi pour $\mathscr{L}_\Gamma(E^*_{ca}, F)$.

En outre, E et F sont complets, donc $E\hat{\otimes}_\varepsilon F$ est un sous-espace fermé de $\mathscr{L}(E^*_{ca}, F)$ et il admet par conséquent un réseau de type $\mathscr{C}$ (resp. strict).

THÉORÈME 5. — *Si* E *est de Fréchet* [*et séparable*] *ou limite inductive d'une suite de tels espaces et si* F *est complet et à réseau de type* $\mathscr{C}$, *les produits tensoriels* $E^*_{ca}\hat{\otimes}_\varepsilon F$ *et* $E^*_b\hat{\otimes}_\varepsilon F$ *admettent un réseau de type* $\mathscr{C}$.

Pour qu'ils admettent un réseau strict, il suffit

— *si* E *est de Banach ou limite inductive d'une suite d'espaces de Banach, que* F *admette un réseau strict.*

— *dans le cas général, que* F *admette un réseau formé d'ensembles absolument convexes et sq-fermés.*

Comme E est bornologique, E^*_{ca} est complet et, de plus, $(E^*_{ca})^*_{ca} \equiv E$. Puisque F est aussi complet, c'est encore le cas pour $\mathscr{L}_{ca}(E, F)$ et $E^*_{ca}\hat{\otimes}_\varepsilon F$ est un sous-espace fermé de $\mathscr{L}_{ca}(E, F)$.

Or, par le théorème 2, p. 68, $\mathscr{L}_{ca}(E, F)$ admet un réseau du type indiqué dans l'énoncé, donc aussi $E^*_{ca}\hat{\otimes}_\varepsilon F$.

D'autre part, comme F est complet et E bornologique, l'espace $\mathscr{L}_b(E, F)$ est complet. De là, $E^*_b\hat{\otimes}_\varepsilon F$ est un sous-espace linéaire fermé de $\mathscr{L}_b(E, F)$, d'où la conclusion, en procédant comme pour $E^*_{ca}\hat{\otimes}_\varepsilon F$.

REMARQUE. — Compte tenu de la remarque p. 78, on peut améliorer les résultats précédents en supposant seulement les espaces sq-complets plutôt que complets.

Nous ne connaissons pas d'énoncé général qui rende compte de ce fait. Toutefois, l'examen des cas particuliers conduit sans difficulté au résultat souhaité. Il est même souvent plus facile de déterminer d'emblée un réseau dans le produit tensoriel étudié que d'exploiter les mécanismes développés ci-dessus.

Traitons un exemple concret.

Proposition 10. — *Si* E *est sq-complet et admet un réseau de type* $\mathscr{C}$ (resp. *strict*), *l'espace* $C_p(\Omega\,;\,E)$ *admet un réseau de type* $\mathscr{C}$ (resp. *strict*).

Soit

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

un réseau de E. Supposons-le strict et soit, par exemple, p infini.

Désignons par K_n une suite de compacts d'intérieur non vide croissants vers Ω. Les semi-normes de $C_p(\Omega\,;\,E)$ sont alors les expressions

$$\sup_{x\in K_n} \sup_{|\alpha|\leqslant n} p\,[D^\alpha f(x)],\ n \in \mathbb{N},\ p \in \{p\},$$

où $\{p\}$ désigne l'ensemble des semi-normes de E et $|\alpha|$ l'ordre de la dérivée D^α.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $f(x) \in C_k(\Omega\,;\,E)$, l'enveloppe absolument convexe fermée $B_n(f)$ de

$$\{D^\alpha_x f(x) : x \in K_n,\ |\alpha| \leqslant n\}$$

est *sq*-complète dans E. Dès lors, par le corollaire 2, chap. III, p. 54,

— il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ et $C_1 > 0$ tels que

$$B_n(f) \subset C_1\, e_{n_1},$$

— si $B_n(f) \subset C_k\, e_{n_1,\ldots,n_k}$, il existe $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ et $C_{k+1} > 0$ tels que

$$B_n(f) \subset C_{k+1}\, e_{n_1,\ldots,n_{k+1}}.$$

On peut même supposer que les C_k sont tous égaux à 1, quitte à modifier $\mathscr{R}$ (cf. proposition 3, chap. 1, p. 16).

Il est alors immédiat que les ensembles

$$\mathscr{E}_{n_1} = \{f(x) \in C_p(\Omega\,;\,E) : B_1(f) \subset e_{n_1}\},$$
$$\mathscr{E}_{n_1,(n_2,n_1')} = \{f(x) \in C_p(\Omega\,;\,E) : B_1(f) \subset e_{n_1,n_2}\,;\ B_2(f) \subset e_{n_1'}\},$$
$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

avec la renumérotation habituelle des indices, constituent un réseau $\mathscr{R}'$ de $C_p(\Omega\,;\,E)$.

Ce réseau est de type $\mathscr{C}$.

De fait, soient

$$f_1(x) \in \mathscr{E}_{n_1},\ f_2(x) \in \mathscr{E}_{n_1,(n_2,n_1')},\ \ldots$$

et soient

$$\nu_1 = \lambda_1,\ \nu_2 = \inf(\lambda_2, \lambda_1'),\ \ldots,$$

où $\lambda_k, \lambda_k', \ldots$ sont les suites associées respectivement à $n_k, n_k', \ldots$ dans $\mathscr{R}$.

Comme $C_p(\Omega\,;\,E)$ est *sq*-complet, il suffit de prouver que la suite $\nu_k f_k(x)$ est bornée dans $C_p(\Omega\,;\,E)$.

Or, quel que soit n, vu le choix des f_k, il existe une suite $m_k \in \mathbb{N}$ telle que

$$B_n(f_k) \subset \nu_k e_{m_1,\ldots,m_k}$$

dès que k est assez grand. Quitte à augmenter encore k, on a aussi, pour p donné,

$$\nu_k e_{m_1,\ldots,m_k} \subset b_p(1).$$

Donc, au total,

$$\sup_{x \in \mathrm{K}_n} \sup_{|\alpha| \leqslant n} p\,[\mathrm{D}_x^\alpha \nu_k f_k(x)] \leqslant 1$$

pour $k \geqslant k(p, n)$ et, comme l'ensemble $\{\nu_k f_k(x) : k < k(p, n)\}$ est fini, donc borné,

$$\sup_{x \in \mathrm{K}_n} \sup_{|\alpha| \leqslant n} p\,[\mathrm{D}_x^\alpha \nu_k f_k(x)] \leqslant \mathrm{C},\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

On vérifie sans difficulté que $\mathscr{R}'$ est un réseau strict.

Si le réseau $\mathscr{R}$ est seulement de type $\mathscr{C}$, il faut remplacer les conditions « $\mathrm{B}_n(f) \subset e_{n_1,\ldots,n_k}$ » par « la restriction de $e_{n_1,\ldots,n_k}$ à l'enveloppe linéaire de $\mathrm{B}_n(f)$ munie de la norme associée à $\mathrm{B}_n(f)$ n'est pas maigre dans cet espace et

$$\mathrm{B}_n(f) \subset \overline{\langle e_{n_1,\ldots,n_k} \rangle} \text{ »},$$

en utilisant le théorème 1, chap. III, p. 48.